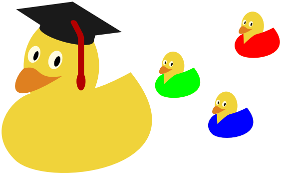
7. predavanje: Matrice linearnih operatora. Množenje matrice s matricom-stupcem.

Franka Miriam Brückler



Zadatak

Pretpostavimo da je u $V^3(O)$ *odabrana standardna ortonormirana baza. Neka je* $\hat{A}$ *rotoinverzija reda* 5 *prostora* $V^3(O)$ *kojoj je os* y*-os. Kamo* $\hat{A}$ *preslikava vektor s koordinatama* $[1, 2, 3]$*?*

Zadatak

Pretpostavimo da je u $V^3(O)$ odabrana standardna ortonormirana baza. Neka je $\hat{A}$ rotoinverzija reda 5 prostora $V^3(O)$ kojoj je os y-os. Kamo $\hat{A}$ preslikava vektor s koordinatama $[1, 2, 3]$?

Dokažite

Teorem

Linearni operator je potpuno zadan svojim djelovanjem na jednoj bazi domene.

(za konačnodimenzionalne domene i kodomene).

Zadatak

Pretpostavimo da je u $V^3(O)$ odabrana standardna ortonormirana baza. Neka je $\hat{A}$ rotoinverzija reda 5 prostora $V^3(O)$ kojoj je os y-os. Kamo $\hat{A}$ preslikava vektor s koordinatama $[1, 2, 3]$?

Dokažite

Teorem

Linearni operator je potpuno zadan svojim djelovanjem na jednoj bazi domene.

(za konačnodimenzionalne domene i kodomene). Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator i $\dim V = 3$, a $\dim W = 4$, koliko vektora imamo u bazi domene, a koliko u bazi kodomene?

Zadatak

Pretpostavimo da je u $V^3(O)$ odabrana standardna ortonormirana baza. Neka je $\hat{A}$ rotoinverzija reda 5 prostora $V^3(O)$ kojoj je os y-os. Kamo $\hat{A}$ preslikava vektor s koordinatama $[1, 2, 3]$?

Dokažite

Teorem

Linearni operator je potpuno zadan svojim djelovanjem na jednoj bazi domene.

(za konačnodimenzionalne domene i kodomene). Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator i $\dim V = 3$, a $\dim W = 4$, koliko vektora imamo u bazi domene, a koliko u bazi kodomene? Ako je baza domene $B = (e_1, e_2, e_3)$, koliko koordinata imaju vektori $\hat{A}e_i$?

Zadatak

Pretpostavimo da je u $V^3(O)$ odabrana standardna ortonormirana baza. Neka je $\hat{A}$ rotoinverzija reda 5 prostora $V^3(O)$ kojoj je os y-os. Kamo $\hat{A}$ preslikava vektor s koordinatama $[1, 2, 3]$?

Dokažite

Teorem

Linearni operator je potpuno zadan svojim djelovanjem na jednoj bazi domene.

(za konačnodimenzionalne domene i kodomene). Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator i $\dim V = 3$, a $\dim W = 4$, koliko vektora imamo u bazi domene, a koliko u bazi kodomene? Ako je baza domene $B = (e_1, e_2, e_3)$, koliko koordinata imaju vektori $\hat{A}e_i$?

Zadatak

Za gornji zadatak zapišite opću formulu za $\hat{A}[x, y, z]$.

Matrica linearnog operatora

Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator i $\dim V = n3$, a $\dim W = m$ te ako su odabrane baze B_V i B_W za domenu i kodomenu, kako dobijemo matricu od $\hat{A}$? Koliko redova i stupaca će ona imati?

Matrica linearnog operatora

Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator i $\dim V = n3$, a $\dim W = m$ te ako su odabrane baze B_V i B_W za domenu i kodomenu, kako dobijemo matricu od $\hat{A}$? Koliko redova i stupaca će ona imati? Ako je matrica linearnog operatora kvadratna, što znamo o njemu?

Matrica linearnog operatora

Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator i $\dim V = n3$, a $\dim W = m$ te ako su odabrane baze B_V i B_W za domenu i kodomenu, kako dobijemo matricu od $\hat{A}$? Koliko redova i stupaca će ona imati?

Ako je matrica linearnog operatora kvadratna, što znamo o njemu?

Kakve su matrice linearnih funkcionala?

Matrica linearnog operatora

Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator i $\dim V = n3$, a $\dim W = m$ te ako su odabrane baze B_V i B_W za domenu i kodomenu, kako dobijemo matricu od $\hat{A}$? Koliko redova i stupaca će ona imati? Ako je matrica linearnog operatora kvadratna, što znamo o njemu? Kakve su matrice linearnih funkcionala? Kakav je dogovor o odabiru B_V i B_W ako je $V = W$?

Matrica linearnog operatora

Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator i $\dim V = n3$, a $\dim W = m$ te ako su odabrane baze B_V i B_W za domenu i kodomenu, kako dobijemo matricu od $\hat{A}$? Koliko redova i stupaca će ona imati? Ako je matrica linearnog operatora kvadratna, što znamo o njemu? Kakve su matrice linearnih funkcionala? Kakav je dogovor o odabiru B_V i B_W ako je $V = W$?

Zadatak

Zapišite matricu linearnog operatora iz zadataka s prethodnog slide-a uz odabir standardne ortonormirane baze za $V^3(O)$.

Matrica linearnog operatora

Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator i $\dim V = n3$, a $\dim W = m$ te ako su odabrane baze B_V i B_W za domenu i kodomenu, kako dobijemo matricu od $\hat{A}$? Koliko redova i stupaca će ona imati? Ako je matrica linearnog operatora kvadratna, što znamo o njemu? Kakve su matrice linearnih funkcionala? Kakav je dogovor o odabiru B_V i B_W ako je $V = W$?

Zadatak

Zapišite matricu linearnog operatora iz zadataka s prethodnog slide-a uz odabir standardne ortonormirane baze za $V^3(O)$.

Zadatak

Odredite matricu traga kao funkcije s $M_{2,3}$ u $\mathbb{R}$ (uz pretpostavku korištenja kanonskih baza).

Zadatak

Odredite matricu operatora skaliranja s π gledanog na prostoru svih polinoma najviše 4.

Zadatak

Odredite matricu operatora skaliranja s π gledanog na prostoru svih polinoma najviše 4.

Zadatak

Neka je V skup svih linearnih kombinacija dviju eksponencijalnih funkcija s različitim bazama. Argumentirajte da se radi o potprostoru prostora svih beskonačno mnogo puta derivabilnih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. Koja mu je dimenzija? Odaberite jednu bazu i s obzirom na tu bazu odredite matricu linearnog operatora $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : V \to V$.

Zadatak

Odredite matricu operatora skaliranja s π gledanog na prostoru svih polinoma najviše 4.

Zadatak

Neka je V skup svih linearnih kombinacija dviju eksponencijalnih funkcija s različitim bazama. Argumentirajte da se radi o potprostoru prostora svih beskonačno mnogo puta derivabilnih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. Koja mu je dimenzija? Odaberite jednu bazu i s obzirom na tu bazu odredite matricu linearnog operatora $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : V \to V$.

Zadatak

Odredite matrice svih osnovnih operatora simetrije na prostorima $V^2(O)$ i $V^3(O)$ uz što općenitije baze!

Ima li svaki linearan operator svoju matricu?

Ima li svaki linearan operator svoju matricu? Linearni operatori kojima je domena ili kodomena beskonačne dimenzije nemaju svoje matrice.

Zadatak

Neka je s $\hat{x} : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ *označen operator koji funkciji pridružuje njen produkt s njenom varijablom* x. *Ako je* $\hat{A} = \hat{x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, *argumentirajte da se radi o linearnom operatoru i izračunajte* $\hat{A}(\exp)$.

Ima li svaki linearan operator svoju matricu? Linearni operatori kojima je domena ili kodomena beskonačne dimenzije nemaju svoje matrice.

Zadatak

Neka je s $\hat{x} : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ *označen operator koji funkciji pridružuje njen produkt s njenom varijablom* x*. Ako je* $\hat{A} = \hat{x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$*, argumentirajte da se radi o linearnom operatoru i izračunajte* $\hat{A}(\exp)$*.*

Primjer

U kvantnoj mehanici se dinamičke veličine klasične mehanike predstavljaju linearnim operatorima koji djeluju na vektorskom prostoru valnih funkcija. Primjerice, kvantnomehanički operatori za kinetičku i potencijalnu energiju pri gibanju po pravcu su $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ *te* $\hat{V}$, $\hat{V}\psi(x) = V(x) \cdot \psi(x)$*. Ukupnoj energiji odgovara linearan operator* $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ *(Hamiltonijan).*

Je li matrica linearnog operatora jednoznačno određena samim operatorom?

Je li matrica linearnog operatora jednoznačno određena samim operatorom? Postoje li linearni operatori koji s obzirom na sve moguće baze domene i kodomene imaju istu matricu?

Je li matrica linearnog operatora jednoznačno određena samim operatorom? Postoje li linearni operatori koji s obzirom na sve moguće baze domene i kodomene imaju istu matricu?

Zadatak

Odredite matricu operatora projekcije $\hat{P} : V^3(O) \to V^3(O)$ *koji svakoj točki prostora pridružuje njenu ortogonalnu projekciju na* (x, y)*-ravninu, uz pretpostavku da je odabrana baza rompska* ($a \neq b \neq c \neq a$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$).

Je li matrica linearnog operatora jednoznačno određena samim operatorom? Postoje li linearni operatori koji s obzirom na sve moguće baze domene i kodomene imaju istu matricu?

Zadatak

Odredite matricu operatora projekcije $\hat{P} : V^3(O) \to V^3(O)$ *koji svakoj točki prostora pridružuje njenu ortogonalnu projekciju na* (x, y)*-ravninu, uz pretpostavku da je odabrana baza rompska* ($a \neq b \neq c \neq a$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$).

Zadatak

Linearan operator $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *zadan je kao tzv. pomak udesno:* $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (0, x_1, x_2)$. *Odredite njegove matrice s obzirom na kanonsku bazu i s obzirom na bazu* (a, b, c) *gdje je* $a = (4, 0, 3)$, $b = (-2, 1, 0)$, $c = (0, 0, -1)$.

Je li matrica linearnog operatora jednoznačno određena samim operatorom? Postoje li linearni operatori koji s obzirom na sve moguće baze domene i kodomene imaju istu matricu?

Zadatak

Odredite matricu operatora projekcije $\hat{P} : V^3(O) \to V^3(O)$ *koji svakoj točki prostora pridružuje njenu ortogonalnu projekciju na* (x, y)*-ravninu, uz pretpostavku da je odabrana baza rompska* $(a \neq b \neq c \neq a,\ \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ)$.

Zadatak

Linearan operator $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *zadan je kao tzv. pomak udesno:* $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (0, x_1, x_2)$. *Odredite njegove matrice s obzirom na kanonsku bazu i s obzirom na bazu* (a, b, c) *gdje je* $a = (4, 0, 3)$, $b = (-2, 1, 0)$, $c = (0, 0, -1)$.

Je li svaka matrica matrica nekog linearnog operatora?

Koja korist od matrice operatora?

Primjer

Nastavimo primjer s prvog slide-a. Matrica linearnog operatora je tu (uz oznake $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, $\beta = \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}$ *)*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & -1 & 0 \\ -\beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

i pokazali smo da je $\hat{A}[x, y, z] = [\alpha\, x + \beta\, z, -y, -\beta\, x + \alpha\, z]$. *Uočimo da je svaka od koordinata rezultata skalarni umnožak odgovarajućeg joj po redu retka matrice (gledanog kao vektor u* $\mathbb{R}^3$*) s* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *Kratko pišemo:* $A \cdot X = Y$, *gdje je* $X = [x\, y\, z]^t$ *i* $Y = [\alpha\, x + \beta\, z \;\; -y \;\; -\beta\, x + \alpha\, z]^t$.

Množenje matrice s matricom-stupcem

$$A \cdot X = Y$$

je definirano tako da uz pretpostavku da su u X koordinate nekog vektora v domene linearnog operatora $\hat{A}$ s obzirom na bazu B_V i da je A matrica tog operatora s obzirom na baze B_V i B_W, u Y budu koordinate slike vektora $\hat{A}v$ s obzirom na bazu B_W. Ako je $\dim V = 8$ i $\dim W = 3$, kojih tipova moraju biti matrice X i Y?

Množenje matrice s matricom-stupcem

$$A \cdot X = Y$$

je definirano tako da uz pretpostavku da su u X koordinate nekog vektora v domene linearnog operatora $\hat{A}$ s obzirom na bazu B_V i da je A matrica tog operatora s obzirom na baze B_V i B_W, u Y budu koordinate slike vektora $\hat{A}v$ s obzirom na bazu B_W. Ako je $\dim V = 8$ i $\dim W = 3$, kojih tipova moraju biti matrice X i Y?
Ako je $A \in M_{m,n}$ i $X \in M_{n,1}$, umnožak $A \cdot X$ definiramo kao matricu Y u $M_{m,1}$ čiji elementi su skalarni produkti (u $\mathbb{R}^n$) redaka od A s X.

Zadatak

Odredite kooordinate vektora $2\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}$ ako je na njega primijenjen operator rotorefleksije s kutom 30° ako je os rotacijske komponente z-os Kartezijevog koordinatnog sustava.

Zadatak

U kojem slučaju možemo množiti matricu-redak s matricom-stupcem? Kojeg je tipa rezultat?

Zadatak

U kojem slučaju možemo množiti matricu-redak s matricom-stupcem? Kojeg je tipa rezultat? A matricu-redak s matricom-retkom?

Zadatak

U kojem slučaju možemo množiti matricu-redak s matricom-stupcem? Kojeg je tipa rezultat? A matricu-redak s matricom-retkom? A matricu-stupac s matricom-stupcem?

Zadatak

U kojem slučaju možemo množiti matricu-redak s matricom-stupcem? Kojeg je tipa rezultat? A matricu-redak s matricom-retkom? A matricu-stupac s matricom-stupcem?

Zadatak

U ravnini je zadan Kartezijev koordinatni sustav i kvadrat s vrhovima $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. *Neka je* $\hat{M} : V^2(O) \to V^2(O)$ *linearan operator. U kakve četverokute* $\hat{M}$ *može preslikati naš kvadrat? U kakve ne?*

Zadatak

U kojem slučaju možemo množiti matricu-redak s matricom-stupcem? Kojeg je tipa rezultat? A matricu-redak s matricom-retkom? A matricu-stupac s matricom-stupcem?

Zadatak

U ravnini je zadan Kartezijev koordinatni sustav i kvadrat s vrhovima $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. *Neka je* $\hat{M} : V^2(O) \to V^2(O)$ *linearan operator. U kakve četverokute* $\hat{M}$ *može preslikati naš kvadrat? U kakve ne?*

Zadatak

Tzv. opće pozicije u prostornoj grupi Pbcn su točke $T + (0,0,0)$, $T + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $T + (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $T + (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $T + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $T + (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $T + (0, \frac{1}{2}, 0)$, $T + (0, 0, \frac{1}{2})$, *uz* $T = (m,n,p) \in \mathbb{Z}^3$ *i* $a \neq b \neq c \neq a$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$. *Zapišite dvije ne-jedinične matrice linearnih operatora simetrije za ovu kristalnu rešetku, tj. takav da čuvaju opće pozicije.*