Skalarne funkcije više varijabli i parcijalne derivacije

Franka Miriam Brückler

Jednadžba stanja idealnog plina

$$p = \frac{nRT}{V} \Leftrightarrow f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$$

uz

$$x = \frac{n}{\text{mol}}, y = \frac{T}{\text{K}}, z = \frac{V}{\text{L}}, f == \frac{p}{\text{Pa}}.$$

Pritom je kodomena od f skup $\mathbb{R}$, a domena je

Jednadžba stanja idealnog plina

$$p = \frac{nRT}{V} \Leftrightarrow f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$$

uz

$$x = \frac{n}{\text{mol}}, y = \frac{T}{\text{K}}, z = \frac{V}{\text{L}}, f == \frac{p}{\text{Pa}}.$$

Pritom je kodomena od f skup $\mathbb{R}$, a domena je $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0\}$ (prirodna domena bila bi

Jednadžba stanja idealnog plina

$$p = \frac{nRT}{V} \Leftrightarrow f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$$

uz

$$x = \frac{n}{\text{mol}}, y = \frac{T}{\text{K}}, z = \frac{V}{\text{L}}, f == \frac{p}{\text{Pa}}.$$

Pritom je kodomena od f skup $\mathbb{R}$, a domena je $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0\}$ (prirodna domena bila bi $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$).

Definicija (Skalarne funkcije više varijabli)

Skalarna (ili: realna) funkcija od $n > 1$ varijabli je funkcija koja uređenim n-torkama brojeva pridružuje realne brojeve, tj. funkcija čija domena je podskup od $\mathbb{R}^n$, a kodomena joj je (podskup od) $\mathbb{R}$.

Primjer

$$f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2 \Rightarrow f(2,1) = -3; f(1,2) = -15.$$

Zadatak

Osmislite neko pravilo koje bi predstavljalo skalarnu funkciju triju varijabli x, y, z kojoj je prirodna domena čitav $\mathbb{R}^3$. Izračunajte koju vrijednost ta funkcija postiže u $(0,0,0,0)$.

Primjer

$$f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2 \Rightarrow f(2,1) = -3; f(1,2) = -15.$$

Zadatak

Osmislite neko pravilo koje bi predstavljalo skalarnu funkciju triju varijabli x, y, z kojoj je prirodna domena čitav $\mathbb{R}^3$. Izračunajte koju vrijednost ta funkcija postiže u $(0,0,0,0)$.

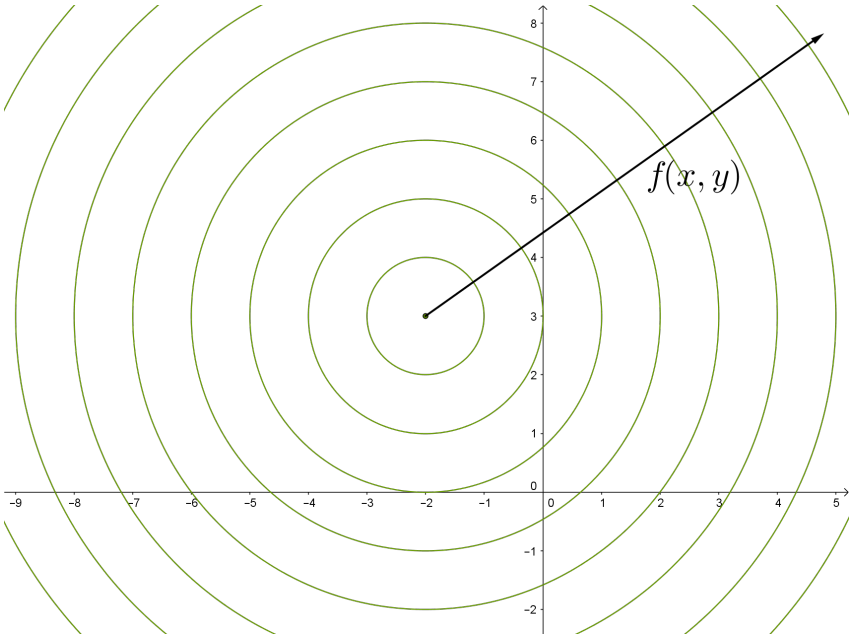
Zadatak

Osmislite neko pravilo koje bi predstavljalo skalarnu funkciji dviju varijabli x i y kojoj je domena $\mathbb{R}^2$ bez ishodišta $(0,0)$.

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2, 3)$?

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2, 3)$? Vidimo da se ona sastoji od točaka (x, y) za koje skalarna funkcija pravila $f(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 3)^2$ poprima vrijednost 25. Koje su točke ravnine za koje taj izraz poprima vrijednost 1? 0? -1?

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2, 3)$? Vidimo da se ona sastoji od točaka (x, y) za koje skalarna funkcija pravila $f(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 3)^2$ poprima vrijednost 25. Koje su točke ravnine za koje taj izraz poprima vrijednost 1? 0? -1?



Nivo-krivulje skalarne funkcije dviju varijabli

Za različite vrijednosti nezavisnih varijabli x i y skalarna funkcija f tih dviju varijabli kao vrijednosti $f(x, y)$ poprima razne realne brojeve. Ako fiksiramo „ciljanu" vrijednost a, sve točke koje zadovoljavaju

$$f(x, y) = a$$

čine krivulju koju nazivamo nivo-krivuljom funkcije f. Za različite a, dobijemo različite nivo-krivulje iste funkcije i one, donekle, smislu vizualiziraju ponašanje od f. Je li ikoja od njih graf od f?

Nivo-krivulje skalarne funkcije dviju varijabli

Za različite vrijednosti nezavisnih varijabli x i y skalarna funkcija f tih dviju varijabli kao vrijednosti $f(x, y)$ poprima razne realne brojeve. Ako fiksiramo „ciljanu" vrijednost a, sve točke koje zadovoljavaju

$$f(x, y) = a$$

čine krivulju koju nazivamo nivo-krivuljom funkcije f. Za različite a, dobijemo različite nivo-krivulje iste funkcije i one, donekle, smislu vizualiziraju ponašanje od f. Je li ikoja od njih graf od f?

Podsjetnik

Teorema o implicitnoj funkciji!

Nivo-krivulje skalarne funkcije dviju varijabli

Za različite vrijednosti nezavisnih varijabli x i y skalarna funkcija f tih dviju varijabli kao vrijednosti $f(x, y)$ poprima razne realne brojeve. Ako fiksiramo „ciljanu" vrijednost a, sve točke koje zadovoljavaju

$$f(x, y) = a$$

čine krivulju koju nazivamo nivo-krivuljom funkcije f. Za različite a, dobijemo različite nivo-krivulje iste funkcije i one, donekle, smislu vizualiziraju ponašanje od f. Je li ikoja od njih graf od f?

Podsjetnik

Teorema o implicitnoj funkciji!

Zadatak

Kako izgleda nulta nivo-linija funkcije zadane s $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$*?*

Nivo-krivulje skalarne funkcije dviju varijabli

Za različite vrijednosti nezavisnih varijabli x i y skalarna funkcija f tih dviju varijabli kao vrijednosti $f(x, y)$ poprima razne realne brojeve. Ako fiksiramo „ciljanu" vrijednost a, sve točke koje zadovoljavaju

$$f(x, y) = a$$

čine krivulju koju nazivamo nivo-krivuljom funkcije f. Za različite a, dobijemo različite nivo-krivulje iste funkcije i one, donekle, smislu vizualiziraju ponašanje od f. Je li ikoja od njih graf od f?

Podsjetnik

Teorema o implicitnoj funkciji!

Zadatak

Kako izgleda nulta nivo-linija funkcije zadane s $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$? Je li ta krivulja graf neke funkcije jedne varijable?

Nivo-krivulje skalarne funkcije dviju varijabli

Za različite vrijednosti nezavisnih varijabli x i y skalarna funkcija f tih dviju varijabli kao vrijednosti $f(x, y)$ poprima razne realne brojeve. Ako fiksiramo „ciljanu" vrijednost a, sve točke koje zadovoljavaju

$$f(x, y) = a$$

čine krivulju koju nazivamo nivo-krivuljom funkcije f. Za različite a, dobijemo različite nivo-krivulje iste funkcije i one, donekle, smislu vizualiziraju ponašanje od f. Je li ikoja od njih graf od f?

Podsjetnik

Teorema o implicitnoj funkciji!

Zadatak

Kako izgleda nulta nivo-linija funkcije zadane s $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$? Je li ta krivulja graf neke funkcije jedne varijable? Oko kojih se točaka može njen dio shvatiti kao graf

Grafovi skalarnih funkcija

Graf funkcije $f : D \to K$ je skup svih parova $(X, f(X))$ gdje je $X \in D$. Skalarnim funkcijama s n varijabli je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, a $K \subseteq \mathbb{R}$. U kojem se skupu nalaze elementi $(X, f(X))$ grafa skalarne funkcije dviju varijabli? Triju? Njih n?

Grafovi skalarnih funkcija

Graf funkcije $f : D \to K$ je skup svih parova $(X, f(X))$ gdje je $X \in D$. Skalarnim funkcijama s n varijabli je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, a $K \subseteq \mathbb{R}$. U kojem se skupu nalaze elementi $(X, f(X))$ grafa skalarne funkcije dviju varijabli? Triju? Njih n?

Graf skalarne funkcije s n varijabli nalazi se u $\mathbb{R}^{n+1}$. Stoga se grafovi realnih funkcija mogu vizualno interpretirati u koordinatnom sustavu samo u slučaju dviju (ili jedne) varijable.

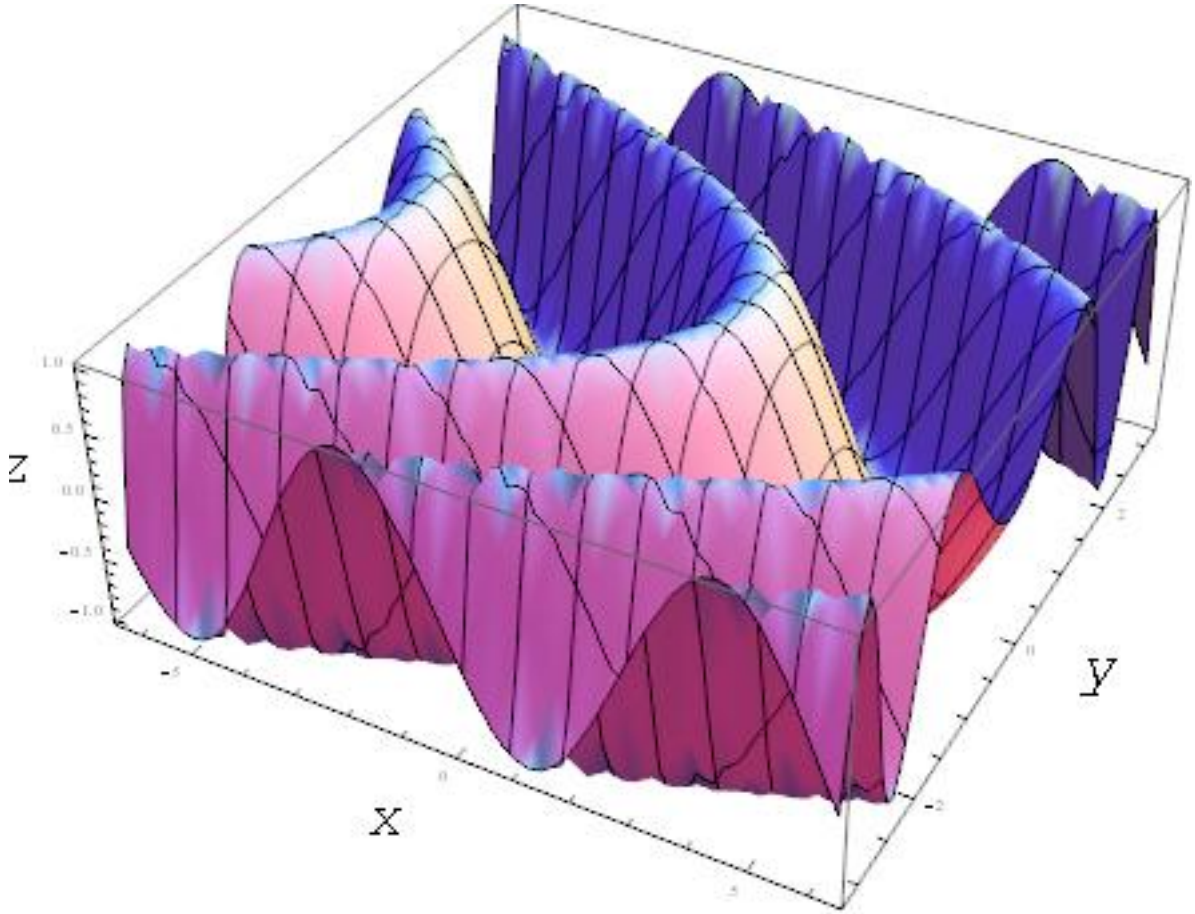
Graf skalarne funkcije dviju varijabli se može prikazati u prostornom Kartezijevom koordinatnom sustavu. On se sastoji od točaka s koordinatama $(x, y, f(x, y))$, gdje je $(x, y) \in D$, dakle je njegova jednadžba $z = f(x, y)$.

Grafovi skalarnih funkcija

Graf funkcije $f : D \to K$ je skup svih parova $(X, f(X))$ gdje je $X \in D$. Skalarnim funkcijama s n varijabli je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, a $K \subseteq \mathbb{R}$. U kojem se skupu nalaze elementi $(X, f(X))$ grafa skalarne funkcije dviju varijabli? Triju? Njih n?

Graf skalarne funkcije s n varijabli nalazi se u $\mathbb{R}^{n+1}$. Stoga se grafovi realnih funkcija mogu vizualno interpretirati u koordinatnom sustavu samo u slučaju dviju (ili jedne) varijable.

Graf skalarne funkcije dviju varijabli se može prikazati u prostornom Kartezijevom koordinatnom sustavu. On se sastoji od točaka s koordinatama $(x, y, f(x, y))$, gdje je $(x, y) \in D$, dakle je njegova jednadžba $z = f(x, y)$. U takvom prikazu se domena od f gleda kao podskup (x, y)-koordinatne ravnine, a iznos aplikate grafa je iznos funkcije pridružen projekciji točke na (x, y)-ravninu.



$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin(x + y^2)$$

Idealni plin – funkcija tlaka p u ovsinosti o n, T i V – može li se nacrtati graf?

Idealni plin – funkcija tlaka p u ovsinosti o n, T i V – može li se nacrtati graf? Kao alternativa prikazu čitavog grafa funkcije više varijabli uobičajio se sljedeći način: Umjesto crtanja grafa funkcije f s n varijabli, crtaju se n serija grafova funkcije f u ovisnosti o po jednoj od njezinih varijabli, a kad su ostale varijable konstante.
Npr., ako f ovisi o $x_1, \ldots, x_n$, prva serija je ovisnost f o x_1, nacrtana kao nekoliko grafova funkcije 1 varijable (uzimajući neke konstantne vrijednosti za $x_2, \ldots, x_n$).
Konkretno, $p = nRT/V$ možemo opisati pomoću tri funkcije jedne varijable: $p_{T,V}(n) = \frac{RT}{V} \cdot n$, $p_{n,V}(T) = \frac{nR}{V} \cdot T$ i $p_{n,T}(V) = nRT \cdot \frac{1}{V}$. Skicirajte odgovarajuće tri serije grafova!

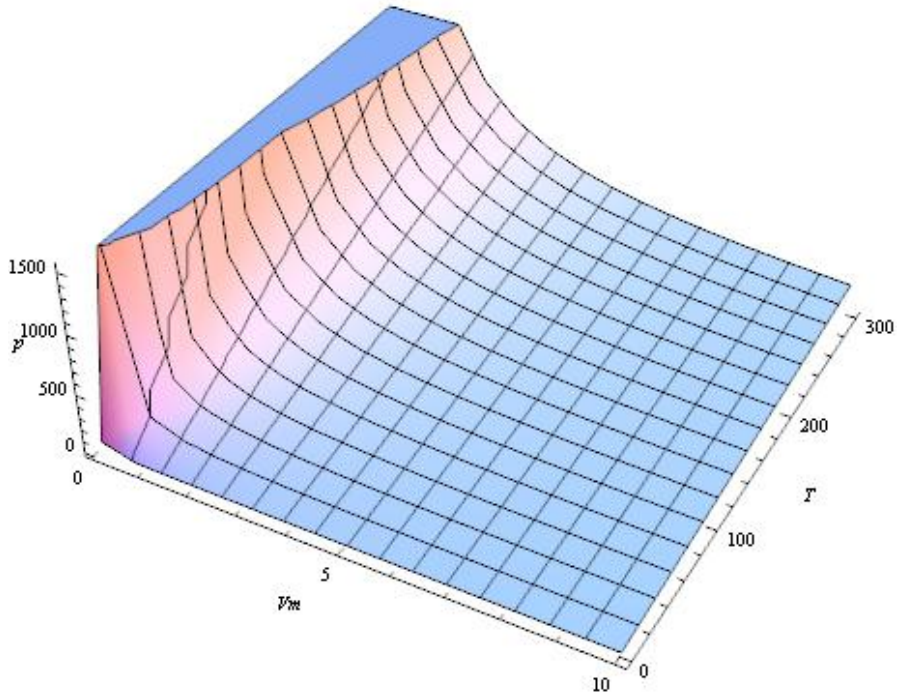
Idealni plin – funkcija tlaka p u ovsinosti o n, T i V – može li se nacrtati graf? Kao alternativa prikazu čitavog grafa funkcije više varijabli uobičajio se sljedeći način: Umjesto crtanja grafa funkcije f s n varijabli, crtaju se n serija grafova funkcije f u ovisnosti o po jednoj od njezinih varijabli, a kad su ostale varijable konstante. Npr., ako f ovisi o $x_1, \ldots, x_n$, prva serija je ovisnost f o x_1, nacrtana kao nekoliko grafova funkcije 1 varijable (uzimajući neke konstantne vrijednosti za $x_2, \ldots, x_n$).
Konkretno, $p = nRT/V$ možemo opisati pomoću tri funkcije jedne varijable: $p_{T,V}(n) = \frac{RT}{V} \cdot n$, $p_{n,V}(T) = \frac{nR}{V} \cdot T$ i $p_{n,T}(V) = nRT \cdot \frac{1}{V}$. Skicirajte odgovarajuće tri serije grafova!

Napomena

Specifično za prikaze ovisnosti $p(n, T, V)$ često se situacija svodi na dvije varijable uvođenjem molarnog volumena $V_\mathrm{m} = V/n$ i zamjenom s funkcijom dviju varijabli $p(T, V_\mathrm{m})$. U ovom slučaju, prethodnim načinom dobivamo izoterme (niz grafova funkcija oblika $p_T(V_\mathrm{m}) = RT/V_\mathrm{m}$ za različite fiksirane vrijednosti T) i izohore (niz grafova funkcija oblika $p_{V_\mathrm{m}}(T) = RT/V_\mathrm{m}$ za različite fiksirane vrijednosti V_m).

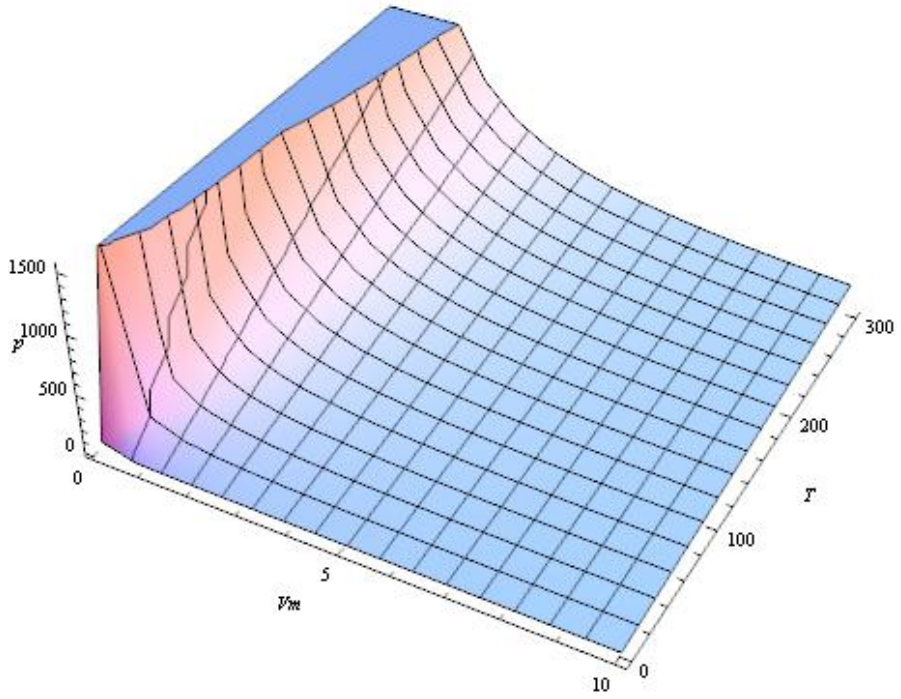
Kako bi izgledale nivo-krivulje funkcije $p = R\frac{T}{V_\mathrm{m}}$ u (T, V_m)-koordinatnom sustavu (izobare)?

Kako bi izgledale nivo-krivulje funkcije $p = R\frac{T}{V_\mathrm{m}}$ u (T, V_m)-koordinatnom sustavu (izobare)? Kako izgleda graf prostornom koordinatnom sustavu?



Vidite li vezu izohora i izotermi s grafom tlaka?

Kako bi izgledale nivo-krivulje funkcije $p = R\frac{T}{V_\mathrm{m}}$ u (T, V_m)-koordinatnom sustavu (izobare)? Kako izgleda graf prostornom koordinatnom sustavu?



Vidite li vezu izohora i izotermi s grafom tlaka?
Izoterme – presjeci grafa funkcije $p(T, V_\mathrm{m})$ paralelne s (p, V_m)-ravninom, gledani duž T-osi
Izohore – presjeci grafa funkcije $p(T, V_\mathrm{m})$ paralelne s (p, T)-ravninom, gledani duž V_m-osi

Zadatak

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

a. $f(x, y) = x^2 + y^2$.
b. $g(x, y) = x^2$.
c. $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.
d. $i(x, y) = x^2 - y^2$.

Kako izgledaju grafovi funkcija f_x *(„izoxice") odnosno* f_y *(„izoyice"), a kako nivo-krivulje funkcije* f *(izozice)? Zaključite kako u prostornom koordinatnom sustavu izgleda graf funkcije* f*!*

Ako gledamo „izo$x$ice" i „izo$y$ice" funkcije dviju varijabli, vidimo da su one grafovi funkcija jedne varijable (y odnosno x):

$$f_x(y) = f(x, y) \quad f_y(x) = f(x, y)$$

To znači da ako ih deriviramo svaku po njihovoj varijabli (dobijemo derivaciju f_x po y odnosno derivaciju f_y po x), te derivacije su nam koeficijenti smjerova tangenti na naše „izo$x$ice" i „izo$y$ice" u odgovarajućim točkama.

Primjer

Koji je koeficijent smjera na izotermu idealnog plina ako je $T = 298{,}0\ K$ i $V_\mathrm{m} = 25{,}0\ L/mol$?

$$p_T(V_\mathrm{m}) = R\frac{T}{V_\mathrm{m}} \Rightarrow p_{298\,\mathrm{K}}(V_\mathrm{m}) = \frac{2477{,}721\ \mathrm{J/mol}}{V_\mathrm{m}},$$

$$p'_{298\,\mathrm{K}}(V_\mathrm{m}) = -\frac{2477{,}721\ \mathrm{J/mol}}{V_\mathrm{m}^2}$$

pa je traženi koeficijent smjera jednak $-\frac{2477{,}721\ \mathrm{J}}{25{,}0\ \mathrm{L}} = 99{,}1 \cdot 10^3\ Pa.$

Parcijalna derivacija prvog reda funkcije f po nekoj njenoj varijabli $\heartsuit$ je isto što i obična prva derivacija izraza kojim je f opisana ako u njemu sve osim $\heartsuit$ smatramo konstantom.

Parcijalna derivacija prvog reda funkcije f po nekoj njenoj varijabli $\heartsuit$ je isto što i obična prva derivacija izraza kojim je f opisana ako u njemu sve osim $\heartsuit$ smatramo konstantom.

Definicija (Parcijalne derivacije prvog reda)

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ skalarna funkcija s n varijabli x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Parcijalna derivacija (prvog reda) od f po varijabli x_i u točki $X \in D$ je, ako postoji, limes

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(X + e_i \Delta x) - f(X)}{\Delta x}.$$

Napomena

$\frac{\partial}{\partial \heartsuit}$ je linearan operator na prostoru funkcija kojima je $\heartsuit$ jedna od varijabli i za koje derivacija po $\heartsuit$ postoji.

Zadatak

Za skalarne funkcije dviju varijabli raspišite gornju definiciju parcijalnih derivacija prvog reda.

U daljnjem pretpostavljamo da sve skalarne funkcije više varijabli posjeduju sve parcijalne derivacije prvog reda.

U daljnjem pretpostavljamo da sve skalarne funkcije više varijabli posjeduju sve parcijalne derivacije prvog reda. Pomoću parcijalnih derivacija definiraju se mnoge termodinamičke veličine.

Primjer

Unutrašnja energija U plina općenito ovisi o temperaturi T, volumenu V, tlaku p i sastavu (množinama sastojaka: $n_1, n_2, \ldots, n_m$). Drugim riječima, U se može shvatiti kao skalarna funkcija $m+3$ varijable. U izohornim okolnostima (V =const.) radi se o funkciji $m+2$ varijable[a], a njena parcijalna derivacija po varijabli T zove se izohornim toplinskim kapacitetom:

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,p,n_1,n_2,\ldots,n_m}.$$

Koje su varijable funkcije C_V, tj. o čemu ovisi izohorni toplinski kapacitet plina?

[a] Zapravo, njih $m+1$ jer jednadžba stanja izražava p u ovisnosti o ostalim varijablama.

Primjer

Ako je Y neko ekstenzivno svojstvo sustava, pripadni reakcijski gradijent je

$$\Delta_r Y = \frac{\partial Y}{\partial \xi},$$

gdje je doseg ξ definiran sa

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}n_\mathrm{J}} = \frac{1}{\nu_\mathrm{J}},$$

a J bilo koji sastojak sustava. Osobito često se koristi reakcijski gradijent Gibbsove energije G, zvan reakcijska Gibbsova energija:

$$\Delta_r G = \frac{\partial G}{\partial \xi}.$$

Kao i u prethodnom primjeru vrijedi: svaka parcijalna derivacija neke skalarne funkcije i dalje ovisi o istim varijablama o kojima i polazna funkcija. Iznos parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial \heartsuit}(\heartsuit_0, \ldots)$ predstavlja aproksimaciju promjene vrijednosti funkcije f ako se varijabla $\heartsuit$ malo promijeni u odnosu na vrijednost $\heartsuit_0$, a ostale varijable ne promijene vrijednost.

Primjer

Uzmimo funkciju definiranu formulom $f(x, y, z) = \frac{x+yz^2}{e^x}$. *Njene parcijalne derivacije prvog reda su:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1 - x - yz^2}{e^x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{z^2}{e^x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{2yz}{e^x}.$$

Kako je $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = 1$, *zaključujemo da se povećanjem* x *od* 0 *do* Δx, *ako pritom* y *i* z *ostaju* 0, *funkcija* f *poveća za približno* $1 \cdot \Delta x$ *u odnosu na svoju vrijednost* $f(0, 0, 0) = 0$. *Primijetimo:* $f(1, 0, 0) = \frac{1}{e} \neq 1$.

Oprez: Samo za funkcije jedne varijable vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Primjerice, može se pokazati korisna formula poznata pod nazivom Eulerovo cikličko pravilo:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Zadatak

U izotermnim odnosno izoentropisjkim okolnostima definirana je izotermna odnosno adijabatsk kompresibilnost (stlačivost)

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n}, \quad \kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{S,n}.$$

Dokažite da vrijedi

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}.$$

Za izvod su nam potrebne sljedeće formule, koje se dadu izvesti iz definicija izohornog i izobarnog toplinskog kapaciteta:

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,n}, \quad C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,n}.$$

Stoga je

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,n}}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,n}}.$$

Korištenjem Eulerovog cikličkog pravila u brojniku i u nazivniku dobije se da je prethodni kvocijent dalje jednak

$$\frac{-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,n}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{S,n}}{-\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,n}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{S,n}} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{T,n}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,n}}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{S,n}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S,n}} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n}}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{S,n}} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}.$$

U zadnjem redu smo za dobivanje prve jednakosti koristili formulu $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}$, za dobivanje druge lančano pravilo, a za dobivanje zadnje smo razlomak proširili faktorom $-\frac{1}{V}$.

Parcijalne derivacije drugog reda

Kako je svaka parcijalna derivacija prvog reda funkcija istih varijabli kao i polazna, moguće je i nju ponovno derivirati po svakoj od njih. Tako dobivamo parcijalne derivacije drugog reda. Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija dviju varijabli? Triju? Njih n?

Parcijalne derivacije drugog reda

Kako je svaka parcijalna derivacija prvog reda funkcija istih varijabli kao i polazna, moguće je i nju ponovno derivirati po svakoj od njih. Tako dobivamo parcijalne derivacije drugog reda. Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija dviju varijabli? Triju? Njih n?

Kao i obično deriviranje, parcijalno deriviranje je linearan operator. Stoga parcijalno deriviranje funkcije f prvo po $\heartsuit$ pa ona po $\spadesuit$ označavamo s

$$\frac{\partial}{\partial \spadesuit}\frac{\partial}{\partial \heartsuit} f = \frac{\partial^2 f}{\partial \spadesuit \partial \heartsuit}.$$

Ako je $\heartsuit = \spadesuit$ (dvaput deriviramo po istoj varijabli), pišemo $\frac{\partial^2 f}{\partial \heartsuit^2}$.

Zadatak

Odredimo parcijalne derivacije drugog reda za funkcije zadane s $f(x,y) = \sin(xy) \cdot e^{x+y}$ *i* $g(x,y) = 4x^2 + 9y^2$. *Što primjećujete?*

U većini „normalnih” slučajeva kod određivanja parcijalnih derivacija drugog reda nije potrebno paziti na redoslijed jer vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Teorem (Schwarz)

Ako u točki X postoje i neprekidne[a] su parcijalne derivacije $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, onda su one jednake (u točki X).

[a] Pojam neprekidnosti nismo definirali za funkcije više varijabli. Kao i u slučaju jedne varijable vrijedi: funkcija je neprekidna ako male promjene njenih varijabli mogu izazvati samo male promjene vrijednosti funkcije. I ovdje vrijedi: funkcije koje su opisane formulom koja je oblika elementarne funkcije su neprekidne na svojoj domeni, neovisno o broju varijabli koje su uvrštene.

Posljedično u većini slučajeva za funkciju od n varijabli nije potrebno računati n^2 već samo $\frac{n(n+1)}{2}$ parcijalnu derivaciju drugog reda.