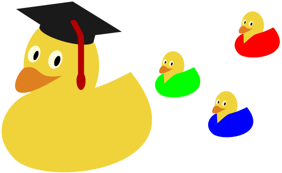
2. predavanje: Gaußova metoda eliminacija.

Franka Miriam Brückler



Ponovimo: Što je to linearna jednadžba s n nepoznanica?

Ponovimo: Što je to linearna jednadžba s n nepoznanica? Što je njeno rješenje?

Ponovimo: Što je to linearna jednadžba s n nepoznanica? Što je njeno rješenje? Što je sustav linearnih jednadžbi?

Ponovimo: Što je to linearna jednadžba s n nepoznanica? Što je njeno rješenje? Što je sustav linearnih jednadžbi? Što je rješenje sustava?

Ponovimo: Što je to linearna jednadžba s n nepoznanica? Što je njeno rješenje? Što je sustav linearnih jednadžbi? Što je rješenje sustava? Postoji li sustav linearnih jednadžbi s točno 3 rješenja?

Ponovimo: Što je to linearna jednadžba s n nepoznanica? Što je njeno rješenje? Što je sustav linearnih jednadžbi? Što je rješenje sustava? Postoji li sustav linearnih jednadžbi s točno 3 rješenja? Odgovorite i argumentirajte odgovore:

- Utječe li promjena poretka jednadžbi na rješenje sustava linearnih jednadžbi?
- A množenje/dijeljenje jednadžbe brojem?
- Ako zbrojimo dvije jednadžbe i jednu od njih zamijenimo tim zbrojem, utječe li to na rješenje sustava?

Ponovimo: Što je to linearna jednadžba s n nepoznanica? Što je njeno rješenje? Što je sustav linearnih jednadžbi? Što je rješenje sustava? Postoji li sustav linearnih jednadžbi s točno 3 rješenja? Odgovorite i argumentirajte odgovore:

- Utječe li promjena poretka jednadžbi na rješenje sustava linearnih jednadžbi?
- A množenje/dijeljenje jednadžbe brojem?
- Ako zbrojimo dvije jednadžbe i jednu od njih zamijenimo tim zbrojem, utječe li to na rješenje sustava?

Dogovor: Uredno zapisan sustav linearnih jednadžbi je onaj u kojem su sve nepoznanice na lijevim stranama jednakosti, slobodni članovi na desnim, a na lijevoj strani su istoimene nepoznanice potpisane jedna ispod druge.

Ponovimo: Što je to linearna jednadžba s n nepoznanica? Što je njeno rješenje? Što je sustav linearnih jednadžbi? Što je rješenje sustava? Postoji li sustav linearnih jednadžbi s točno 3 rješenja? Odgovorite i argumentirajte odgovore:

- Utječe li promjena poretka jednadžbi na rješenje sustava linearnih jednadžbi?
- A množenje/dijeljenje jednadžbe brojem?
- Ako zbrojimo dvije jednadžbe i jednu od njih zamijenimo tim zbrojem, utječe li to na rješenje sustava?

Dogovor: Uredno zapisan sustav linearnih jednadžbi je onaj u kojem su sve nepoznanice na lijevim stranama jednakosti, slobodni članovi na desnim, a na lijevoj strani su istoimene nepoznanice potpisane jedna ispod druge. Uvodimo sljedeće oznake:

- koeficijent uz j-tu nepoznanicu u i-toj po redu jednadžbi označavamo s a_{ij};
- slobodni član u i-toj po redu jednadžbi označavamo s b_i;
- broj jednadžbi označavamo s m, a broj nepoznanica s n.

Matrica sustava linearnih jednadžbi

Zadatak

Zapišite matricu sustava

$$2x + y = 2, \quad -x + 2z = -6, \quad 2y - 4z = 4.$$

Matrica sustava linearnih jednadžbi

Zadatak

Zapišite matricu sustava

$$2x + y = 2, \quad -x + 2z = -6, \quad 2y - 4z = 4.$$

Zadatak

Koje sustave predstavljaju matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

- Čemu odgovaraju retci, a čemu stupci matrice sustava? Što predstavlja okomita crta?
- Koliko redaka i stupaca ima matrica 3×7-sustava?

Od dviju matrica s prethodnog *slide*-a, koja odgovara sustavu kojeg je lakše riješiti? Zašto?

Od dviju matrica s prethodnog *slide*-a, koja odgovara sustavu kojeg je lakše riješiti? Zašto? Što je to dijagonala matrice sustava?

Od dviju matrica s prethodnog *slide*-a, koja odgovara sustavu kojeg je lakše riješiti? Zašto? Što je to dijagonala matrice sustava? Bi li taj sustav bilo išta teže riješiti da su na dijagonali brojevi 4, 7 i 11 umjesto jedinica?

Od dviju matrica s prethodnog *slide*-a, koja odgovara sustavu kojeg je lakše riješiti? Zašto? Što je to dijagonala matrice sustava? Bi li taj sustav bilo išta teže riješiti da su na dijagonali brojevi 4, 7 i 11 umjesto jedinica?

Dakle, rado bismo sustav koji rješavamo, odnosno njegovu matricu, preveli u oblik:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & & & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & & = & b_2 \\ \vdots & & & = & \vdots \\ & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & b_1/a_{11} \\ & x_2 & & = & b_2/a_{22} \\ \vdots & & & = & \vdots \\ & & x_n & = & b_n/a_{nn} \end{array}\right.$$

Elementarne transformacije po retcima

Nabrojite ih (i to u formulaciji za sustave i u formulaciji za matrice sustava)!

Elementarne transformacije po retcima

Nabrojite ih (i to u formulaciji za sustave i u formulaciji za matrice sustava)!

- Zašto pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi ne smijemo te iste operacije provoditi sa stupcima?

Elementarne transformacije po retcima

Nabrojite ih (i to u formulaciji za sustave i u formulaciji za matrice sustava)!

- Zašto pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi ne smijemo te iste operacije provoditi sa stupcima?
- Je li dozvoljeno međusobno oduzimati retke matrice sustava? A množiti?

Elementarne transformacije po retcima

Nabrojite ih (i to u formulaciji za sustave i u formulaciji za matrice sustava)!

- Zašto pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi ne smijemo te iste operacije provoditi sa stupcima?
- Je li dozvoljeno međusobno oduzimati retke matrice sustava? A množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0?

Elementarne transformacije po retcima

Nabrojite ih (i to u formulaciji za sustave i u formulaciji za matrice sustava)!

- Zašto pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi ne smijemo te iste operacije provoditi sa stupcima?
- Je li dozvoljeno međusobno oduzimati retke matrice sustava? A množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom?

Elementarne transformacije po retcima

Nabrojite ih (i to u formulaciji za sustave i u formulaciji za matrice sustava)!

- Zašto pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi ne smijemo te iste operacije provoditi sa stupcima?
- Je li dozvoljeno međusobno oduzimati retke matrice sustava? A množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome?

Elementarne transformacije po retcima

Nabrojite ih (i to u formulaciji za sustave i u formulaciji za matrice sustava)!

- Zašto pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi ne smijemo te iste operacije provoditi sa stupcima?
- Je li dozvoljeno međusobno oduzimati retke matrice sustava? A množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome?
- Zašto kad primjenjujemo elementarne transformacije između dviju uzastopnih matrica ne pišemo $=$, nego $\sim$?

Elementarne transformacije po retcima

Nabrojite ih (i to u formulaciji za sustave i u formulaciji za matrice sustava)!

- Zašto pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi ne smijemo te iste operacije provoditi sa stupcima?
- Je li dozvoljeno međusobno oduzimati retke matrice sustava? A množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome?
- Zašto kad primjenjujemo elementarne transformacije između dviju uzastopnih matrica ne pišemo $=$, nego $\sim$?
- Što ako koristeći elementarne transformacije naiđemo na redak u kojem su svi brojevi nula?

Elementarne transformacije po retcima

Nabrojite ih (i to u formulaciji za sustave i u formulaciji za matrice sustava)!

- Zašto pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi ne smijemo te iste operacije provoditi sa stupcima?
- Je li dozvoljeno međusobno oduzimati retke matrice sustava? A množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome?
- Zašto kad primjenjujemo elementarne transformacije između dviju uzastopnih matrica ne pišemo $=$, nego $\sim$?
- Što ako koristeći elementarne transformacije naiđemo na redak u kojem su svi brojevi nula? A ako naiđemo na stupac u kojemu su svi brojevi nula?

Elementarne transformacije po retcima

Nabrojite ih (i to u formulaciji za sustave i u formulaciji za matrice sustava)!

- Zašto pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi ne smijemo te iste operacije provoditi sa stupcima?
- Je li dozvoljeno međusobno oduzimati retke matrice sustava? A množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome?
- Zašto kad primjenjujemo elementarne transformacije između dviju uzastopnih matrica ne pišemo $=$, nego $\sim$?
- Što ako koristeći elementarne transformacije naiđemo na redak u kojem su svi brojevi nula? A ako naiđemo na stupac u kojemu su svi brojevi nula? A ako naiđemo na redak u kojemu su svi brojevi osim zadnjega (desno od crte) nula?

Sustavi linearnih jednadžbi s jedinstvenim rješenjem

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & X_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & X_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & X_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

U ovom slučaju rješenje polaznog sustava je n-torka $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Može li sustav s manje jednadžbi nego nepoznanica imati jedinstveno rješenje?

Sustavi linearnih jednadžbi s jedinstvenim rješenjem

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & X_2 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & X_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & X_n \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right).$$

U ovom slučaju rješenje polaznog sustava je n-torka $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Može li sustav s manje jednadžbi nego nepoznanica imati jedinstveno rješenje? Što je Cramerov sustav? Možemo li odmah po zadavanju znati je li sustav Cramerov?

Sustavi linearnih jednadžbi bez rješenja

U nekom trenutku primjene elementarnih transfomacija po retcima dobijemo redak oblika

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & \spadesuit \end{array}\right)$$

s $\spadesuit \neq 0$.

Sustavi linearnih jednadžbi bez rješenja

U nekom trenutku primjene elementarnih transfomacija po retcima dobijemo redak oblika

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \spadesuit \end{array}\right)$$

s $\spadesuit \neq 0$.

Znate li neki tip sustava za kojeg već i prije rješavanja znate da sigurno ima bar jedno rješenje?

Sustavi linearnih jednadžbi bez rješenja

U nekom trenutku primjene elementarnih transfomacija po retcima dobijemo redak oblika

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \spadesuit \end{array}\right)$$

s $\spadesuit \neq 0$.
Znate li neki tip sustava za kojeg već i prije rješavanja znate da sigurno ima bar jedno rješenje? Homogeni sustavi uvijek imaju bar jedno rješenje: trivijalno rješenje $(0, 0, \dots, 0)$.

Sustavi linearnih jednadžbi bez rješenja

U nekom trenutku primjene elementarnih transfomacija po retcima dobijemo redak oblika

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \spadesuit \end{array}\right)$$

s $\spadesuit \neq 0$.
Znate li neki tip sustava za kojeg već i prije rješavanja znate da sigurno ima bar jedno rješenje? Homogeni sustavi uvijek imaju bar jedno rješenje: trivijalno rješenje $(0, 0, \dots, 0)$.

Napomena

Iako time mijenjamo broj jednadžbi sustava, ali ne i njegova rješenja, dozvolit ćemo brisanje nulredaka iz matrice sustava.

Sustavi linearnih jednadžbi s beskonačno mnogo rješenja

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_2 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_k \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Koliki je maksimalni broj umetnutih stupaca za 5×6-sustav? Za 4×3-sustav?

Gaußova metoda eliminacija

1. Uzmi sljedeći po redu (i-ti) stupac. Ako je ovo početni korak, uzmi prvi stupac ($i = 1$). Ako bi trebalo uzeti stupac slobodnih članova, STOP — gotovo je.
2. Ako je na dijagonalnoj poziciji (i, i) nula, zamjenom i-tog retka s nekim retkom *ispod* njega dovedi broj različit od nule na tu poziciju. Ako to ne možeš postići, STOP — gotovo je.
3. Pomoću „ključnog elementa" (broja na poziciji (i, i)) poništi ostatak stupca: Svakom retku u kojem iznad/ispod ključnog elementa nije nula, dodaj odgovarajući višekratnik i-tog retka.
4. Ukoliko si dobio kontradiktornu jednadžbu, STOP — sustav nema rješenja.
5. Ukoliko si dobio nulredak, možeš ga pobrisati iz matrice sustava.
6. Vrati se na prvi korak.

Zadatak

Gaußovom metodom eliminacija riješite sustav.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1$$

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 7$$

Zadatak

Gaußovom metodom eliminacija riješite sustav.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1$$

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 7$$

Zadatak

Gaußovom metodom eliminacija riješite zadatak drugog slide-a.

Zadatak

Gaußovom metodom eliminacija riješite sustav.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1$$

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 7$$

Zadatak

Gaußovom metodom eliminacija riješite zadatak drugog slide-a.

Primjer

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) ?!$$

$$(1)\ \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\ {}_{+(-5/3)\cdot I.} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & -38/3 \end{array}\right)$$

(1) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +(-5/3)\cdot I. \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & -38/3 \end{array}\right)$$

ili

(2) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} :6 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1/3 & -1/6 & 7/6 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -10I. \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1/3 & -1/6 & 7/6 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & -38/3 \end{array}\right)$$

$$(1)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \ {}_{+(-5/3)\cdot I.} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & -38/3 \end{array}\right)$$

ili

$$(2)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \ {}^{:6} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & -1/6 & 7/6 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \ {}_{-10I.}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & -1/6 & 7/6 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & -38/3 \end{array}\right)$$

ili

$$(3)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 10 & -5 & 35 \\ 30 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \ {}_{-I.} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 10 & -5 & 35 \\ 0 & -7 & 5 & -38 \end{array}\right)$$