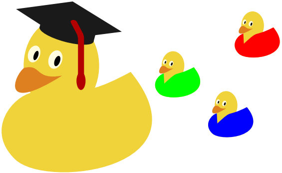
8. predavanje: Množenje matrica. Inverz matrice.

Franka Miriam Brückler



Množenje matrica općenito

Definicija množenja matrice A s matricom B podešena je tako da

Množenje matrica općenito

Definicija množenja matrice A s matricom B podešena je tako da ako je A matrica linearnog operatora $\hat{A}$ i B matrica linearnog operatora $\hat{B}$, $A \cdot B$ je matrica kompozicije $\hat{A} \circ \hat{B}$.
Uz koji uvjet se dvije funkcije mogu komponirati?

Množenje matrica općenito

Definicija množenja matrice A s matricom B podešena je tako da ako je A matrica linearnog operatora $\hat{A}$ i B matrica linearnog operatora $\hat{B}$, $A \cdot B$ je matrica kompozicije $\hat{A} \circ \hat{B}$.
Uz koji uvjet se dvije funkcije mogu komponirati? Kakve stoga trebaju biti matrice A i B da bi $A \cdot B$ imalo smisla?

Množenje matrica općenito

Definicija množenja matrice A s matricom B podešena je tako da ako je A matrica linearnog operatora $\hat{A}$ i B matrica linearnog operatora $\hat{B}$, $A \cdot B$ je matrica kompozicije $\hat{A} \circ \hat{B}$.
Uz koji uvjet se dvije funkcije mogu komponirati? Kakve stoga trebaju biti matrice A i B da bi $A \cdot B$ imalo smisla? Koliko redaka i stupaca ima $A \cdot B$?

Množenje matrica općenito

Definicija množenja matrice A s matricom B podešena je tako da ako je A matrica linearnog operatora $\hat{A}$ i B matrica linearnog operatora $\hat{B}$, $A \cdot B$ je matrica kompozicije $\hat{A} \circ \hat{B}$.
Uz koji uvjet se dvije funkcije mogu komponirati? Kakve stoga trebaju biti matrice A i B da bi $A \cdot B$ imalo smisla? Koliko redaka i stupaca ima $A \cdot B$? Podrazumijevamo da je „dolazna" baza od $\hat{B}$ ista kao „polazna" od $\hat{A}$ i definiramo: element na poziciji (i, j) umnoška $A \cdot B$ je skalarni produkt i-tog retka od A i j-tog stupca od B, oba shvaćena kao elementi od $\mathbb{R}^n$.

Množenje matrica općenito

Definicija množenja matrice A s matricom B podešena je tako da ako je A matrica linearnog operatora $\hat{A}$ i B matrica linearnog operatora $\hat{B}$, $A \cdot B$ je matrica kompozicije $\hat{A} \circ \hat{B}$.
Uz koji uvjet se dvije funkcije mogu komponirati? Kakve stoga trebaju biti matrice A i B da bi $A \cdot B$ imalo smisla? Koliko redaka i stupaca ima $A \cdot B$? Podrazumijevamo da je „dolazna" baza od $\hat{B}$ ista kao „polazna" od $\hat{A}$ i definiramo: element na poziciji (i, j) umnoška $A \cdot B$ je skalarni produkt i-tog retka od A i j-tog stupca od B, oba shvaćena kao elementi od $\mathbb{R}^n$.
Kada matricu-stupac možemo množiti s matricom-retkom i kako tada izgleda rezultat?

Primjer

S obzirom na standardnu ortonormiranu bazu, odredite matricu rotorefleksije reda 4 kjojoj je os rotacije uzeta kao z-os.

Primjer

S obzirom na standardnu ortonormiranu bazu, odredite matricu rotorefleksije reda 4 kjojoj je os rotacije uzeta kao z-os.

- U kom slučaju vrijedi $I_n A = A$?

Primjer

S obzirom na standardnu ortonormiranu bazu, odredite matricu rotorefleksije reda 4 kjojoj je os rotacije uzeta kao z-os.

- U kom slučaju vrijedi $I_n A = A$?
- Ako je $A \in M_{m,n}$, za koje p i q ima smisla $A\,0_{p,q}$? A $0_{p,q}\,A$? Što je rezultat tih umnožaka?

Primjer

S obzirom na standardnu ortonormiranu bazu, odredite matricu rotorefleksije reda 4 kjojoj je os rotacije uzeta kao z-os.

- U kom slučaju vrijedi $I_n\, A = A$?
- Ako je $A \in M_{m,n}$, za koje p i q ima smisla $A\, 0_{p,q}$? A $0_{p,q}\, A$? Što je rezultat tih umnožaka?
- Opišite skalarni produkt u $\mathbb{R}^n$ kao množenje matrica!

Primjer

S obzirom na standardnu ortonormiranu bazu, odredite matricu rotorefleksije reda 4 kjojoj je os rotacije uzeta kao z-os.

- U kom slučaju vrijedi $I_n A = A$?
- Ako je $A \in M_{m,n}$, za koje p i q ima smisla $A\, 0_{p,q}$? A $0_{p,q}\, A$? Što je rezultat tih umnožaka?
- Opišite skalarni produkt u $\mathbb{R}^n$ kao množenje matrica!
- Ako je $A \cdot B = O_{m,n}$, mora li jedna od matrica A i B biti nulmatrica?

Primjer

S obzirom na standardnu ortonormiranu bazu, odredite matricu rotorefleksije reda 4 kjojoj je os rotacije uzeta kao z-os.

- U kom slučaju vrijedi $I_n A = A$?
- Ako je $A \in M_{m,n}$, za koje p i q ima smisla $A\,0_{p,q}$? A $0_{p,q}\,A$? Što je rezultat tih umnožaka?
- Opišite skalarni produkt u $\mathbb{R}^n$ kao množenje matrica!
- Ako je $A \cdot B = O_{m,n}$, mora li jedna od matrica A i B biti nulmatrica?
- Vrijedi li $A \cdot B = B \cdot A$?

Primjer

S obzirom na standardnu ortonormiranu bazu, odredite matricu rotorefleksije reda 4 kjojoj je os rotacije uzeta kao z-os.

- U kom slučaju vrijedi $I_n A = A$?
- Ako je $A \in M_{m,n}$, za koje p i q ima smisla $A\,0_{p,q}$? A $0_{p,q}\,A$? Što je rezultat tih umnožaka?
- Opišite skalarni produkt u $\mathbb{R}^n$ kao množenje matrica!
- Ako je $A \cdot B = O_{m,n}$, mora li jedna od matrica A i B biti nulmatrica?
- Vrijedi li $A \cdot B = B \cdot A$?
- Definirajte komutator matrica A i B!

Primjer

Paulijeve matrice spina su tri matrice koje se ponekad koriste za opis spinova elektrona (po jedna za svaki kutni moment):

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Za njih je

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, [S_y, S_z] = i\hbar S_x, [S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

i

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posljednja matrica predstavlja kvadrat spinskog kutnog momenta.

Invertiranje matrica

- Što je to bijekcija? Za što je bitno svojstvo bijektivnosti?

Invertiranje matrica

- Što je to bijekcija? Za što je bitno svojstvo bijektivnosti?
- Može li linearan operator s 2-dimenzionalnog u 3-dimenzionalni prostor biti bijekcija? A s 3-dimenzionalnog u 2-dimenzionalni?

Invertiranje matrica

- Što je to bijekcija? Za što je bitno svojstvo bijektivnosti?
- Može li linearan operator s 2-dimenzionalnog u 3-dimenzionalni prostor biti bijekcija? A s 3-dimenzionalnog u 2-dimenzionalni?
- Ako je $\hat{A} : V \to W$ i $\dim V = \dim W$, zašto možemo uzeti da je $\hat{A} : V \to V$ („operator na V“)?

Invertiranje matrica

- Što je to bijekcija? Za što je bitno svojstvo bijektivnosti?
- Može li linearan operator s 2-dimenzionalnog u 3-dimenzionalni prostor biti bijekcija? A s 3-dimenzionalnog u 2-dimenzionalni?
- Ako je $\hat{A} : V \to W$ i $\dim V = \dim W$, zašto možemo uzeti da je $\hat{A} : V \to V$ („operator na V“)?
- Zapišite definiciju inverznog operatora za bijektivni linearni operator $\hat{A} : V \to V$.

Invertiranje matrica

- Što je to bijekcija? Za što je bitno svojstvo bijektivnosti?
- Može li linearan operator s 2-dimenzionalnog u 3-dimenzionalni prostor biti bijekcija? A s 3-dimenzionalnog u 2-dimenzionalni?
- Ako je $\hat{A} : V \to W$ i $\dim V = \dim W$, zašto možemo uzeti da je $\hat{A} : V \to V$ („operator na V“)?
- Zapišite definiciju inverznog operatora za bijektivni linearni operator $\hat{A} : V \to V$. Ako fiksiramo bazu od V, što onda mora vrijediti za matricu od $\hat{A}$?

Invertiranje matrica

- Što je to bijekcija? Za što je bitno svojstvo bijektivnosti?
- Može li linearan operator s 2-dimenzionalnog u 3-dimenzionalni prostor biti bijekcija? A s 3-dimenzionalnog u 2-dimenzionalni?
- Ako je $\hat{A} : V \to W$ i $\dim V = \dim W$, zašto možemo uzeti da je $\hat{A} : V \to V$ („operator na V“)?
- Zapišite definiciju inverznog operatora za bijektivni linearni operator $\hat{A} : V \to V$. Ako fiksiramo bazu od V, što onda mora vrijediti za matricu od $\hat{A}$?

Definicija (Inverzna matrica)

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njen inverz (inverzna matrica od A) je, ako postoji, kvadratna matrica $B \in M_n$ takva da vrijedi $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Ako takva matrica B postoji, jedinstveno je određena te se označava s A^{-1}.

Je li svaka kvadratna matrica invertibilna?

Je li svaka kvadratna matrica invertibilna? Budući da osim nulmatrice postoji beskonačno mnogo kvadratnih matrica koje nisu invertibilne, nema smisla definirati dijeljenje matrica!

Zadatak

Ako je $R_{z,45^\circ}$ matrica rotacije reda 8 oko z-osi Kartezijevog koordinatnog sustava, koja je matrica njezinog inverza?

Je li svaka kvadratna matrica invertibilna? Budući da osim nulmatrice postoji beskonačno mnogo kvadratnih matrica koje nisu invertibilne, nema smisla definirati dijeljenje matrica!

Zadatak

Ako je $R_{z,45^\circ}$ matrica rotacije reda 8 oko z-osi Kartezijevog koordinatnog sustava, koja je matrica njezinog inverza?

Što o retcima i stupcima kvadratne matrice A govori ako vrijedi $A\,A^t = A^t A = I_n$?

Je li svaka kvadratna matrica invertibilna? Budući da osim nulmatrice postoji beskonačno mnogo kvadratnih matrica koje nisu invertibilne, nema smisla definirati dijeljenje matrica!

Zadatak

Ako je $R_{z,45^\circ}$ matrica rotacije reda 8 oko z-osi Kartezijevog koordinatnog sustava, koja je matrica njezinog inverza?

Što o retcima i stupcima kvadratne matrice A govori ako vrijedi $A\,A^t = A^t A = I_n$?

Teorem

Ako je $\hat{A}$ operator simetrije i A njegova matrica s obzirom na neku ortonormiranu bazu, onda je $A^{-1} = A^t$.

Kako bi sad glasila definicija unitarne matrice?

Zadatak

Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *je kvadratna i nije nulmatrica. Nađimo joj inverz, ako postoji.*

Zadatak

Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *je kvadratna i nije nulmatrica. Nađimo joj inverz, ako postoji.*

Zašto u praksi inverz matrice određujemo koristeći Gaußovu metodu eliminacija primijenjenu na

$$(A|I_n) \simeq \ldots \simeq (I_n|A^{-1})?$$

Zadatak

Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *je kvadratna i nije nulmatrica. Nađimo joj inverz, ako postoji.*

Zašto u praksi inverz matrice određujemo koristeći Gaußovu metodu eliminacija primijenjenu na

$$(A|I_n) \simeq \ldots \simeq (I_n|A^{-1})?$$

Za određivanje inverza matrice $A \in M_n$ potrebno je riješiti sustav od

Zadatak

Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *je kvadratna i nije nulmatrica. Nađimo joj inverz, ako postoji.*

Zašto u praksi inverz matrice određujemo koristeći Gaußovu metodu eliminacija primijenjenu na

$$(A|I_n) \simeq \ldots \simeq (I_n|A^{-1})?$$

Za određivanje inverza matrice $A \in M_n$ potrebno je riješiti sustav od n^2 linearnih jednadžbi s n^2 nepoznanica, dobiven iz

Zadatak

Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *je kvadratna i nije nulmatrica. Nađimo joj inverz, ako postoji.*

Zašto u praksi inverz matrice određujemo koristeći Gaußovu metodu eliminacija primijenjenu na

$$(A|I_n) \simeq \ldots \simeq (I_n|A^{-1})?$$

Za određivanje inverza matrice $A \in M_n$ potrebno je riješiti sustav od n^2 linearnih jednadžbi s n^2 nepoznanica, dobiven iz $A\,A^{-1} = I_n$.

Zadatak

Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *je kvadratna i nije nulmatrica. Nađimo joj inverz, ako postoji.*

Zašto u praksi inverz matrice određujemo koristeći Gaußovu metodu eliminacija primijenjenu na

$$(A|I_n) \simeq \ldots \simeq (I_n|A^{-1})?$$

Za određivanje inverza matrice $A \in M_n$ potrebno je riješiti sustav od n^2 linearnih jednadžbi s n^2 nepoznanica, dobiven iz $A\,A^{-1} = I_n$. Zapravo se taj sustav jednadžbi raspada na

Zadatak

Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *je kvadratna i nije nulmatrica. Nađimo joj inverz, ako postoji.*

Zašto u praksi inverz matrice određujemo koristeći Gaußovu metodu eliminacija primijenjenu na

$$(A|I_n) \simeq \ldots \simeq (I_n|A^{-1})?$$

Za određivanje inverza matrice $A \in M_n$ potrebno je riješiti sustav od n^2 linearnih jednadžbi s n^2 nepoznanica, dobiven iz $A\,A^{-1} = I_n$. Zapravo se taj sustav jednadžbi raspada na n sustava tipa $n \times n$ (po jedan za svaki stupac od A^{-1}), pri čemu su lijeve strane (koeficijenti) svih tih sustava iste (to su točno elementi matrice A), a stupci slobodnih članova su redom stupci jedinične matrice. Sustav za određivanje j-tog stupca od A^{-1} kao stupac slobodnih članova ima j-ti stupac od I_n.

Zadatak

Odredite matricu inverznog operatora operatora $\hat{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,
$\hat{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_2 + x_3 + x_4, x_3 + x_4, x_4)$ *(s obzirom na kanonsku bazu).*

Zadatak

Odredite matricu inverznog operatora operatora $\hat{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\hat{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_2 + x_3 + x_4, x_3 + x_4, x_4)$ *(s obzirom na kanonsku bazu).*

Zadatak

Ako je

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

, nađite uvjet invertibilnosti od A *i formulu za* A^{-1}.