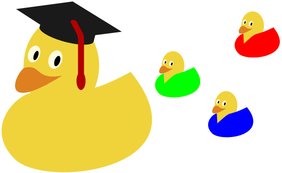
6. predavanje: Linearni operatori

Franka Miriam Brückler



Linearne funkcije s n varijabli i skaliranje

- Kako se definiraju linearne funkcije jedne varijable?

Linearne funkcije s n varijabli i skaliranje

- Kako se definiraju linearne funkcije jedne varijable?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a\,x \quad (a \in \mathbb{R}).$$

- Možemo li *isto* tako definirati linearnu funkciju na $\mathbb{R}^4$?

Linearne funkcije s n varijabli i skaliranje

- Kako se definiraju linearne funkcije jedne varijable?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a\,x \quad (a \in \mathbb{R}).$$

- Možemo li *isto* tako definirati linearnu funkciju na $\mathbb{R}^4$?

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle a, x \rangle \quad (a \in \mathbb{R}^4);$$

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) = a\,x \quad (a \in \mathbb{R})$$

Linearne funkcije s n varijabli i skaliranje

- Kako se definiraju linearne funkcije jedne varijable?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a\,x \quad (a \in \mathbb{R}).$$

- Možemo li *isto* tako definirati linearnu funkciju na $\mathbb{R}^4$?

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle a, x \rangle \quad (a \in \mathbb{R}^4);$$

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) = a\,x \quad (a \in \mathbb{R})$$

- Definirajte linearnu funkciju s 5 varijabli i dajte jedan primjer takve funkcije.

Linearne funkcije s n varijabli i skaliranje

- Kako se definiraju linearne funkcije jedne varijable?

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=a\,x\quad (a\in\mathbb{R}).$$

- Možemo li *isto* tako definirati linearnu funkciju na $\mathbb{R}^4$?

$$f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R},\quad f(x)=\langle a,x\rangle\quad (a\in\mathbb{R}^4);$$

$$f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4,\quad f(x)=a\,x\quad (a\in\mathbb{R})$$

- Definirajte linearnu funkciju s 5 varijabli i dajte jedan primjer takve funkcije.
- U kom smislu je svaka linearna jednadžba s n nepoznanica zapravo linearna jednadžba s jednom nepoznanicom? Objasnite na primjeru jednadžbe $x-2y+3z=4$.

Linearne funkcije s n varijabli i skaliranje

- Kako se definiraju linearne funkcije jedne varijable?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a\,x \quad (a \in \mathbb{R}).$$

- Možemo li *isto* tako definirati linearnu funkciju na $\mathbb{R}^4$?

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle a, x \rangle \quad (a \in \mathbb{R}^4);$$

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) = a\,x \quad (a \in \mathbb{R})$$

- Definirajte linearnu funkciju s 5 varijabli i dajte jedan primjer takve funkcije.
- U kom smislu je svaka linearna jednadžba s n nepoznanica zapravo linearna jednadžba s jednom nepoznanicom? Objasnite na primjeru jednadžbe $x - 2y + 3z = 4$.
- Dajte primjer skaliranja kao funkcije kojoj je domena $M_3(\mathbb{C})$.

Linearni operatori

- Gdje smo dosad sreli naziv „svojstvo linearnosti“?

Linearni operatori

- Gdje smo dosad sreli naziv „svojstvo linearnosti“?
- Ako je $f(x) = 2x$, koliko je $f(x + y)$ za $x, y \in V$ gdje je V bilo koji vektorski prostor?

Linearni operatori

- Gdje smo dosad sreli naziv ,,svojstvo linearnosti“?
- Ako je $f(x) = 2x$, koliko je $f(x+y)$ za $x, y \in V$ gdje je V bilo koji vektorski prostor?
- Ako je $f(x) = \langle (1,2,3), x \rangle$, koliko je $f(\alpha x)$ za $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$?

Linearni operatori

- Gdje smo dosad sreli naziv „svojstvo linearnosti"?
- Ako je $f(x) = 2x$, koliko je $f(x+y)$ za $x, y \in V$ gdje je V bilo koji vektorski prostor?
- Ako je $f(x) = \langle (1,2,3), x \rangle$, koliko je $f(\alpha x)$ za $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$?
- Ako je M zrcaljenje u $V^2(O)$ s obzirom na neku os koja prolazi kroz O, što možete reći od $M(\vec{v} + \vec{w})$ i $M(x\,\vec{v})$?

Linearni operatori

- Gdje smo dosad sreli naziv „svojstvo linearnosti“?
- Ako je $f(x) = 2x$, koliko je $f(x + y)$ za $x, y \in V$ gdje je V bilo koji vektorski prostor?
- Ako je $f(x) = \langle (1, 2, 3), x \rangle$, koliko je $f(\alpha\, x)$ za $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$?
- Ako je M zrcaljenje u $V^2(O)$ s obzirom na neku os koja prolazi kroz O, što možete reći od $M(\vec{v} + \vec{w})$ i $M(x\, \vec{v})$?
- Definirajte, riječima i formalno, pojam linearnog operatora!

Linearni operatori

- Gdje smo dosad sreli naziv ,,svojstvo linearnosti“?
- Ako je $f(x) = 2x$, koliko je $f(x + y)$ za $x, y \in V$ gdje je V bilo koji vektorski prostor?
- Ako je $f(x) = \langle(1, 2, 3), x\rangle$, koliko je $f(\alpha\, x)$ za $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$?
- Ako je M zrcaljenje u $V^2(O)$ s obzirom na neku os koja prolazi kroz O, što možete reći od $M(\vec{v} + \vec{w})$ i $M(x\,\vec{v})$?
- Definirajte, riječima i formalno, pojam linearnog operatora!
- Može li domena linearnog operatora biti kompleksan, a kodomena realan prostor? Zašto?

Linearni operatori

- Gdje smo dosad sreli naziv „svojstvo linearnosti"?
- Ako je $f(x) = 2x$, koliko je $f(x+y)$ za $x, y \in V$ gdje je V bilo koji vektorski prostor?
- Ako je $f(x) = \langle (1,2,3), x \rangle$, koliko je $f(\alpha\, x)$ za $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$?
- Ako je M zrcaljenje u $V^2(O)$ s obzirom na neku os koja prolazi kroz O, što možete reći od $M(\vec{v} + \vec{w})$ i $M(x\, \vec{v})$?
- Definirajte, riječima i formalno, pojam linearnog operatora!
- Može li domena linearnog operatora biti kompleksan, a kodomena realan prostor? Zašto?
- Kako nazivamo linearne operatore kojima je kodomena $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$?

Linearni operatori

- Gdje smo dosad sreli naziv „svojstvo linearnosti“?
- Ako je $f(x) = 2x$, koliko je $f(x+y)$ za $x, y \in V$ gdje je V bilo koji vektorski prostor?
- Ako je $f(x) = \langle (1,2,3), x \rangle$, koliko je $f(\alpha x)$ za $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$?
- Ako je M zrcaljenje u $V^2(O)$ s obzirom na neku os koja prolazi kroz O, što možete reći od $M(\vec{v} + \vec{w})$ i $M(x\,\vec{v})$?
- Definirajte, riječima i formalno, pojam linearnog operatora!
- Može li domena linearnog operatora biti kompleksan, a kodomena realan prostor? Zašto?
- Kako nazivamo linearne operatore kojima je kodomena $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$?
- Dokažite da je $\mathrm{tr} : M_2 \to \mathbb{R}$ primjer linearnog funkcionala!

Linearni operatori

- Gdje smo dosad sreli naziv ,,svojstvo linearnosti"?
- Ako je $f(x) = 2x$, koliko je $f(x + y)$ za $x, y \in V$ gdje je V bilo koji vektorski prostor?
- Ako je $f(x) = \langle (1, 2, 3), x \rangle$, koliko je $f(\alpha x)$ za $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$?
- Ako je M zrcaljenje u $V^2(O)$ s obzirom na neku os koja prolazi kroz O, što možete reći od $M(\vec{v} + \vec{w})$ i $M(x\,\vec{v})$?
- Definirajte, riječima i formalno, pojam linearnog operatora!
- Može li domena linearnog operatora biti kompleksan, a kodomena realan prostor? Zašto?
- Kako nazivamo linearne operatore kojima je kodomena $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$?
- Dokažite da je $\mathrm{tr} : M_2 \to \mathbb{R}$ primjer linearnog funkcionala!
- Je li ln primjer linearnog funkcionala na $\mathbb{R}$? Zašto?

Svojstva i primjeri linearnih operatora

$$\hat{A} : V \to W, \quad \hat{A}(\alpha\, v + \beta\, w) = \alpha\, \hat{A} v + \beta \hat{A} w$$

- Za koje domene i kodomene i kako su definirani jedinični operator $\hat{I}$ i nuloperator $\hat{0}$?
- Operator skaliranja sa skalarom α: $\hat{S}_\alpha : V \to V$, $\hat{S}_\alpha v = \alpha v$ je linearan operator. Dokažite!

Svojstva i primjeri linearnih operatora

$$\hat{A} : V \to W, \quad \hat{A}(\alpha\, v + \beta\, w) = \alpha\, \hat{A}v + \beta \hat{A}w$$

- Za koje domene i kodomene i kako su definirani jedinični operator $\hat{I}$ i nuloperator $\hat{0}$?
- Operator skaliranja sa skalarom α: $\hat{S}_\alpha : V \to V$, $\hat{S}_\alpha v = \alpha v$ je linearan operator. Dokažite!
- Jesu li afine funkcije primjeri linearnih operatora na $\mathbb{R}$? Dokažite!

Svojstva i primjeri linearnih operatora

$$\hat{A} : V \to W, \quad \hat{A}(\alpha\, v + \beta\, w) = \alpha\, \hat{A}v + \beta \hat{A}w$$

- Za koje domene i kodomene i kako su definirani jedinični operator $\hat{I}$ i nuloperator $\hat{0}$?
- Operator skaliranja sa skalarom α: $\hat{S}_\alpha : V \to V$, $\hat{S}_\alpha v = \alpha v$ je linearan operator. Dokažite!
- Jesu li afine funkcije primjeri linearnih operatora na $\mathbb{R}$? Dokažite!
- Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator, što možemo dobiti kao $\hat{A}\mathbf{0}_V$? Dokažite!

Svojstva i primjeri linearnih operatora

$$\hat{A} : V \to W, \quad \hat{A}(\alpha\, v + \beta\, w) = \alpha\, \hat{A} v + \beta \hat{A} w$$

- Za koje domene i kodomene i kako su definirani jedinični operator $\hat{I}$ i nuloperator $\hat{0}$?
- Operator skaliranja sa skalarom α: $\hat{S}_\alpha : V \to V$, $\hat{S}_\alpha v = \alpha v$ je linearan operator. Dokažite!
- Jesu li afine funkcije primjeri linearnih operatora na $\mathbb{R}$? Dokažite!
- Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator, što možemo dobiti kao $\hat{A}\mathbf{0}_V$? Dokažite!
- Je li svaka funkcija između dva vektorska prostora koja preslikava nulvektor u nulvektor linearni operator? Dokažite!

Svojstva i primjeri linearnih operatora

$$\hat{A} : V \to W, \quad \hat{A}(\alpha\, v + \beta\, w) = \alpha\, \hat{A}v + \beta \hat{A}w$$

- Za koje domene i kodomene i kako su definirani jedinični operator $\hat{I}$ i nuloperator $\hat{0}$?
- Operator skaliranja sa skalarom α: $\hat{S}_\alpha : V \to V$, $\hat{S}_\alpha v = \alpha v$ je linearan operator. Dokažite!
- Jesu li afine funkcije primjeri linearnih operatora na $\mathbb{R}$? Dokažite!
- Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator, što možemo dobiti kao $\hat{A}\mathbf{0}_V$? Dokažite!
- Je li svaka funkcija između dva vektorska prostora koja preslikava nulvektor u nulvektor linearni operator? Dokažite!
- Što je $\hat{S}_\pi \circ \hat{S}_e : M_2 \to M_2$?

Svojstva i primjeri linearnih operatora

$$\hat{A} : V \to W, \quad \hat{A}(\alpha\, v + \beta\, w) = \alpha\, \hat{A}v + \beta \hat{A}w$$

- Za koje domene i kodomene i kako su definirani jedinični operator $\hat{I}$ i nuloperator $\hat{0}$?
- Operator skaliranja sa skalarom α: $\hat{S}_\alpha : V \to V$, $\hat{S}_\alpha v = \alpha v$ je linearan operator. Dokažite!
- Jesu li afine funkcije primjeri linearnih operatora na $\mathbb{R}$? Dokažite!
- Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator, što možemo dobiti kao $\hat{A}\mathbf{0}_V$? Dokažite!
- Je li svaka funkcija između dva vektorska prostora koja preslikava nulvektor u nulvektor linearni operator? Dokažite!
- Što je $\hat{S}_\pi \circ \hat{S}_e : M_2 \to M_2$? Kompozicija linearnih operatora je uvijek kad ima smisla

Svojstva i primjeri linearnih operatora

$$\hat{A} : V \to W, \quad \hat{A}(\alpha\, v + \beta\, w) = \alpha\, \hat{A}v + \beta \hat{A}w$$

- Za koje domene i kodomene i kako su definirani jedinični operator $\hat{I}$ i nuloperator $\hat{0}$?
- Operator skaliranja sa skalarom α: $\hat{S}_\alpha : V \to V$, $\hat{S}_\alpha v = \alpha v$ je linearan operator. Dokažite!
- Jesu li afine funkcije primjeri linearnih operatora na $\mathbb{R}$? Dokažite!
- Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator, što možemo dobiti kao $\hat{A}\mathbf{0}_V$? Dokažite!
- Je li svaka funkcija između dva vektorska prostora koja preslikava nulvektor u nulvektor linearni operator? Dokažite!
- Što je $\hat{S}_\pi \circ \hat{S}_e : M_2 \to M_2$? Kompozicija linearnih operatora je uvijek kad ima smisla linearan operator.

Operatori simetrije

- Definirajte ortogonalne operatore i unitarne operatore.

Operatori simetrije

- Definirajte ortogonalne operatore i unitarne operatore. U kom slučaju linearan operator nazivamo operatorom simetrije?

Operatori simetrije

- Definirajte ortogonalne operatore i unitarne operatore. U kom slučaju linearan operator nazivamo operatorom simetrije?
- Neka je $\hat{A}: V_3(O) \to V_3(O)$ bilo kakav linearan operator i $\vec{a} \neq \vec{0}$ neki fiksni vektor. Neka je $V = \{x\,\vec{a} : x \in \mathbb{R}\}$. Je li V samo podskup ili i potprostor od $V^3(O)$?

Operatori simetrije

- Definirajte ortogonalne operatore i unitarne operatore. U kom slučaju linearan operator nazivamo operatorom simetrije?
- Neka je $\hat{A} : V_3(O) \to V_3(O)$ bilo kakav linearan operator i $\vec{a} \neq \vec{0}$ neki fiksni vektor. Neka je $V = \{x\,\vec{a} : x \in \mathbb{R}\}$. Je li V samo podskup ili i potprostor od $V^3(O)$? Kako V geometrijski izgleda?

Operatori simetrije

- Definirajte ortogonalne operatore i unitarne operatore. U kom slučaju linearan operator nazivamo operatorom simetrije?
- Neka je $\hat{A} : V_3(O) \to V_3(O)$ bilo kakav linearan operator i $\vec{a} \neq \vec{0}$ neki fiksni vektor. Neka je $V = \{x\,\vec{a} : x \in \mathbb{R}\}$. Je li V samo podskup ili i potprostor od $V^3(O)$? Kako V geometrijski izgleda? Koje su moguće slike $\hat{A}(V)$?

Operatori simetrije

- Definirajte ortogonalne operatore i unitarne operatore. U kom slučaju linearan operator nazivamo operatorom simetrije?
- Neka je $\hat{A} : V_3(O) \to V_3(O)$ bilo kakav linearan operator i $\vec{a} \neq \vec{0}$ neki fiksni vektor. Neka je $V = \{x\,\vec{a} : x \in \mathbb{R}\}$. Je li V samo podskup ili i potprostor od $V^3(O)$? Kako V geometrijski izgleda? Koje su moguće slike $\hat{A}(V)$? Ako je $\hat{A}$ operator simetrije, može li $\hat{A}(V)$ biti $\{\vec{0}\}$?

Operatori simetrije

- Definirajte ortogonalne operatore i unitarne operatore. U kom slučaju linearan operator nazivamo operatorom simetrije?
- Neka je $\hat{A} : V_3(O) \to V_3(O)$ bilo kakav linearan operator i $\vec{a} \neq \vec{0}$ neki fiksni vektor. Neka je $V = \{x\,\vec{a} : x \in \mathbb{R}\}$. Je li V samo podskup ili i potprostor od $V^3(O)$? Kako V geometrijski izgleda? Koje su moguće slike $\hat{A}(V)$? Ako je $\hat{A}$ operator simetrije, može li $\hat{A}(V)$ biti $\{\vec{0}\}$?
- Linearni operatori kojima je domena i kodomena jedan od prostora $V^2(O)$ i $V^3(O)$ pravce kroz ishodište preslikavaju u pravce kroz ishodište ili u nulvektor. Linearni operatori kojima je domena i kodomena $V^3(O)$ ravnine kroz ishodište preslikavaju u

Operatori simetrije

- Definirajte ortogonalne operatore i unitarne operatore. U kom slučaju linearan operator nazivamo operatorom simetrije?
- Neka je $\hat{A} : V_3(O) \to V_3(O)$ bilo kakav linearan operator i $\vec{a} \neq \vec{0}$ neki fiksni vektor. Neka je $V = \{x\,\vec{a} : x \in \mathbb{R}\}$. Je li V samo podskup ili i potprostor od $V^3(O)$? Kako V geometrijski izgleda? Koje su moguće slike $\hat{A}(V)$? Ako je $\hat{A}$ operator simetrije, može li $\hat{A}(V)$ biti $\{\vec{0}\}$?
- Linearni operatori kojima je domena i kodomena jedan od prostora $V^2(O)$ i $V^3(O)$ pravce kroz ishodište preslikavaju u pravce kroz ishodište ili u nulvektor. Linearni operatori kojima je domena i kodomena $V^3(O)$ ravnine kroz ishodište preslikavaju u ravnine kroz ishodište ili u pravce kroz ishodište ili u nulvektor. Može li operator simetrije na $V^3(O)$ preslikati ravninu u pravac?

Definirajte sljedeće operatore simetrije:

- jedinični operator $\mathbf{1}$
- centralna simetrija (inverzija) $\bar{\mathbf{1}}$
- zrcaljenje $\hat{m}$
- rotacija reda n $\mathbf{n}$
- rotoinverzija $\bar{\mathbf{n}}$
- rotorefleksija $\tilde{\mathbf{n}}$

Definirajte sljedeće operatore simetrije:

- jedinični operator $\mathbf{1}$
- centralna simetrija (inverzija) $\overline{\mathbf{1}}$
- zrcaljenje $\hat{m}$
- rotacija reda n $\mathbf{n}$
- rotoinverzija $\overline{\mathbf{n}}$
- rotorefleksija $\tilde{\mathbf{n}}$
- Dokažite da su kao operatori na $V^2(O)$ centralna simetrija i rotacija reda 2 jednaki.

Definirajte sljedeće operatore simetrije:

- jedinični operator $\mathbf{1}$
- centralna simetrija (inverzija) $\overline{\mathbf{1}}$
- zrcaljenje $\hat{m}$
- rotacija reda n $\mathbf{n}$
- rotoinverzija $\overline{\mathbf{n}}$
- rotorefleksija $\tilde{\mathbf{n}}$
- Dokažite da su kao operatori na $V^2(O)$ centralna simetrija i rotacija reda 2 jednaki.
- Dokažite da je $\overline{\mathbf{3}} = \tilde{\mathbf{6}}$ (uz pretpostavku da je centar inverzije iz definicije rotoinverzije u ravnini iz definicije rotorefleksije i da se osi obiju podudaraju i uz konvenciju da je kod rotorefleksija smjer rotacije negativan).

Definirajte sljedeće operatore simetrije:

- jedinični operator $\mathbf{1}$
- centralna simetrija (inverzija) $\overline{\mathbf{1}}$
- zrcaljenje $\hat{m}$
- rotacija reda n $\mathbf{n}$
- rotoinverzija $\overline{\mathbf{n}}$
- rotorefleksija $\tilde{\mathbf{n}}$
- Dokažite da su kao operatori na $V^2(O)$ centralna simetrija i rotacija reda 2 jednaki.
- Dokažite da je $\overline{\mathbf{3}} = \tilde{\mathbf{6}}$ (uz pretpostavku da je centar inverzije iz definicije rotoinverzije u ravnini iz definicije rotorefleksije i da se osi obiju podudaraju i uz konvenciju da je kod rotorefleksija smjer rotacije negativan).
- Jesu li translacije operatori simetrije? Dokažite!