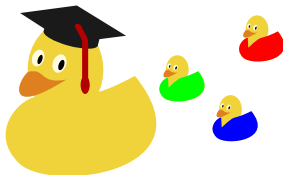


Krivuljni integrali i diferencijali

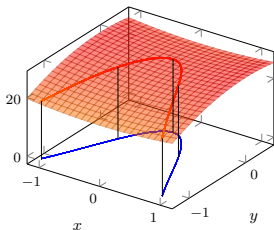
Franka Miriam Brückler



Krivuljni integrali

Područje integriranja je krivulja (čija slika je) unutar domene podintegralne funkcije.

- ① **Krivuljni integrali skalarnih funkcija** $\int_{\gamma} f(x, y, \dots) ds$



- ② **Krivuljni integrali vektorskih polja**

$$\int_{\gamma} F_1(x, y, \dots) dx + F_2(x, y, \dots) dy + \dots$$

rad = integral sile duž puta

Krivuljni integrali skalarnih funkcija

$$\int_{\gamma} f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Za funkcije dviju odnosno triju varijabli:

$$\int_{\gamma} f \, ds := \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$$

$$\int_{\gamma} f \, ds := \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt$$

- Linearni su.
- Iznos ne ovisi o orijentaciji krivulje.
- Integral po $\gamma_1 \cup \gamma_2$ je zbroj integrala po γ_1 i γ_2 .
- Ako je γ zatvorena, koristi se oznaka $\oint$.

Zadatak

Izračunajte $\oint (x + y) ds$ po rubu $\triangle OAB$, gdje je $A = (1, 0)$ i $B = (0, 1)$.

Zadatak

Izračunajte $\oint (x + y) ds$ po rubu $\triangle OAB$, gdje je $A = (1, 0)$ i $B = (0, 1)$.

Primjene krivuljnih integrala skalarnih funkcija uključuju računanje duljina krivulja, mase žice iz gustoće, ...

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} ds \quad m = \int_{\gamma} \rho ds$$

Zadatak

Izračunajte duljinu grafa funkcije $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^{3/2}$.

Zadatak

Izračunajte $\oint (x + y) ds$ po rubu $\triangle OAB$, gdje je $A = (1, 0)$ i $B = (0, 1)$.

Primjene krivuljnih integrala skalarnih funkcija uključuju računanje duljina krivulja, mase žice iz gustoće, ...

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} ds \quad m = \int_{\gamma} \rho ds$$

Zadatak

Izračunajte duljinu grafa funkcije $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^{3/2}$.

Zadatak

Izračunajte masu opruge oblika zavojnice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ (za $0 \leq t \leq 10\pi$) ako je gustoća opruge na poziciji (x, y, z) jednaka $x + y + z \text{ kg/m}^3$.

Krivuljni integrali vektorskih polja

$$\int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Za funkcije dviju varijabli:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} F_x dx + F_y dy := \int_a^b (F_x(\gamma(t))x'(t) + F_y(\gamma(t))y'(t)) dt$$

Osnovna svojstva su kao kod krivuljnih integrala skalarnih funkcija, ali obrtanje orijentacije krivulje mijenja predznak krivuljnog integrala vektorskog polja.

Zadatak

Izračunajte $\int_{\gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - z) dz$, gdje je γ zavojnica $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 3t)$ za $0 \leq t \leq 2\pi$.

Osnovne **primjene krivuljnih integrala vektorskih polja** osim računanja mehaničkog rada uključuju računanje promjena vrijednosti svojstava termodinamičkih sustava.

$$w = \int_{\gamma} F_x dx + F_y dy + \dots \quad \Delta Y = \int_{\gamma} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots$$

Zadatak

Koji rad izvrši sila $F(x, y) = \frac{N}{m} (-y, x)$ duž gornje jedinične polukružnice od $(-1, 0)$ do $(1, 0)$?

Osnovne **primjene krivuljnih integrala vektorskih polja** osim računanja mehaničkog rada uključuju računanje promjena vrijednosti svojstava termodinamičkih sustava.

$$w = \int_{\gamma} F_x dx + F_y dy + \dots \quad \Delta Y = \int_{\gamma} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots$$

Zadatak

Koji rad izvrši sila $F(x, y) = \frac{N}{m}(-y, x)$ duž gornje jedinične polukružnice od $(-1, 0)$ do $(1, 0)$?

Primjer

Ako je termodinamički sustav stalnog sastava, stanja su mu opisana parovima (T, V) . Promjena unutrašnje energije od početnog stanja $I = (T_0, V_0)$ do konačnog stanja $F = (T_1, V_1)$ tijekom procesa opisanog krivuljom γ računa se kao

$$\Delta U = \int C_V dT + \pi_T dV.$$

Krivuljni integrali konzervativnih vektorskih polja

Krivuljni integral konzervativnog vektorskog polja $\vec{F} = \nabla f$ ne ovisi o krivulji γ , nego samo o njezinoj početnoj i konačnoj točki A i B :

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

Zadatak

*Dokažite gornju formulu za vektorska polja dviju varijabli.
Objasnite zašto je gornje svojstvo ekvivalentno svojstvu da su krivuljni integrali konzervativnih vektorskih polja po zatvorenim krivuljama jednaki nuli.*

Krivuljni integrali konzervativnih vektorskih polja

Krivuljni integral konzervativnog vektorskog polja $\vec{F} = \nabla f$ ne ovisi o krivulji γ , nego samo o njezinoj početnoj i konačnoj točki A i B :

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

Zadatak

Dokažite gornju formulu za vektorska polja dviju varijabli. Objasnite zašto je gornje svojstvo ekvivalentno svojstvu da su krivuljni integrali konzervativnih vektorskih polja po zatvorenim krivuljama jednaki nuli.

Za $\vec{F} = (F_x, F_y) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ je

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot y'(t) \right) dt.$$

Zbog lančanog pravila to je jednako:

$$\int_a^b \frac{d}{dt} (f(\gamma(t))) dt = f(B) - f(A).$$

Zbog lančanog pravila to je jednako:

$$\int_a^b \frac{d}{dt} (f(\gamma(t))) dt = f(B) - f(A).$$

Zadatak

Izračunajte rad izvršen poljem sile

$\vec{F}(x, y, z) = \frac{N}{m} (2xze^y, x^2ze^y, x^2e^y)$ duž krivulje

$\gamma(t) = (t, t + \sin(\pi t), t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

Zbog lančanog pravila to je jednako:

$$\int_a^b \frac{d}{dt} (f(\gamma(t))) dt = f(B) - f(A).$$

Zadatak

Izračunajte rad izvršen poljem sile

$\vec{F}(x, y, z) = \frac{N}{m} (2xze^y, x^2ze^y, x^2e^y)$ duž krivulje

$\gamma(t) = (t, t + \sin(\pi t), t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

$$\frac{\partial(F_x, F_y, F_z)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 2ze^y & 2xze^y & 2xe^y \\ 2xze^y & x^2ze^y & x^2e^y \\ 2xe^y & x^2e^y & 0 \end{pmatrix}$$

Dakle, $\vec{F}$ je konzervativno pa je:

$$w = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

za bilo koju γ' koja ima isti početak i kraj kao γ .

$$w = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

za bilo koju γ' koja ima isti početak i kraj kao γ . Početak od γ je $\gamma(0) = (0, 0, 0)$, a kraj je $\gamma(1) = (1, 1, 1)$. Uzmimo dužinu koja spaja te dvije točke: $\gamma'(t) = (t, t, t)$ za $0 \leq t \leq 1$.

$$w = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

za bilo koju γ' koja ima isti početak i kraj kao γ . Početak od γ je $\gamma(0) = (0, 0, 0)$, a kraj je $\gamma(1) = (1, 1, 1)$. Uzmimo dužinu koja spaja te dvije točke: $\gamma'(t) = (t, t, t)$ za $0 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned} w &= \int_{\gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma'} 2xze^y dx + x^2ze^y dy + x^2e^y dz = \\ &= \int_0^1 (2t t e^t + t^2 t e^t + t^2 e^t) dt = \int_0^1 (3t^2 + t^3)e^t dt = \dots = e J. \end{aligned}$$

$$w = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

za bilo koju γ' koja ima isti početak i kraj kao γ . Početak od γ je $\gamma(0) = (0, 0, 0)$, a kraj je $\gamma(1) = (1, 1, 1)$. Uzmimo dužinu koja spaja te dvije točke: $\gamma'(t) = (t, t, t)$ za $0 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned} w &= \int_{\gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma'} 2xze^y dx + x^2ze^y dy + x^2e^y dz = \\ &= \int_0^1 (2t t e^t + t^2 t e^t + t^2 e^t) dt = \int_0^1 (3t^2 + t^3)e^t dt = \dots = e J. \end{aligned}$$

Pogledajmo podintegralni izraz u, npr.

$$\int_{\gamma} xy dx + x^2 y^2 dy$$

Diferencijali

Diferencijal (s varijablama $x, y, \dots$) je izraz oblika

$$\omega = F_x dx + F_y dy + \dots$$

u kojem su $F_x, F_y, \dots$ skalarne funkcije varijabli $x, y, \dots$.
Svako vektorsko polje određuje jedan diferencijal i obrnuto:

$$F = (F_x, F_y, \dots) \longleftrightarrow \omega = F_x dx + F_y dy + \dots$$

Primjer

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y, x^2 - y^2) \longleftrightarrow \omega = (x + y) dx + (x^2 - y^2) dy$$

Diferencijali

Diferencijal (s varijablama $x, y, \dots$) je izraz oblika

$$\omega = F_x dx + F_y dy + \dots$$

u kojem su $F_x, F_y, \dots$ skalarne funkcije varijabli $x, y, \dots$.
Svako vektorsko polje određuje jedan diferencijal i obrnuto:

$$F = (F_x, F_y, \dots) \longleftrightarrow \omega = F_x dx + F_y dy + \dots$$

Primjer

$$F(x, y) = (x + y, x^2 - y^2) \longleftrightarrow \omega = (x + y) dx + (x^2 - y^2) dy$$

Diferencijal ω nazivamo **egzaktnim diferencijalom** ako je odgovarajuće vektorsko polje F konzervativno ($F = \nabla f$). U tom slučaju kažemo da je ω **diferencijal skalarnog potencijala (skalarne funkcije)** f i pišemo $\omega = df$.

Zadatak

Izračunajte diferencijal od $f(x, y, z) = 2x - \exp(y) \ln(z)$.

Zadatak

Izračunajte diferencijal od $f(x, y, z) = 2x - \exp(y) \ln(z)$.

$$\nabla f(x, y, z) = (2, -\exp(y) \ln(z), \exp(y)/z) \Rightarrow$$

$$df = 2 dx - \exp(y) \ln(z) dy + \frac{\exp(y)}{z} dz$$

Zadatak

Objasnite zašto vrijede formule

$$\int_{\gamma} df = f(B) - f(A), \quad \oint df = 0.$$

Zadatak

Zapišite Eulerov uvjet egzaktnosti za diferencijale dviju i triju varijabli.

Ako je $\omega = M dx + N dy$ egzaktan, onda je $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Ako je $\omega = M dx + N dy$ egzaktan, onda je $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Ako je

$\omega = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ egzaktan, onda je $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ i

$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$ i $\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}$.

Ako je $\omega = M dx + N dy$ egzaktan, onda je $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Ako je

$\omega = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ egzaktan, onda je $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ i

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \text{ i } \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}.$$

Što je to dx , dy ? To nije isto što i Δx , Δy !

Ako je $\omega = M dx + N dy$ egzaktna, onda je $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Ako je

$\omega = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ egzaktna, onda je $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ i

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \text{ i } \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}.$$

Što je to dx , dy ? To nije isto što i Δx , Δy !

$dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $dx_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ (linearni funkcional)

Primjer

*U kontekstu dviju varijabli x i y je $dx(1, 2) = 1$,
 $dx(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$.*

Ako je $\omega = M dx + N dy$ egzaktna, onda je $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Ako je

$\omega = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ egzaktna, onda je $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ i

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \text{ i } \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}.$$

Što je to dx , dy ? To nije isto što i Δx , Δy !

$dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $dx_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ (linearni funkcional)

Primjer

*U kontekstu dviju varijabli x i y je $dx(1, 2) = 1$,
 $dx(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$.*

Primjer

$$\omega = (x + y) dx + (x^2 - y^2) dy \Rightarrow$$

Ako je $\omega = M dx + N dy$ egzaktna, onda je $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Ako je

$\omega = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ egzaktna, onda je $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ i

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \text{ i } \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}.$$

Što je to dx , dy ? To nije isto što i Δx , Δy !

$dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $dx_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ (linearni funkcional)

Primjer

U kontekstu dviju varijabli x i y je $dx(1, 2) = 1$,
 $dx(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$.

Primjer

$$\omega = (x + y) dx + (x^2 - y^2) dy \Rightarrow \omega(1, 2) = 3 dx - 3 dy \Rightarrow$$

Ako je $\omega = M dx + N dy$ egzaktan, onda je $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Ako je

$\omega = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ egzaktan, onda je $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ i

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \text{ i } \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}.$$

Što je to dx , dy ? To nije isto što i Δx , Δy !

$dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $dx_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ (linearan funkcional)

Primjer

*U kontekstu dviju varijabli x i y je $dx(1, 2) = 1$,
 $dx(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$.*

Primjer

$$\omega = (x + y) dx + (x^2 - y^2) dy \Rightarrow \omega(1, 2) = 3 dx - 3 dy \Rightarrow \\ \omega(1, 2)(3, 4) = 3 dx(3, 4) - 3 dy(3, 4) = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = -3.$$

Dakle, diferencijali točkama iz $\mathbb{R}^n$ pridružuju linearne funkcionalne na $\mathbb{R}^n$.

Egzaktne diferencijalne jednačbe su obične diferencijalne jednačbe oblika

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

gdje je $\omega = M(x, y) dx + N(x, y) dy$ egzaktna, tj. $F = (M, N)$ konzervativna. Ako postoji funkcija μ jedne ili obje varijabli x i y tako da je $\mu \cdot \omega$ egzaktna, kažemo da je μ Eulerov multiplikator diferencijala ω .

Egzaktne diferencijalne jednađbe su obične diferencijalne jednađbe oblika

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

gdje je $\omega = M(x, y) dx + N(x, y) dy$ egzaktn, tj. $F = (M, N)$ konzervativno. Ako postoji funkcija μ jedne ili obje varijabli x i y tako da je $\mu \cdot \omega$ egzaktn, kaŹemo da je μ Eulerov multiplikator diferencijala ω .

Zadatak

Riješite diferencijalnu jednađbu $(x + y) dx + (x + 2y) dy = 0$.

Egzaktne diferencijalne jednađbe su obične diferencijalne jednađbe oblika

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

gdje je $\omega = M(x, y) dx + N(x, y) dy$ egzaktn, tj. $F = (M, N)$ konzervativno. Ako postoji funkcija μ jedne ili obje varijabli x i y tako da je $\mu \cdot \omega$ egzaktn, kaŹemo da je μ Eulerov multiplikator diferencijala ω .

Zadatak

Riješite diferencijalnu jednađbu $(x + y) dx + (x + 2y) dy = 0$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{egzaktna ODJ};$$

Egzaktne diferencijalne jednačbe su obične diferencijalne jednačbe oblika

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

gdje je $\omega = M(x, y) dx + N(x, y) dy$ egzaktna, tj. $F = (M, N)$ konzervativna. Ako postoji funkcija μ jedne ili obje varijabli x i y tako da je $\mu \cdot \omega$ egzaktna, kažemo da je μ Eulerov multiplikator diferencijala ω .

Zadatak

Riješite diferencijalnu jednačbu $(x + y) dx + (x + 2y) dy = 0$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{egzaktna ODJ}; F = (M, N) = \nabla f \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + y \Rightarrow$$

Egzaktne diferencijalne jednačbe su obične diferencijalne jednačbe oblika

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

gdje je $\omega = M(x, y) dx + N(x, y) dy$ egzaktna, tj. $F = (M, N)$ konzervativno. Ako postoji funkcija μ jedne ili obje varijabli x i y tako da je $\mu \cdot \omega$ egzaktna, kažemo da je μ Eulerov multiplikator diferencijala ω .

Zadatak

Riješite diferencijalnu jednačbu $(x + y) dx + (x + 2y) dy = 0$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{egzaktna ODJ}; F = (M, N) = \nabla f \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + y \Rightarrow f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + C(y)$$

$\Rightarrow$

Egzaktne diferencijalne jednačbe su obične diferencijalne jednačbe oblika

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

gdje je $\omega = M(x, y) dx + N(x, y) dy$ egzaktn, tj. $F = (M, N)$ konzervativno. Ako postoji funkcija μ jedne ili objiju varijabli x i y tako da je $\mu \cdot \omega$ egzaktn, kažemo da je μ Eulerov multiplikator diferencijala ω .

Zadatak

Riješite diferencijalnu jednačbu $(x + y) dx + (x + 2y) dy = 0$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{egzaktna ODJ}; F = (M, N) = \nabla f \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + y \Rightarrow f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + C(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + C'(y) = x + 2y \Rightarrow C(y) = y^2 + C_0 \Rightarrow$$

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = c.$$

Ako je ω egzaktan diferencijal i ako za neku veličinu Y vrijedi da se duž svake krivulje γ mijenja za $\Delta Y = \int_{\gamma} \omega$, kažemo da je Y **funkcija stanja** (opisana diferencijalom ω).

Ako je ω egzaktan diferencijal i ako za neku veličinu Y vrijedi da se duž svake krivulje γ mijenja za $\Delta Y = \int_{\gamma} \omega$, kažemo da je Y **funkcija stanja** (opisana diferencijalom ω). Uočimo: Svaka derivabilna skalarna funkcija poznate formule je funkcija stanja.

Ako je ω egzaktni diferencijal i ako za neku veličinu Y vrijedi da se duž svake krivulje γ mijenja za $\Delta Y = \int_{\gamma} \omega$, kažemo da je Y **funkcija stanja** (opisana diferencijalom ω). Uočimo: Svaka derivabilna skalarna funkcija poznate formule je funkcija stanja.

Primjer

Funkcije V i Z su funkcije stanja, a X i Y su definirane s:

$$X = \left(\frac{\partial Z}{\partial W} \right)_V, \quad Y = \left(\frac{\partial V}{\partial Z} \right)_W.$$

Koje su varijable funkcija X , Y , Z , V ?

Ako je ω egzaktni diferencijal i ako za neku veličinu Y vrijedi da se duž svake krivulje γ mijenja za $\Delta Y = \int_{\gamma} \omega$, kažemo da je Y **funkcija stanja** (opisana diferencijalom ω). Uočimo: Svaka derivabilna skalarna funkcija poznate formule je funkcija stanja.

Primjer

Funkcije V i Z su funkcije stanja, a X i Y su definirane s:

$$X = \left(\frac{\partial Z}{\partial W} \right)_V, \quad Y = \left(\frac{\partial V}{\partial Z} \right)_W.$$

Koje su varijable funkcija X , Y , Z , V ? Od X i Z varijable su V i W , a od V i Y varijable su Z i W .

Zapišimo diferencijal dV kao diferencijal njegovi varijabli, tako da odgovarajuće koordinatne funkcije ovise samo o X i Y !

Ako je ω egzaktna diferencijal i ako za neku veličinu Y vrijedi da se duž svake krivulje γ mijenja za $\Delta Y = \int_{\gamma} \omega$, kažemo da je Y **funkcija stanja** (opisana diferencijalom ω). Uočimo: Svaka derivabilna skalarna funkcija poznate formule je funkcija stanja.

Primjer

Funkcije V i Z su funkcije stanja, a X i Y su definirane s:

$$X = \left(\frac{\partial Z}{\partial W} \right)_V, \quad Y = \left(\frac{\partial V}{\partial Z} \right)_W.$$

Koje su varijable funkcija X , Y , Z , V ? Od X i Z varijable su V i W , a od V i Y varijable su Z i W .

Zapišimo diferencijal dV kao diferencijal njegovi varijabli, tako da odgovarajuće koordinatne funkcije ovise samo o X i Y !

Eulerovo cikličko pravilo: $\left(\frac{\partial V}{\partial W} \right)_Z \left(\frac{\partial W}{\partial Z} \right)_V \left(\frac{\partial Z}{\partial V} \right)_W = -1 \Rightarrow$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial W} \right)_Z dW + \left(\frac{\partial V}{\partial Z} \right)_W dZ = -X dW + Y dZ.$$

Nastavak primjera

Što se može reći o ovisnosti X o W pri konstantnom V ako bismo znali da je Z konveksna funkcija od W kad je V konstantan?

Nastavak primjera

Što se može reći o ovisnosti X o W pri konstantnom V ako bismo znali da je Z konveksna funkcija od W kad je V konstantan?

$$\left(\frac{\partial X}{\partial W}\right)_V = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial W^2}\right)_V > 0 \Rightarrow \text{raste!}$$

Nastavak primjera

Što se može reći o ovisnosti X o W pri konstantnom V ako bismo znali da je Z konveksna funkcija od W kad je V konstantan?

$\left(\frac{\partial X}{\partial W}\right)_V = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial W^2}\right)_V > 0 \Rightarrow$ raste! Dokažimo još:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial W \partial Z} + X \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right)_W = 0.$$

Nastavak primjera

Što se može reći o ovisnosti X o W pri konstantnom V ako bismo znali da je Z konveksna funkcija od W kad je V konstantan?

$\left(\frac{\partial X}{\partial W}\right)_V = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial W^2}\right)_V > 0 \Rightarrow$ raste! Dokažimo još:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial W \partial Z} + X \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right)_W = 0.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial W \partial Z} = \left(\frac{\partial Y}{\partial W}\right)_Z = \left(\frac{\partial(-X Y)}{\partial Z}\right)_W =$$

Nastavak primjera

Što se može reći o ovisnosti X o W pri konstantnom V ako bismo znali da je Z konveksna funkcija od W kad je V konstantan?

$\left(\frac{\partial X}{\partial W}\right)_V = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial W^2}\right)_V > 0 \Rightarrow$ raste! Dokažimo još:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial W \partial Z} + X \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right)_W = 0.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial W \partial Z} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial W}\right)_Z = \left(\frac{\partial(-X Y)}{\partial Z}\right)_W = -X \left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)_W - Y \left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)_W = \\ &= -X \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right)_W - Y \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)_W \left(\frac{\partial Z}{\partial W}\right)_V = \\ &= \end{aligned}$$

Nastavak primjera

Što se može reći o ovisnosti X o W pri konstantnom V ako bismo znali da je Z konveksna funkcija od W kad je V konstantan?

$\left(\frac{\partial X}{\partial W}\right)_V = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial W^2}\right)_V > 0 \Rightarrow$ raste! Dokažimo još:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial W \partial Z} + X \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right)_W = 0.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial W \partial Z} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial W}\right)_Z = \left(\frac{\partial(-X Y)}{\partial Z}\right)_W = -X \left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)_W - Y \left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)_W = \\&= -X \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right)_W - Y \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)_W \left(\frac{\partial Z}{\partial W}\right)_V = \\&= -X \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right)_W - Y \left(\frac{\partial}{\partial W}\right)_V \left(\frac{\partial Z}{\partial Z}\right)_W = \\&= -X \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right)_W - Y \left(\frac{\partial 1}{\partial W}\right)_V = -X \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right)_W\end{aligned}$$

Primjene diferencijala u termodinamici

- Termodinamički sustav: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
- Stanje termodinamičkog sustava: $X \in \Omega$
- Termodinamički proces: krivulja γ u Ω
- Svojstvo termodinamičkog sustava: $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- obično nije poznata eksplicitna formula, nego samo diferencijal ω takav da za sve procese vrijedi

$$\Delta Y = \int_{\gamma} \omega$$

- Prvi i drugi glavni stavak termodinamike:

$$dU = \delta w + \delta q \text{ \& \; } dS = \frac{\delta q}{T}$$

- **Volumni rad** je definiran neegzaktnim diferencijalom
 $\delta w = -p \, dV$

Primjene diferencijala u termodinamici

- Termodinamički sustav: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
- Stanje termodinamičkog sustava: $X \in \Omega$
- Termodinamički proces: krivulja γ u Ω
- Svojstvo termodinamičkog sustava: $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- obično nije poznata eksplicitna formula, nego samo diferencijal ω takav da za sve procese vrijedi

$$\Delta Y = \int_{\gamma} \omega$$

- Prvi i drugi glavni stavak termodinamike:

$$dU = \delta w + \delta q \text{ \& \& } dS = \frac{\delta q}{T}$$

- **Volumni rad** je definiran neegzaktnim diferencijalom
 $\delta w = -p \, dV$

$$dU = \delta w + \delta q = -p \, dV + T \, dS.$$

Koje su ovdje zavisne, a koje nezavisne varijable?

Zadatak

Ako je $G := H - T S = U + p V - T S$, argumentirajte zašto je G funkcija stanja. Raspišite dG ako je $\delta w = -p dV$. Koje su nezavisne varijable od G ? Koristeći egzaktni diferencijal $dG = V dp - S dT$ i formulu $H = G + T S$ dokažite:

$H = G - T \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p$ i $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T$. Koliko za idealni plin iznosi $\left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p$?

Zadatak

Ako je $G := H - T S = U + p V - T S$, argumentirajte zašto je G funkcija stanja. Raspišite dG ako je $\delta w = -p dV$. Koje su nezavisne varijable od G ? Koristeći egzaktni diferencijal $dG = V dp - S dT$ i formulu $H = G + T S$ dokažite:

$H = G - T \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p$ i $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T$. Koliko za idealni plin iznosi $\left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p$?

$$\begin{aligned} dG &= (-p dV + T dS) + p dV + V dp - T dS - S dT = \\ &= p dV - S dT; \quad G = G(V, T) \end{aligned}$$

Zadatak

Ako je $G := H - T S = U + p V - T S$, argumentirajte zašto je G funkcija stanja. Raspišite dG ako je $\delta w = -p dV$. Koje su nezavisne varijable od G ? Koristeći egzaktni diferencijal $dG = V dp - S dT$ i formulu $H = G + T S$ dokažite:

$H = G - T \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p$ i $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T$. Koliko za idealni plin iznosi $\left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p$?

$$\begin{aligned} dG &= (-p dV + T dS) + p dV + V dp - T dS - S dT = \\ &= p dV - S dT; \quad G = G(V, T) \end{aligned}$$

$$H = G + TS \quad \& \quad dG = p dV - S dT = \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_V dV + \left(\frac{\partial G}{\partial V} \right)_T dT$$

$\Rightarrow$

Zadatak

Ako je $G := H - T S = U + p V - T S$, argumentirajte zašto je G funkcija stanja. Raspišite dG ako je $\delta w = -p dV$. Koje su nezavisne varijable od G ? Koristeći egzaktni diferencijal $dG = V dp - S dT$ i formulu $H = G + T S$ dokažite:

$H = G - T \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p$ i $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T$. Koliko za idealni plin iznosi $\left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p$?

$$\begin{aligned} dG &= (-p dV + T dS) + p dV + V dp - T dS - S dT = \\ &= p dV - S dT; \quad G = G(V, T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= G + TS \quad \& \quad dG = p dV - S dT = \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_V dV + \left(\frac{\partial G}{\partial V} \right)_T dT \\ \Rightarrow H &= G - T \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p; \end{aligned}$$

$dG = p dV - S dT = \text{egzaktan} \Rightarrow \text{zadovoljava}$

Eulerov uvjet $\Rightarrow$

$dG = p dV - S dT = \text{egzaktan} \Rightarrow \text{zadovoljava}$

$$\text{Eulerov uvjet} \Rightarrow H = G - T \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p ;$$

Idealni plin: $p V = n R T$; lančano pravilo:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p + \frac{nR(G - H)}{VT}$$