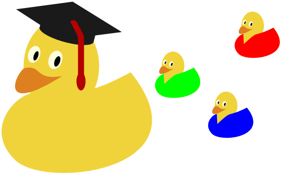
9. predavanje: Determinante. Matrice i sustavi linearnih jednadžbi.

Franka Miriam Brückler



Determinante

Koji smo kriterij invertibilnosti kvadratne matrice reda 2 dokazali?

Determinante

Koji smo kriterij invertibilnosti kvadratne matrice reda 2 dokazali?
Definirajte determinantu kvadratne matrice!

Determinante

Koji smo kriterij invertibilnosti kvadratne matrice reda 2 dokazali?
Definirajte determinantu kvadratne matrice!

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = ?$$

Determinante

Koji smo kriterij invertibilnosti kvadratne matrice reda 2 dokazali?
Definirajte determinantu kvadratne matrice!

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Determinante

Koji smo kriterij invertibilnosti kvadratne matrice reda 2 dokazali?
Definirajte determinantu kvadratne matrice!

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) =?$ $\det(A^*) =?$
- $\det(0_n) =?$

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$
- Za kakve matrice se determinanta najlakše računa?

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$
- Za kakve matrice se determinanta najlakše računa?
- Za kakve matrice „na prvi pogled" vidimo da im je determinanta nula?

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$
- Za kakve matrice se determinanta najlakše računa?
- Za kakve matrice „na prvi pogled" vidimo da im je determinanta nula?
- Je li $\det : M_n \to \mathbb{R}$ linearni funkcional?

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$
- Za kakve matrice se determinanta najlakše računa?
- Za kakve matrice ,,na prvi pogled" vidimo da im je determinanta nula?
- Je li $\det : M_n \to \mathbb{R}$ linearni funkcional?
- Kakav efekt imaju elementarne transformacije na determinantu matrice?

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$
- Za kakve matrice se determinanta najlakše računa?
- Za kakve matrice ,,na prvi pogled" vidimo da im je determinanta nula?
- Je li $\det : M_n \to \mathbb{R}$ linearni funkcional?
- Kakav efekt imaju elementarne transformacije na determinantu matrice?
- Što kaže Binet-Cauchy-jev teorem?

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$
- Za kakve matrice se determinanta najlakše računa?
- Za kakve matrice „na prvi pogled“ vidimo da im je determinanta nula?
- Je li $\det : M_n \to \mathbb{R}$ linearni funkcional?
- Kakav efekt imaju elementarne transformacije na determinantu matrice?
- Što kaže Binet-Cauchy-jev teorem?
- Koja je veza između determinante regularne matrice i determinante njezinog inverza?

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$
- Za kakve matrice se determinanta najlakše računa?
- Za kakve matrice ,,na prvi pogled" vidimo da im je determinanta nula?
- Je li $\det : M_n \to \mathbb{R}$ linearni funkcional?
- Kakav efekt imaju elementarne transformacije na determinantu matrice?
- Što kaže Binet-Cauchy-jev teorem?
- Koja je veza između determinante regularne matrice i determinante njezinog inverza?
- Što vrijedi za determinante matrica ortgonalnih operatora?

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$
- Za kakve matrice se determinanta najlakše računa?
- Za kakve matrice ,,na prvi pogled" vidimo da im je determinanta nula?
- Je li $\det : M_n \to \mathbb{R}$ linearni funkcional?
- Kakav efekt imaju elementarne transformacije na determinantu matrice?
- Što kaže Binet-Cauchy-jev teorem?
- Koja je veza između determinante regularne matrice i determinante njezinog inverza?
- Što vrijedi za determinante matrica ortgonalnih operatora? Unitarnih operatora?

Svojstva determinanti

- $\det(A^t) = ?$ $\det(A^*) = ?$
- $\det(0_n) = ?$ $\det(I_n) = ?$
- Za kakve matrice se determinanta najlakše računa?
- Za kakve matrice ,,na prvi pogled" vidimo da im je determinanta nula?
- Je li $\det : M_n \to \mathbb{R}$ linearni funkcional?
- Kakav efekt imaju elementarne transformacije na determinantu matrice?
- Što kaže Binet-Cauchy-jev teorem?
- Koja je veza između determinante regularne matrice i determinante njezinog inverza?
- Što vrijedi za determinante matrica ortgonalnih operatora? Unitarnih operatora?
- Koje su invarijante linearnih operatora?

Zadatak

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 10 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Zadatak

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 10 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Zadatak

Može li u ikojoj bazi

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

biti matrica nekog operatora simetrije na $V^2(O)$*?*

Zadatak

Iskažite i dokažite kristalografsku restrikciju.

Zadatak

Dokažite da je volumen paralelepiped kojemu bridovi imaju duljine a, b, c, a po dva (drugi i treći, prvi i treći, prvi i drugi) zatvaraju kutove α, β, γ *jednak*

$$\sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix}}.$$

Zadatak

Dokažite da je volumen paralelepiped kojemu bridovi imaju duljine a, b, c, a po dva (drugi i treći, prvi i treći, prvi i drugi) zatvaraju kutove α, β, γ *jednak*

$$\sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix}}.$$

Zadatak

Za neki kristal pripadna kristalografska direktna baza ima parametre $a = b = c = 2{,}55\,\text{Å}$, $\alpha = \beta = \gamma = 75{,}5^\circ$. *Izračunajte* d_{111}, V^* *i kut između vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{a}^*$.

Zadatak

Dokažite da je volumen paralelepiped kojemu bridovi imaju duljine a, b, c, a po dva (drugi i treći, prvi i treći, prvi i drugi) zatvaraju kutove α, β, γ *jednak*

$$\sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix}}.$$

Zadatak

Za neki kristal pripadna kristalografska direktna baza ima parametre $a = b = c = 255\,\text{Å}$, $\alpha = \beta = \gamma = 75{,}5^\circ$. *Izračunajte* d_{111}, V^* *i kut između vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{a}^*$.

Zadatak

Dokažite da je za svaku direktnu bazu metrički tenzor njezine recipročne baze inverz njenog metričkog tenzora.

Matrice i sustavi linearnih jednadžbi

Zadatak

Parametrima $a = b = 2\,\mathrm{cm}$, $c = 5\,\mathrm{cm}$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$ *je zadana direktna baza prostora* $V^3(O)$. *Linearan operator* $\hat{A}$ *na* $V^3(O)$ *zadan je s* $\hat{A}\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$, $\hat{A}\vec{b} = 2\vec{b}$, $\hat{A}\vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$. *Je li taj operator operator simetrije? Postoji li* $\vec{v}$ *kojeg* $\hat{A}$ *preslikava u vektor* $[2, 1, 1]$*? A u* $[0, 5, 4]$*?*

Matrice i sustavi linearnih jednadžbi

Zadatak

Parametrima $a = b = 2\,\mathrm{cm}$, $c = 5\,\mathrm{cm}$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$ *je zadana direktna baza prostora* $V^3(O)$. *Linearan operator* $\hat{A}$ *na* $V^3(O)$ *zadan je s* $\hat{A}\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$, $\hat{A}\vec{b} = 2\vec{b}$, $\hat{A}\vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$. *Je li taj operator operator simetrije? Postoji li* $\vec{v}$ *kojeg* $\hat{A}$ *preslikava u vektor* $[2, 1, 1]$*? A u* $[0, 5, 4]$*?*

Rješavanje $m \times n$-sustava s matricom $(A|B)$ ekvivalentno je traženju vektora x u domeni operatora $\hat{A}$, čija je A matrica, takvog da je

$$AX = B,$$

gdje su u X koordinate od x s obzirom na bazu domene odabranu za A, a B interpretiramo kao vektor kodomene s koordinatama baze kodomene odabrane za A. Matrični zapis sustava linearnih jednadžbi je stoga matrična jednadžba $AX = B$.

Zadatak

Dokažite da je skup rješenja svakog homogenog $m \times n$-sustava potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Zadatak

Dokažite da je skup rješenja svakog homogenog $m \times n$-sustava potprostor od $\mathbb{R}^n$. Dokažite da svaki sustav linearnih jednadžbi ako ima više od jednog rješenja, ima ih beskonačno mnogo.

Zadatak

Dokažite da je skup rješenja svakog homogenog $m \times n$-sustava potprostor od $\mathbb{R}^n$. Dokažite da svaki sustav linearnih jednadžbi ako ima više od jednog rješenja, ima ih beskonačno mnogo.

Zadatak

Ako je zadan $n \times n$-sustav $AX = B$ i ako je A regularna, što možete zaključiti o rješenjima tog sustava?

Zadatak

Dokažite da je skup rješenja svakog homogenog $m \times n$-sustava potprostor od $\mathbb{R}^n$. Dokažite da svaki sustav linearnih jednadžbi ako ima više od jednog rješenja, ima ih beskonačno mnogo.

Zadatak

Ako je zadan $n \times n$-sustav $AX = B$ i ako je A regularna, što možete zaključiti o rješenjima tog sustava? Je li formula $X = A^{-1}B$ korisna za rješavanje takvih sustava?

Zadatak

Dokažite da je skup rješenja svakog homogenog $m \times n$-sustava potprostor od $\mathbb{R}^n$. Dokažite da svaki sustav linearnih jednadžbi ako ima više od jednog rješenja, ima ih beskonačno mnogo.

Zadatak

Ako je zadan $n \times n$-sustav $AX = B$ i ako je A regularna, što možete zaključiti o rješenjima tog sustava? Je li formula $X = A^{-1}B$ korisna za rješavanje takvih sustava?

Zadatak

Što je Cramerov sustav?

Zadatak

Dokažite da je skup rješenja svakog homogenog $m \times n$-sustava potprostor od $\mathbb{R}^n$. Dokažite da svaki sustav linearnih jednadžbi ako ima više od jednog rješenja, ima ih beskonačno mnogo.

Zadatak

Ako je zadan $n \times n$-sustav $AX = B$ i ako je A regularna, što možete zaključiti o rješenjima tog sustava? Je li formula $X = A^{-1}B$ korisna za rješavanje takvih sustava?

Zadatak

Što je Cramerov sustav? A Cramerovo pravilo?

Zadatak

Dokažite da je skup rješenja svakog homogenog $m \times n$-sustava potprostor od $\mathbb{R}^n$. Dokažite da svaki sustav linearnih jednadžbi ako ima više od jednog rješenja, ima ih beskonačno mnogo.

Zadatak

Ako je zadan $n \times n$-sustav $AX = B$ i ako je A regularna, što možete zaključiti o rješenjima tog sustava? Je li formula $X = A^{-1}B$ korisna za rješavanje takvih sustava?

Zadatak

Što je Cramerov sustav? A Cramerovo pravilo? Koje su mu prednosti i mane?

Zadatak

Dokažite da je skup rješenja svakog homogenog $m \times n$*-sustava potprostor od* $\mathbb{R}^n$*. Dokažite da svaki sustav linearnih jednadžbi ako ima više od jednog rješenja, ima ih beskonačno mnogo.*

Zadatak

Ako je zadan $n \times n$*-sustav* $AX = B$ *i ako je* A *regularna, što možete zaključiti o rješenjima tog sustava? Je li formula* $X = A^{-1}B$ *korisna za rješavanje takvih sustava?*

Zadatak

Što je Cramerov sustav? A Cramerovo pravilo? Koje su mu prednosti i mane?

Zadatak

Za koje realne brojeve m *i* n *sustav* $mx + ny = 1$, $x + y = mn$ *ima jedinstveno rješenje? Odredite ga!*