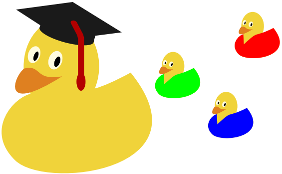
Višestruki integrali

Franka Miriam Brückler

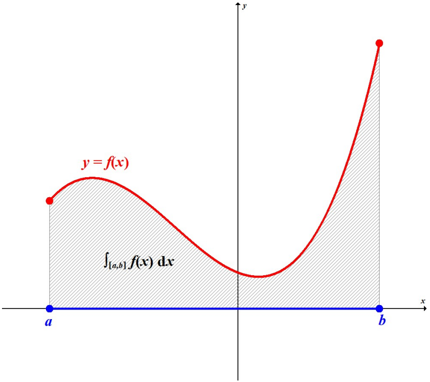


Što je Riemannov integral realne funkcije jedne varijable?

Što je Riemannov integral realne funkcije jedne varijable?

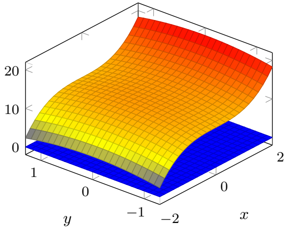
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$f : D \to \mathbb{R},\ [a,b] \subseteq D$$



Višestruki integrali

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \ldots$$



- Podintegralna funkcija: Skalarna funkcija f od 2, 3, ... varijabli
- Područje integriranja: Podskup domene od f
- Mjerna jedinica integrala je mjerna jedinica u domeni pomnožena s mjernom jedinicom kodomene (dimenzija se

- Primjene: Računanje površina i volumena, prosječne vrijednosti funkcije, vjerojatnost, . . .

- Primjene: Računanje površina i volumena, prosječne vrijednosti funkcije, vjerojatnost, ...
- Fubinijev teorem

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)$$

- Primjene: Računanje površina i volumena, prosječne vrijednosti funkcije, vjerojatnost, ...
- Fubinijev teorem

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)$$

Primjer

$$\iint_{[-1,2]\times[0,1]} x\exp(xy)\,dx\,dy = \int_{x=-1}^2 \int_{y=0^1} x\exp(xy)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{x=-1}^2 \left(\int_{y=0}^1 x\exp(xy)\,dy \right) dx = \int_{-1}^2 \left(e^{1x} - e^{0x} \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^2 (e^x - 1)\,dx = e^2 - 3 - \frac{1}{e}.$$

Zadatak

Dokažite da je

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x)g(y)h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y\right)\cdot\left(\int_p^q h(z)\,\mathrm{d}z\right).$$

Zadatak

Dokažite da je

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x)g(y)h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y\right)\cdot\left(\int_p^q h(z)\,\mathrm{d}z\right).$$

Ako je područje integriranja A omeđeno pravcima $x = a$, $x = b$ i grafovima funkcija $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$, onda je

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

a ako je A omeđeno pravcima $y = c$, $y = d$ i grafovima funkcija $x = g_1(y)$ i $x = g_2(y)$, onda je

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Primjer

Izračunajmo integral funkcije $f(x, y) = \exp(x/y)$ *po dijelu ravnine ispod pravaca* $y = 2$ *i* $y = x$*, a iznad grafa funkcije* $y = \sqrt[3]{x}$.

Primjer

Izračunajmo integral funkcije $f(x,y) = \exp(x/y)$ *po dijelu ravnine ispod pravaca* $y = 2$ *i* $y = x$*, a iznad grafa funkcije* $y = \sqrt[3]{x}$.

Skica $\Rightarrow 1 \leq x \leq 2,\ \sqrt[3]{x} \leq y \leq x$ *i* $2 \leq x \leq 8,\ \sqrt[3]{x} \leq y \leq 2$ *ili*
$1 \leq y \leq 2,\ y \leq x \leq y^3$

Primjer

Izračunajmo integral funkcije $f(x,y) = \exp(x/y)$ *po dijelu ravnine ispod pravaca* $y = 2$ *i* $y = x$*, a iznad grafa funkcije* $y = \sqrt[3]{x}$.

Skica $\Rightarrow 1 \leq x \leq 2,\ \sqrt[3]{x} \leq y \leq x$ *i* $2 \leq x \leq 8,\ \sqrt[3]{x} \leq y \leq 2$ *ili*
$1 \leq y \leq 2,\ y \leq x \leq y^3$

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=1}^{2} \left(\int_y^{y^3} \exp(x/y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{y=1}^{2} y \exp(x/y)\Big|_{x=y}^{y^3} \mathrm{d}y = \int_1^2 y\exp(y^2) - y\,\mathrm{d}y = \frac{e^4 - e - 3}{2}.$$

Primjer

Izračunajmo integral funkcije $f(x, y) = \exp(x/y)$ *po dijelu ravnine ispod pravaca* $y = 2$ *i* $y = x$*, a iznad grafa funkcije* $y = \sqrt[3]{x}$.

Skica $\Rightarrow 1 \leq x \leq 2,\ \sqrt[3]{x} \leq y \leq x$ *i* $2 \leq x \leq 8,\ \sqrt[3]{x} \leq y \leq 2$ *ili*
$1 \leq y \leq 2,\ y \leq x \leq y^3$

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=1}^{2} \left(\int_{y}^{y^3} \exp(x/y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{y=1}^{2} y \exp(x/y)\Big|_{x=y}^{y^3} \mathrm{d}y = \int_{1}^{2} y \exp(y^2) - y\,\mathrm{d}y = \frac{e^4 - e - 3}{2}.$$

Dvostruki integral po skupu površine nula i trostruki integral po skupu volumena nula iznosi nula — to je poopćenje kojeg svojstva jednostrukih integrala?

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x, y, z) = x + 2y + \exp(z)$ *po jediničnoj sferi sa središtem u ishodištu.*

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x, y, z) = x + 2y + \exp(z)$ *po jediničnoj sferi sa središtem u ishodištu.*

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x,y,z) = x + 2y + \exp(z)$ *po jediničnoj sferi sa središtem u ishodištu.*

Zamjena varijabli

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_A f(x',y')\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}\right|\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'$$

Primjer

Izračunajte integral funkcije $f(x,y,z) = \exp(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ *po dijelu prostora između sfera polumjera* 2 *i* 4 *sa središtem u ishodištu.*

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x, y, z) = x + 2y + \exp(z)$ *po jediničnoj sferi sa središtem u ishodištu.*

Zamjena varijabli

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(x', y') \left|\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')}\right| \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'$$

Primjer

Izračunajte integral funkcije $f(x, y, z) = \exp(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ *po dijelu prostora između sfera polumjera* 2 *i* 4 *sa središtem u ishodištu.*

$$\iiint_V f\,\mathrm{d}V = \int_{r=2}^{4} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \exp(r) \cdot r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta =$$

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x,y,z) = x + 2y + \exp(z)$ *po jediničnoj sferi sa središtem u ishodištu.*

Zamjena varijabli

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_A f(x',y')\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}\right|\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'$$

Primjer

Izračunajte integral funkcije $f(x,y,z) = \exp(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ *po dijelu prostora između sfera polumjera* 2 *i* 4 *sa središtem u ishodištu.*

$$\iiint\limits_V f\,\mathrm{d}V = \int_{r=2}^{4}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\exp(r)\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_2^4 r^2\exp(r)\,\mathrm{d}r\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 8\pi e^2(5e^2-1)$$

$$P(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}A \quad (\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi)$$

Primjer

Izračunajte površinu dijela ravnine izvan kružnice $r = 2$ i unutar krivulje $r = 3 + 2\sin\varphi$.

$$P(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}A \quad (\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi)$$

Primjer

Izračunajte površinu dijela ravnine izvan kružnice $r = 2$ *i unutar krivulje* $r = 3 + 2\sin\varphi$.

Sjecišta: $2 = 3 + 2\sin\varphi \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{6}, \ \varphi_2 = -\frac{5\pi}{6}$

$$P(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}A \quad (\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi)$$

Primjer

Izračunajte površinu dijela ravnine izvan kružnice $r = 2$ i unutar krivulje $r = 3 + 2\sin\varphi$.

Sjecišta: $2 = 3 + 2\sin\varphi \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{6},\ \varphi_2 = -\frac{5\pi}{6}$
Za $\varphi_2 < \varphi < \varphi_1$ *je* r *točaka krivulje manji od* 2, *a inače veći* $\Rightarrow$
imamo raspon od $-\frac{\pi}{6}$ *do* $\frac{7\pi}{6}$

$$P(\Omega) = \iint_{\Omega} \mathrm{d}A \quad (\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi)$$

Primjer

Izračunajte površinu dijela ravnine izvan kružnice $r = 2$ i unutar krivulje $r = 3 + 2\sin\varphi$.

Sjecišta: $2 = 3 + 2\sin\varphi \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = -\frac{5\pi}{6}$
Za $\varphi_2 < \varphi < \varphi_1$ *je* r *točaka krivulje manji od* 2, *a inače veći* $\Rightarrow$ *imamo raspon od* $-\frac{\pi}{6}$ *do* $\frac{7\pi}{6}$

$$P = \int_{\varphi=-\pi/6}^{7\pi/6} \int_{r=2}^{3+2\sin\varphi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3}.$$

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V \quad (\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta)$$

$$V(\Omega) = \iint\limits_{A} |f(x, y, z)|\,\mathrm{d}A$$

Primjer

Izračunajte volumen onog dijela paraboloida $z = x^2 + y^2 - 2$ koji se nalazi ispod jediničnog kruga K u (x, y)-ravnini.

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V \quad (\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta)$$

$$V(\Omega) = \iint\limits_{A} |f(x,y,z)|\,\mathrm{d}A$$

Primjer

Izračunajte volumen onog dijela paraboloida $z = x^2 + y^2 - 2$ *koji se nalazi ispod jediničnog kruga* K *u* (x, y)*-ravnini.*

$$V = \iint\limits_{K} (2 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (2 - r^2) \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{3}{2}\pi.$$

Primjer

Izračunajte volumen tetraedra omeđenog ravninama
$4x + 2y + z = 8$, $y = 3x$, $z = 0$ *i* $x = 0$.

Primjer

Izračunajte volumen tetraedra omedenog ravninama $4x + 2y + z = 8$, $y = 3x$, $z = 0$ *i* $x = 0$.

Prva ravnina ima odsječke 2, 4 *i* 8 *na koordinatnim osima, a zadnje dvije su* (x, y)*- i* (y, z)*-koordinatna ravnina* $\Rightarrow$ *nalazimo se iznad odnosno ispred tih dviju ravnina.*

Primjer

Izračunajte volumen tetraedra omeđenog ravninama $4x + 2y + z = 8$, $y = 3x$, $z = 0$ *i* $x = 0$.

Prva ravnina ima odsječke 2, 4 *i* 8 *na koordinatnim osima, a zadnje dvije su* (x, y)*- i* (y, z)*-koordinatna ravnina* $\Rightarrow$ *nalazimo se iznad odnosno ispred tih dviju ravnina.*
Ravnina $y = 3x$ *sadrži* z*-os i* (x, y)*-ravninu siječe duž pravca* $y = 3x$, $z = 0$ $\Rightarrow$ *imamo tetraedar s vrhovima* $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 8)$, $(0, 4, 0)$ *i* $\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}, 0\right)$.

Primjer

Izračunajte volumen tetraedra omeđenog ravninama
$4x + 2y + z = 8$, $y = 3x$, $z = 0$ *i* $x = 0$.

Prva ravnina ima odsječke 2, 4 *i* 8 *na koordinatnim osima, a zadnje dvije su* (x, y)*- i* (y, z)*-koordinatna ravnina* $\Rightarrow$ *nalazimo se iznad odnosno ispred tih dviju ravnina.*
Ravnina $y = 3x$ *sadrži* z*-os i* (x, y)*-ravninu siječe duž pravca* $y = 3x$, $z = 0$ $\Rightarrow$ *imamo tetraedar s vrhovima* $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 8)$, $(0, 4, 0)$ *i* $\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}, 0\right)$.

$$V = \int_{x=0}^{\frac{4}{5}} \int_{y=3x}^{4-2x} \int_{z=0}^{8-4x-2y} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{2} \int_{y=3x}^{4-2x} (8-4x-2y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{x=0}^{\frac{4}{5}} \int_{y=3x}^{4-2x} \left((8-4x)(4-2x) - (4-2x)^2 - (8-4x)3x + 9x^2\right)\, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{4}{5}} (25$$

$$\overline{f} = \frac{1}{P(\Omega)} \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}A; \quad \overline{f} = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, \mathrm{d}V$$

Primjer

Na linku $\boxed{\textit{Colorado: temperature}}$ *prikazanesu temperature (u* °F*) u državi Colorado 24.3.2008. u 12:58 sati. Karta se proteže* 612 km *u smjeru istok-zapad i* 451 km *u smjeru sjever-jug. Izračunajte prosječnu temperaturu u Coloradu tog trena!*

$$\overline{f} = \frac{1}{P(\Omega)} \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}A; \quad \overline{f} = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

Primjer

Na linku $\boxed{\textit{Colorado: temperature}}$ *prikazanesu temperature (u* °F*) u državi Colorado 24.3.2008. u 12:58 sati. Karta se proteže* 612 km *u smjeru istok-zapad i* 451 km *u smjeru sjever-jug. Izračunajte prosječnu temperaturu u Coloradu tog trena!*

Površina Colorada je približno $612 \cdot 451 = 276012\,\mathrm{km}^2$.

$$\overline{f} = \frac{1}{P(\Omega)} \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}A; \quad \overline{f} = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

Primjer

Na linku $\boxed{\textit{Colorado: temperature}}$ *prikazanesu temperature (u* °F*) u državi Colorado 24.3.2008. u 12:58 sati. Karta se proteže* 612 km *u smjeru istok-zapad i* 451 km *u smjeru sjever-jug. Izračunajte prosječnu temperaturu u Coloradu tog trena!*

Površina Colorada je približno $612 \cdot 451 = 276012\,\mathrm{km}^2$*. Pravokutnik podijelimo na 12 manjih, sukladnih pravokutnika:* $\Delta A = \frac{276012}{12} = 23001$.

$$\overline{f} = \frac{1}{P(\Omega)} \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}A; \quad \overline{f} = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

Primjer

Na linku $\boxed{\textit{Colorado: temperature}}$ *prikazanesu temperature (u °F) u državi Colorado 24.3.2008. u 12:58 sati. Karta se proteže* 612 km *u smjeru istok-zapad i* 451 km *u smjeru sjever-jug. Izračunajte prosječnu temperaturu u Coloradu tog trena!*

Površina Colorada je približno $612 \cdot 451 = 276012\,\mathrm{km}^2$. *Pravokutnik podijelimo na 12 manjih, sukladnih pravokutnika:* $\Delta A = \frac{276012}{12} = 23001$.

$$\frac{\overline{\theta}}{{}^\circ\mathrm{F}} = \frac{1}{276012} \iint\limits_{Colorado} \theta(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \frac{1}{276012} \sum_{i,j} \theta(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot 23001 \approx$$

$$\approx \frac{1}{12}(27+45+39+27+9+9+41+52+55+54+59+61) = 39{,}8\dot{3}.$$

Skalarni produkt dviju realnih ili kompleksnih funkcija više varijabli:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_S \psi_1^* \psi_2 \, \mathrm{d}S$$

Primjer

Norma funkcije $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3x^2 + 4y^3$ *je*

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 (3x^2 + 4y^3) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y} = \ldots = \sqrt{2}.$$

Skalarni produkt dviju realnih ili kompleksnih funkcija više varijabli:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_S \psi_1^* \psi_2 \, \mathrm{d}S$$

Primjer

Norma funkcije $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3x^2 + 4y^3$ *je*

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 (3x^2 + 4y^3) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y} = \ldots = \sqrt{2}.$$

Zadatak

Pokažite ortogonalnost vodikovih 1s i 2s orbitala:

$$\psi_{1s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right), \psi_{2s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right).$$

Ako je f funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje nekog objekta na nekoj poziciji u ravnini ili prostoru, ona mora biti normirana (njen integral po cijeloj ravnini odnosno prostoru mora biti 1), vjerojatnost da se on nalazi unutar S je

$$P = \int_S f \, \mathrm{d}S,$$

a očekivana udaljenost r objekta do ishodišta je

$$\langle r \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} r \, f \, \mathrm{d}S,$$

gdje je $n = 2$ ili 3.

Zadatak

Ako je elektron opisan valnom funkcijom ψ (pa mu je funkcija gustoće $|\psi|^2$), koja je vjerojatnost da se on nade izvan stošca s vrhom u ishodištu, kojemu je os pozitivni dio z-osi i kut pri vrhu 45°, a unutar kugle polumjera R?

Zadatak

Odredite očekivanu udaljenost $\langle r \rangle$ elektrona 1s-orbitale

$$\psi_{1s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$$

do jezgre atoma vodika ($f = |\psi_{1s}|^2$)!

Zadatak

Odredite očekivanu udaljenost $\langle r \rangle$ elektrona 1s-orbitale

$$\psi_{1s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$$

do jezgre atoma vodika ($f = |\psi_{1s}|^2$)!

$$\langle r \rangle = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \psi^* \hat{r} \psi \, \mathrm{d}V = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} r \cdot \frac{1}{\pi a_0^3} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) \mathrm{d}V =$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^3} \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^3 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{3}{2} a_0.$$