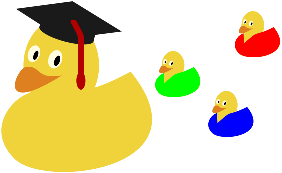
5. predavanje: Unitarni prostori

Franka Miriam Brückler



- Uz zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom koje su još algebarske operacije definirane u vektorskim prostorima geometrijskih vektora?

- Uz zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom koje su još algebarske operacije definirane u vektorskim prostorima geometrijskih vektora? Kako je definiran skalarni produkt geometrijskih vektora? Koja su mu svojstva?

- Uz zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom koje su još algebarske operacije definirane u vektorskim prostorima geometrijskih vektora? Kako je definiran skalarni produkt geometrijskih vektora? Koja su mu svojstva?
- Definirajte unitarne prostore.

- Uz zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom koje su još algebarske operacije definirane u vektorskim prostorima geometrijskih vektora? Kako je definiran skalarni produkt geometrijskih vektora? Koja su mu svojstva?
- Definirajte unitarne prostore. Koja je razlika u definiciji svojstvima skalarnog produkta između realnih i kompleksnih unitarnih prostora?

- Uz zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom koje su još algebarske operacije definirane u vektorskim prostorima geometrijskih vektora? Kako je definiran skalarni produkt geometrijskih vektora? Koja su mu svojstva?
- Definirajte unitarne prostore. Koja je razlika u definiciji svojstvima skalarnog produkta između realnih i kompleksnih unitarnih prostora?
- Kako biste definirali skalarnih produkt na $\mathbb{R}^3$?

- Uz zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom koje su još algebarske operacije definirane u vektorskim prostorima geometrijskih vektora? Kako je definiran skalarni produkt geometrijskih vektora? Koja su mu svojstva?
- Definirajte unitarne prostore. Koja je razlika u definiciji svojstvima skalarnog produkta između realnih i kompleksnih unitarnih prostora?
- Kako biste definirali skalarnih produkt na $\mathbb{R}^3$? A na $\mathbb{C}^2$?

- Uz zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom koje su još algebarske operacije definirane u vektorskim prostorima geometrijskih vektora? Kako je definiran skalarni produkt geometrijskih vektora? Koja su mu svojstva?
- Definirajte unitarne prostore. Koja je razlika u definiciji svojstvima skalarnog produkta između realnih i kompleksnih unitarnih prostora?
- Kako biste definirali skalarnih produkt na $\mathbb{R}^3$? A na $\mathbb{C}^2$? A na $C([-\pi, \pi])$?

- Uz zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom koje su još algebarske operacije definirane u vektorskim prostorima geometrijskih vektora? Kako je definiran skalarni produkt geometrijskih vektora? Koja su mu svojstva?
- Definirajte unitarne prostore. Koja je razlika u definiciji svojstvima skalarnog produkta između realnih i kompleksnih unitarnih prostora?
- Kako biste definirali skalarnih produkt na $\mathbb{R}^3$? A na $\mathbb{C}^2$? A na $C([-\pi, \pi])$?

Standarni skalarni produkti

- Na V^2, $V^2(O)$, V^3, $V^3(O)$:
$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w} = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}| \cos \angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).$$
- Na $\mathbb{R}^n$:
$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$
- Na $\mathbb{C}^n$ kao kompleksnom prostoru:
$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \overline{x_1} y_1 + \ldots + \overline{x_n} y_n.$$
- Na $\mathcal{I}(I)$:
$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$
- Na vektorskom prostoru kompleksnih funkcija integrabilnih na skupu I:
$$\langle f, g \rangle = \int_I f^*(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Slika: Cone83@Wikipedia (CC BY-SA 4.0)

Godine 1843., irski matematičar sir William Rowan Hamilton, koji je ujedno prva osoba u povijesti koja je (1844., *On quaternions*) koristila izraze *skalar* i *vektor* u modernom smislu riječi, osmislio je poopćenje kompleksnih brojeva, **kvaternione**. To su brojevi oblika $q = x + y\,\mathrm{i} + z\,\mathrm{j} + w\,\mathrm{k}$, gdje su $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, a $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ tri imaginarne jedinice koje zadovoljavaju svojstva sa slike. Danas se primjerice koriste za opis spina elektrona (Paulijeve matrice spina).

- Dokažite da je skup svih kvaterniona $\mathbb{H}$ vektorski prostor.
- Kolika mu je dimenzija ako ga gledamo kao realni, a kolika ako ga gledamo kao kompleksni prostor? U oba slučaja nađite po jednu bazu za $\mathbb{H}$.
- Je li s obzirom na množenje kvaterniona $\mathbb{H}$ realni unitarni prostor?

Norma i ortogonalnost

- Kako u općem unitarnom prostoru definiramo normu vektora i ortogonalnost dva vektora? Koja svojstva iz prostorâ geometrijskih vektora smo time poopčili?

Norma i ortogonalnost

- Kako u općem unitarnom prostoru definiramo normu vektora i ortogonalnost dva vektora? Koja svojstva iz prostorâ geometrijskih vektora smo time poopćili?

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle},$$

$$v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0.$$

Zadatak

Izračunajte normu vektora $v = (1+i, 1-i) \in \mathbb{C}^2$ *(i za realni i za kompleksni slučaj) te normu vektora* $\exp \in C([0,1])$.

Norma i ortogonalnost

- Kako u općem unitarnom prostoru definiramo normu vektora i ortogonalnost dva vektora? Koja svojstva iz prostorâ geometrijskih vektora smo time poopčili?

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle},$$

$$v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0.$$

Zadatak

Izračunajte normu vektora $v = (1+i, 1-i) \in \mathbb{C}^2$ *(i za realni i za kompleksni slučaj) te normu vektora* $\exp \in C([0,1])$.

Zadatak

Nađite po jedan par međusobno ortogonalnih (nenul)vektora u $\mathbb{R}^4$ *i u* $C([-5,5])$.

Primjer

Vodikova 1s i 2s orbitala su valne funkcije

$$\psi_{1s} = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right), \ \psi_{2s} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{8\pi a_0^3}}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right).$$

Pokažimo da su one ortogonalne!

Primjer

Vodikova 1s i 2s orbitala su valne funkcije

$$\psi_{1s} = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right), \ \psi_{2s} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{8\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right).$$

Pokažimo da su one ortogonalne!

$$\int_0^{+\infty} 4\pi r^2 \psi_{1,0,0}(r)\psi_{2,0,0}(r)\,\mathrm{d}r = 0?$$

Primjer

Vodikova 1s i 2s orbitala su valne funkcije

$$\psi_{1s} = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right), \quad \psi_{2s} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{8\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right).$$

Pokažimo da su one ortogonalne!

$$\int_0^{+\infty} 4\pi r^2 \psi_{1,0,0}(r)\psi_{2,0,0}(r)\,\mathrm{d}r = 0?$$

$$\int_0^{+\infty} r^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{3r}{2a_0}\right)\,\mathrm{d}r =$$

$$2\int_0^{+\infty} r^2 \exp\left(-\frac{3r}{2a_0}\right)\,\mathrm{d}r - \frac{1}{a_0}\int_0^{+\infty} r^3 \exp\left(-\frac{3r}{2a_0}\right)\,\mathrm{d}r =$$

$$2\cdot\frac{2!}{(3/(2a_0))^3} - \frac{1}{a_0}\cdot\frac{3!}{(3/(2a_0))^4} = 0.$$

Ortogonalne i ortonorimirane baze

- Ako je $S \subseteq V$ (V unitaran) i ako su u S svaka dva vektora međusobno ortogonalna, onda je S

Ortogonalne i ortonorimirane baze

- Ako je $S \subseteq V$ (V unitaran) i ako su u S svaka dva vektora međusobno ortogonalna, onda je S linearno nezavisan.

Ortogonalne i ortonorimirane baze

- Ako je $S \subseteq V$ (V unitaran) i ako su u S svaka dva vektora međusobno ortogonalna, onda je S linearno nezavisan.
- Definirajte ortogonalne baze i ortonormirane baze!

Ortogonalne i ortonorimirane baze

- Ako je $S \subseteq V$ (V unitaran) i ako su u S svaka dva vektora međusobno ortogonalna, onda je S linearno nezavisan.
- Definirajte ortogonalne baze i ortonormirane baze!
- Definirajte ortogonalne matrice i unitarne matrice!

Ortogonalne i ortonorimirane baze

- Ako je $S \subseteq V$ (V unitaran) i ako su u S svaka dva vektora međusobno ortogonalna, onda je S linearno nezavisan.
- Definirajte ortogonalne baze i ortonormirane baze!
- Definirajte ortogonalne matrice i unitarne matrice!

Zadatak

Je li sljedeća matrica unitarna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Zadatak

Osmislite dva primjera ortogonalnih matrica u M_2.

Zadatak

Je li (a, b, c) *uz* $a = \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_3,\ b = -e_2,\ c = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_3$ *primjer ortonormirane baze za* $\mathbb{R}^3$*?*

Zadatak

Je li (a, b, c) *uz* $a = \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_3,\ b = -e_2,\ c = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_3$ *primjer ortonormirane baze za* $\mathbb{R}^3$*?*

Zadatak

Nađite ortogonalnu bazu za prostor rješenja sustava

$$x + y + z + w = 0,$$

$$x - y + z - 2w = 0,$$

$$x + 3y + z + 4w = 0.$$

Zadatak

Je li (a, b, c) *uz* $a = \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_3,\ b = -e_2,\ c = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_3$ *primjer ortonormirane baze za* $\mathbb{R}^3$*?*

Zadatak

Nađite ortogonalnu bazu za prostor rješenja sustava

$$x + y + z + w = 0,$$

$$x - y + z - 2w = 0,$$

$$x + 3y + z + 4w = 0.$$

Napomena

U unitarnim prostorima vrijedi nejednakost[a] $|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||$. *Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori* v *i* w *proporcionalni.*

[a]Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog.