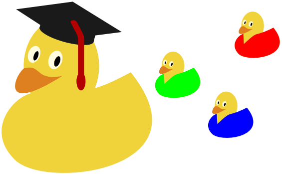
19. predavanje: Višestruki i krivuljni integrali — definicije i svojstva

Franka Miriam Brückler

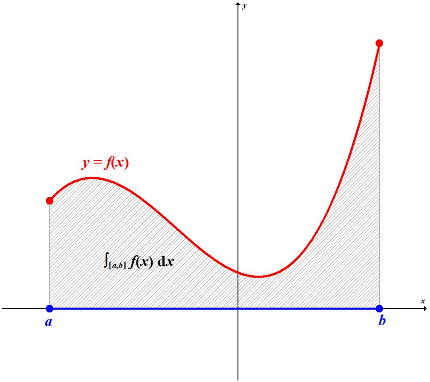


Što je Riemannov integral realne funkcije jedne varijable?

Što je Riemannov integral realne funkcije jedne varijable?

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$f : D \to \mathbb{R},\ [a,b] \subseteq D$$



Tri poopćenja integrala na funkcije više varijabli

- Višestruki integrali — dvostruki, trostruki, ...

$$\iint\limits_{A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \ldots$$

Tri poopćenja integrala na funkcije više varijabli

- Višestruki integrali — dvostruki, trostruki, . . .

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy, \quad \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \ldots$$

- Krivuljni integrali
  1. Prve vrste $\int_\gamma f(x,y,\ldots)\,ds$

Tri poopćenja integrala na funkcije više varijabli

- Višestruki integrali — dvostruki, trostruki, ...

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \ldots$$

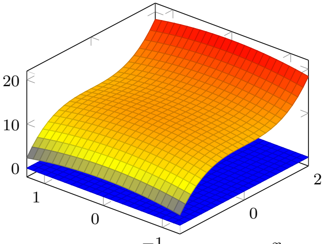
- Krivuljni integrali
  1. Prve vrste $\int_\gamma f(x,y,\ldots)\,\mathrm{d}s$
  2. Druge vrste $\int_\gamma F_1(x,y,\ldots)\,\mathrm{d}x + F_2(x,y,\ldots)\,\mathrm{d}y + \ldots$

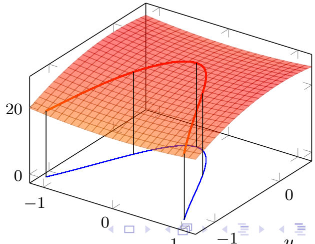
Tri poopćenja integrala na funkcije više varijabli

- Višestruki integrali — dvostruki, trostruki, ...

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \ldots$$

- Krivuljni integrali
  1. Prve vrste $\displaystyle\int_\gamma f(x,y,\ldots)\,\mathrm{d}s$
  2. Druge vrste $\displaystyle\int_\gamma F_1(x,y,\ldots)\,\mathrm{d}x + F_2(x,y,\ldots)\,\mathrm{d}y + \ldots$





Dvostruki i trostruki integrali

- Primjene: Računanje površina i volumena, prosječne vrijednosti funkcije, vjerojatnost, ...

Dvostruki i trostruki integrali

- Primjene: Računanje površina i volumena, prosječne vrijednosti funkcije, vjerojatnost, ...
- Fubinijev teorem

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)$$

Dvostruki i trostruki integrali

- Primjene: Računanje površina i volumena, prosječne vrijednosti funkcije, vjerojatnost, ...
- Fubinijev teorem

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)$$

Zadatak

Izračunajte $\displaystyle\iint\limits_{[-1,2]\times[0,1]} x \exp(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Dvostruki i trostruki integrali

- Primjene: Računanje površina i volumena, prosječne vrijednosti funkcije, vjerojatnost, ...
- Fubinijev teorem

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)$$

Zadatak

Izračunajte $\displaystyle\iint\limits_{[-1,2]\times[0,1]} x\exp(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Zadatak

Dokažite da je

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x)g(y)h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right)\cdot\left(\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y \right)\cdot\left(\int_p^q h(z)\,\mathrm{d}z \right).$$

- Ako je područje integriranja A omeđeno pravcima $x = a$, $x = b$ i grafovima funkcija $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$, onda je

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

  a ako je A omeđeno pravcima $y = c$, $y = d$ i grafovima funkcija $x = g_1(y)$ i $x = g_2(y)$, onda je

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

- Dvostruki integral po skupu površine nula i trostruki integral po skupu volumena nula iznosi nula — to je poopćenje kojeg svojstva jednostrukih integrala?

- Ako je područje integriranja A omeđeno pravcima $x = a$, $x = b$ i grafovima funkcija $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$, onda je

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

a ako je A omeđeno pravcima $y = c$, $y = d$ i grafovima funkcija $x = g_1(y)$ i $x = g_2(y)$, onda je

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

- Dvostruki integral po skupu površine nula i trostruki integral po skupu volumena nula iznosi nula — to je poopćenje kojeg svojstva jednostrukih integrala?
- Zamjena varijabli:

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_A f(x',y') \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')} \right| \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'.$$

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x, y, z) = x + 2y + \exp(z)$ *po jediničnoj sferi sa središtem u ishodištu.*

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x, y, z) = x + 2y + \exp(z)$ *po jediničnoj sferi sa središtem u ishodištu.*

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x, y) = \exp(x/y)$ *po dijelu ravnine omeđenom pravcima* $y = 2$, $y = x$ *i grafom funkcije* $y = \sqrt[3]{x}$.

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x,y,z) = x + 2y + \exp(z)$ *po jediničnoj sferi sa središtem u ishodištu.*

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x,y) = \exp(x/y)$ *po dijelu ravnine omeđenom pravcima* $y = 2$, $y = x$ *i grafom funkcije* $y = \sqrt[3]{x}$.

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x,y) = 2xy$ *po kružnom prstenu između kružnica polumjera* 2 *i* 4 *sa središtem u ishodištu.*

Krivulja

- Krivulja je

Krivulja

- Krivulja je slika neprekidne funkcije $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Kad ćemo reći da je krivulja u skupu D?

Krivulja

- Krivulja je slika neprekidne funkcije $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Kad ćemo reći da je krivulja u skupu D?
- Što je to početak krivulje? Kraj krivulje? Kad kažemo da je krivulja zatvorena?

Krivulja

- Krivulja je slika neprekidne funkcije $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Kad ćemo reći da je krivulja u skupu D?
- Što je to početak krivulje? Kraj krivulje? Kad kažemo da je krivulja zatvorena?
- Kako se računa duljina krivulje? Što je tangencijalni vektor krivulje?

Krivulja

- Krivulja je slika neprekidne funkcije $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Kad ćemo reći da je krivulja u skupu D?
- Što je to početak krivulje? Kraj krivulje? Kad kažemo da je krivulja zatvorena?
- Kako se računa duljina krivulje? Što je tangencijalni vektor krivulje?
- Za krivulje u trodimenzionalnom prostoru, kako se definira normalna ravnina?

Krivulja

- Krivulja je slika neprekidne funkcije $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Kad ćemo reći da je krivulja u skupu D?
- Što je to početak krivulje? Kraj krivulje? Kad kažemo da je krivulja zatvorena?
- Kako se računa duljina krivulje? Što je tangencijalni vektor krivulje?
- Za krivulje u trodimenzionalnom prostoru, kako se definira normalna ravnina?
- Kako obrnuti orijentaciju krivulje γ?

Krivulja

- Krivulja je slika neprekidne funkcije $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Kad ćemo reći da je krivulja u skupu D?
- Što je to početak krivulje? Kraj krivulje? Kad kažemo da je krivulja zatvorena?
- Kako se računa duljina krivulje? Što je tangencijalni vektor krivulje?
- Za krivulje u trodimenzionalnom prostoru, kako se definira normalna ravnina?
- Kako obrnuti orijentaciju krivulje γ?
- Kako spajamo krivulje?

Krivulja

- Krivulja je slika neprekidne funkcije $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Kad ćemo reći da je krivulja u skupu D?
- Što je to početak krivulje? Kraj krivulje? Kad kažemo da je krivulja zatvorena?
- Kako se računa duljina krivulje? Što je tangencijalni vektor krivulje?
- Za krivulje u trodimenzionalnom prostoru, kako se definira normalna ravnina?
- Kako obrnuti orijentaciju krivulje γ?
- Kako spajamo krivulje?
- Koja je termodinamička interpretacija krivulja?

Krivulja

- Krivulja je slika neprekidne funkcije $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Kad ćemo reći da je krivulja u skupu D?
- Što je to početak krivulje? Kraj krivulje? Kad kažemo da je krivulja zatvorena?
- Kako se računa duljina krivulje? Što je tangencijalni vektor krivulje?
- Za krivulje u trodimenzionalnom prostoru, kako se definira normalna ravnina?
- Kako obrnuti orijentaciju krivulje γ?
- Kako spajamo krivulje?
- Koja je termodinamička interpretacija krivulja?

Zadatak

Je li krivulja zadana s $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$ zatvorena? Obrnite joj orijentaciju i odredite tangencijalni vektor i normalnu ravninu u točki $\gamma(1/2)$.

Krivuljni integrali prve i druge vrste

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\gamma F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\,\mathrm{d}x_n = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,\mathrm{d}t$$

Krivuljni integrali prve i druge vrste

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)|| \, \mathrm{d}t$$

$$\int_\gamma F_1 \, \mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n \, \mathrm{d}x_n = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, \mathrm{d}t$$

- Utječe li orijentacija krivulje na iznos krivuljnog integrala?

Krivuljni integrali prve i druge vrste

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\gamma F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\,\mathrm{d}x_n = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,\mathrm{d}t$$

- Utječe li orijentacija krivulje na iznos krivuljnog integrala?
- Kako se integrira po uniji dviju krivulja?

Krivuljni integrali prve i druge vrste

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)|| \, dt$$

$$\int_\gamma F_1 \, dx_1 + \ldots + F_n \, dx_n = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

- Utječe li orijentacija krivulje na iznos krivuljnog integrala?
- Kako se integrira po uniji dviju krivulja?
- Koje su glavne primjene krivuljnih integrala?
- Je li $\oint$ uvijek jednak nuli?

Krivuljni integrali prve i druge vrste

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\gamma F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\,\mathrm{d}x_n = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,\mathrm{d}t$$

- Utječe li orijentacija krivulje na iznos krivuljnog integrala?
- Kako se integrira po uniji dviju krivulja?
- Koje su glavne primjene krivuljnih integrala?
- Je li $\oint$ uvijek jednak nuli?
- $$F = \nabla f \Rightarrow \int_\gamma F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\,\mathrm{d}x_n = f(B) - f(A)$$

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x,y) = 4x^3$ *od* $A = (-2,-1)$ *do* $B = (1,2)$ *koje su spojene unijom dužina* $\overline{AO}$ *i* $\overline{OB}$.

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x, y) = 4x^3$ *od* $A = (-2, -1)$ *do* $B = (1, 2)$ *koje su spojene unijom dužina* $\overline{AO}$ *i* $\overline{OB}$.

Zadatak

Izračunajte integral vektorskog polja $F(x, y, z) = (8x^2yz, 5z, -4xy)$ *po krivulji* $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

Zadatak

Izračunajte integral funkcije $f(x,y) = 4x^3$ *od* $A = (-2,-1)$ *do* $B = (1,2)$ *koje su spojene unijom dužina* $\overline{AO}$ *i* $\overline{OB}$.

Zadatak

Izračunajte integral vektorskog polja $F(x,y,z) = (8x^2yz, 5z, -4xy)$ *po krivulji* $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

Zadatak

Izračunajte integral od $\nabla f(x,y,z)$, *gdjeje* $f(x,y,z) = \cos(\pi x) + \sin(\pi y) - xyz$, *po helikoidi* $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3t)$, $-\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.