

Plohe u prostoru i ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Franka Miriam Brückler

Gradijent skalarne funkcije

$$f(x, y) = y \ln x$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln x.$$

Gradijent skalarne funkcije

$$f(x, y) = y \ln x$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln x.$$

Dakle, za svaki uređeni par $X = (x, y)$ u domeni od f dobili smo pripadni uređeni par parcijalnih derivacija:

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{y}{x}, \ln x \right)$$

Taj par nazivamo gradijentom od f u točki X :

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x}, \ln x \right).$$

Gradijent skalarne funkcije

$$f(x, y) = y \ln x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln x.$$

Dakle, za svaki uređeni par $X = (x, y)$ u domeni od f dobili smo pripadni uređeni par parcijalnih derivacija:

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{y}{x}, \ln x \right)$$

Taj par nazivamo gradijentom od f u točki X :

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x}, \ln x \right).$$

$$\nabla f(1, 1) = (1, 0), \quad \nabla f(e, e^2) =$$

Gradijent skalarne funkcije

$$f(x, y) = y \ln x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln x.$$

Dakle, za svaki uređeni par $X = (x, y)$ u domeni od f dobili smo pripadni uređeni par parcijalnih derivacija:

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{y}{x}, \ln x \right)$$

Taj par nazivamo gradijentom od f u točki X :

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x}, \ln x \right).$$

$$\nabla f(1, 1) = (1, 0), \quad \nabla f(e, e^2) = (e, 1), \dots$$

Gradijent skalarne funkcije

$$f(x, y) = y \ln x$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln x.$$

Dakle, za svaki uređeni par $X = (x, y)$ u domeni od f dobili smo pripadni uređeni par parcijalnih derivacija:

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{y}{x}, \ln x \right)$$

Taj par nazivamo gradijentom od f u točki X :

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x}, \ln x \right).$$

$\nabla f(1, 1) = (1, 0)$, $\nabla f(e, e^2) = (e, 1)$, ... Elemente domene X u ovom je slučaju uobičajeno interpretirati kao točke, a njima pridružene gradijente kao geometrijske vektore koji počinju u X .

Definicija

Gradijent skalarne funkcije f u nekoj točki X njene domene je vektor $\nabla f(X)$ prvih parcijalnih derivacija od f izračunatih u toj točki:

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \dots \right).$$

Definicija

Gradijent skalarne funkcije f u nekoj točki X njene domene je vektor $\nabla f(X)$ prvih parcijalnih derivacija od f izračunatih u toj točki:

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \dots \right).$$

Primjer

Nivo-krivulje za
 $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ su

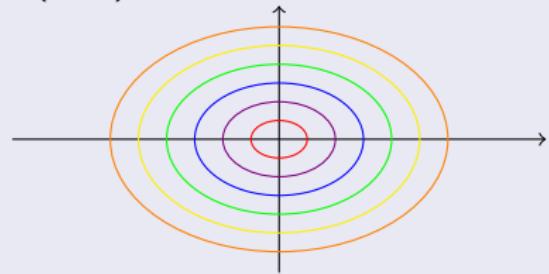
Definicija

Gradijent skalarne funkcije f u nekoj točki X njene domene je vektor $\nabla f(X)$ prvih parcijalnih derivacija od f izračunatih u toj točki:

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \dots \right).$$

Primjer

Nivo-krivulje za $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ su



Odaberite nivo-krivulju koja odgovara vrijednosti $z = 1$ i skicirajte ∇f duž te krivulje. Je li taj gradijent igdje nulvektor? Kako tangente leže u odnosu na gradijente u istim točkama?

Krivulje u ravnini

Ako je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $f(x, y) = C$ (dakle, ako je zadana kao nivo-krivulja neke skalarne funkcije dviju varijabli),¹ onda je u svakoj točki (x, y) te krivulje $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ vektor okomit na tangentu u toj točki:

Krivulja u ravnini \mathbb{R}^2 zadaje se jednadžbom oblika

$$f(x, y) = C$$

¹Podsjetimo se: Točke na krivulji $f(x, y) = C$ čine podskup domene od f (one točke domene za koje f postiže vrijednost C).

Krivulje u ravnini

Ako je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $f(x, y) = C$ (dakle, ako je zadana kao nivo-krivulja neke skalarne funkcije dviju varijabli),¹ onda je u svakoj točki (x, y) te krivulje $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ vektor okomit na tangentu u toj točki:

Krivulja u ravnini \mathbb{R}^2 zadaje se jednadžbom oblika

$$f(x, y) = C$$

uz uvjet $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ za sve (x, y) na krivulji (dakle, ako $f(x, y) = C$, onda $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$).

¹Podsjetimo se: Točke na krivulji $f(x, y) = C$ čine podskup domene od f (one točke domene za koje f postiže vrijednost C).

Krivulje u ravnini

Ako je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $f(x, y) = C$ (dakle, ako je zadana kao nivo-krivulja neke skalarne funkcije dviju varijabli),¹ onda je u svakoj točki (x, y) te krivulje $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ vektor okomit na tangentu u toj točki:

Krivulja u ravnini \mathbb{R}^2 zadaje se jednadžbom oblika

$$f(x, y) = C$$

uz uvjet $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ za sve (x, y) na krivulji (dakle, ako $f(x, y) = C$, onda $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$). Koeficijent smjera tangente u točki (x, y) na krivulji $f(x, y) = C$ je

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}.$$

¹Podsjetimo se: Točke na krivulji $f(x, y) = C$ čine podskup domene od f (one točke domene za koje f postiže vrijednost C).

Krivulje u ravnini

Ako je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $f(x, y) = C$ (dakle, ako je zadana kao nivo-krivulja neke skalarne funkcije dviju varijabli),¹ onda je u svakoj točki (x, y) te krivulje $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ vektor okomit na tangentu u toj točki:

Krivulja u ravnini \mathbb{R}^2 zadaje se jednadžbom oblika

$$f(x, y) = C$$

uz uvjet $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ za sve (x, y) na krivulji (dakle, ako $f(x, y) = C$, onda $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$). Koeficijent smjera tangente u točki (x, y) na krivulji $f(x, y) = C$ je

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}.$$

¹Podsjetimo se: Točke na krivulji $f(x, y) = C$ čine podskup domene od f (one točke domene za koje f postiže vrijednost C).

Plohe u prostoru

Definicija (Ploha u \mathbb{R}^3)

Za zadanu konstantu C , ploha zadana funkcijom $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je skup

$$S = \{(x, y, z) \in D : f(x, y, z) = C\} \subseteq D,$$

uz uvjet da je

$$\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

za svaku točku $(x, y, z) \in S$.

Plohe u prostoru

Definicija (Ploha u \mathbb{R}^3)

Za zadanu konstantu C , ploha zadana funkcijom $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je skup

$$S = \{(x, y, z) \in D : f(x, y, z) = C\} \subseteq D,$$

uz uvjet da je

$$\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

za svaku točku $(x, y, z) \in S$.

Zadatak

Pokažite da su sljedeći skupovi plohe u prostoru:

- sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$;
- svaka ravnina;
- graf svake derivabilne funkcije dviju varijabli.



Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju koja odgovara vrijednosti 1? Usporedite to s gradijentom na nivo-krivuljama iste funkcije koje odgovaraju vrijednostima 4 i 9!

Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju koja odgovara vrijednosti 1? Usporedite to s gradijentom na nivo-krivuljama iste funkcije koje odgovaraju vrijednostima 4 i 9! A kako leže vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ u odnosu na plohe zadane s $f(x, y, z) = r^2$ za $r = 1, 2, 3$?

Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju koja odgovara vrijednosti 1? Usporedite to s gradijentom na nivo-krivuljama iste funkcije koje odgovaraju vrijednostima 4 i 9! A kako leže vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ u odnosu na plohe zadane s $f(x, y, z) = r^2$ za $r = 1, 2, 3$?

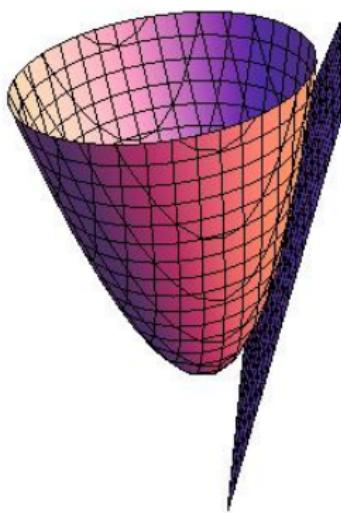
Gradijent (njegov smjer i orientacija) u točki nivo-krivulje odnosno nivo-plohe pokazuje smjer pomakom u kojem dolazi do najvećeg porasta vrijednosti funkcije koja zadaje krivulju odnosno plohu.

Primjer

Ako je f funkcija koja opisuje trenutnu temperaturu u pojedinoj točki X Zemljine atmosfere, onda vektor $\nabla f(X)$ pokazuje u kojem smjeru se objekt na poziciji X treba pomaknuti tako da mu bude što toplije.

Ima li smisla govoriti o tangenti na sferu ili neku drugu plohu?
Zašto?

Ima li smisla govoriti o tangenti na sferu ili neku drugu plohu?
Zašto?



Definicija (Tangencijalna ravnina na plohu)

Tangencijalna ravnina na plohu $F(x, y, z) = 0$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.

Kako onda glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki?

Definicija (Tangencijalna ravnina na plohu)

Tangencijalna ravnina na plohu $F(x, y, z) = 0$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.

Kako onda glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki? A jednadžba normale?

Definicija (Tangencijalna ravnina na plohu)

Tangencijalna ravnina na plohu $F(x, y, z) = 0$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.

Kako onda glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki? A jednadžba normale?

Može li tangencijalna ravnina na graf skalarne funkcije dviju varijabli biti paralelna sa z -osi? Zašto?

Definicija (Tangencijalna ravnina na plohu)

Tangencijalna ravnina na plohu $F(x, y, z) = 0$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.

Kako onda glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki? A jednadžba normale?

Može li tangencijalna ravnina na graf skalarne funkcije dviju varijabli biti paralelna sa z -osi? Zašto?

Podsjetite se kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^2$, $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x, y) = x^2 - y^2$. Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme? Globalne? Ako da, gdje?

Definicija (Tangencijalna ravnina na plohu)

Tangencijalna ravnina na plohu $F(x, y, z) = 0$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.

Kako onda glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki? A jednadžba normale?

Može li tangencijalna ravnina na graf skalarne funkcije dviju varijabli biti paralelna sa z -osi? Zašto?

Podsjetite se kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^2$, $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x, y) = x^2 - y^2$. Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme? Globalne? Ako da, gdje? Što je neobično za točku $(0, 0, 0)$ na grafu funkcije i ?

Definicija (Tangencijalna ravnina na plohu)

Tangencijalna ravnina na plohu $F(x, y, z) = 0$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.

Kako onda glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki? A jednadžba normale?

Može li tangencijalna ravnina na graf skalarne funkcije dviju varijabli biti paralelna sa z -osi? Zašto?

Podsjetite se kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^2$, $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x, y) = x^2 - y^2$. Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme? Globalne? Ako da, gdje? Što je neobično za točku $(0, 0, 0)$ na grafu funkcije i ? Kako u njoj i točkama ekstrema ostalih funkcija leže tangencijalne ravnine na grafove?

Definicija (Lokalni i globalni ekstremi skalarnih funkcija)

Za skalarnu funkciju $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ točku $X_0 \in D$ zovemo

- točkom lokalnog minimuma odnosno maksimuma funkcije f ako za sve $X \in D$ iz neke okoline od X_0 vrijedi $f(X) \geq f(X_0)$ odnosno $f(X) \leq f(X_0)$;
- točkom globalnog minimuma odnosno maksimuma funkcije f ako za sve $X \in D$ vrijedi $f(X) \geq f(X_0)$ odnosno $f(X) \leq f(X_0)$.

Stacionarna točka skalarne funkcije je nultočka njenog gradijenta, tj. element domene u kojem su sve parcijalne derivacije prvog reda jednake nuli. Ako se radi o funkciji dviju varijabli, u stacionarnoj je točki tangencijalna ravnina na graf paralelna s ravninom domene $((x, y)\text{-ravninom})$.

Iako i za funkcije više varijabli ima smisla gledati općenitije kritične točke, kako smo se ograničili na funkcije koje u svim točkama domene posjeduju parcijalne derivacije prvog reda, pri ispitivanju ekstremi funkcija ograničiti ćemo se na stacionarne točke kao kandidate za točke ekstrema.

Hesseova matrica

Kako za stacionarnu točku realne funkcije jedne varijable provjeravamo je li točka ekstrema?

Hesseova matrica

Kako za stacionarnu točku realne funkcije jedne varijable provjeravamo je li točka ekstrema?

Definicija (Hesseova matrica)

Za skalarnu funkciju f od n varijabli koja posjeduje sve parcijalne derivacije drugog reda (u točki X iz svoje domene) njena Hesseova matrica (u toj točki) je matrica $H = H(f)(X)$ koja na poziciji (i,j) ima iznos $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(X)$.

Zbog Schwarzovog teorema, za funkcije s neprekidnim parcijalnim derivacijama drugog reda (a to su gotovo sve koje se mogu susresti u primjenama) Hesseova matrica je simetrična.

Definicija (Minore kvadratne matrice)

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njene (glavne) minore su determinante kvadratnih matrica $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = A$, gdje je A_k matrica koja se iz A dobije tako da uzmemo njenih prvih k redaka i k stupaca (tj. $A_i = (a_{ij}) \in M_k$).

Funkcija f u stacionarnoj točki X_0 ima

- lokalni minimum ako su sve minore Hesseove matrice $H(f)(X_0)$ pozitivne.
- lokalni maksimum ako predznaci minora Hesseove matrice $H(f)(X_0)$ alterniraju počevši s negativnim.

Definicija (Minore kvadratne matrice)

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$, njene (glavne) minore su determinante kvadratnih matrica $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = A$, gdje je A_k matrica koja se iz A dobije tako da uzmemo njenih prvih k redaka i k stupaca (tj. $A_i = (a_{ij}) \in M_k$).

Funkcija f u stacionarnoj točki X_0 ima

- lokalni minimum ako su sve minore Hesseove matrice $H(f)(X_0)$ pozitivne.
- lokalni maksimum ako predznaci minora Hesseove matrice $H(f)(X_0)$ alterniraju počevši s negativnim.

U slučaju da uvjet na predznaće ne vrijedi strogo, tj. neke od minora su nula, ali nema negativnih ili pak alterniraju tako da neparne po redu nisu pozitivne, a parne nisu negativne, potrebno je drugim metodama provjeriti radi li se o točki lokalnog ekstrema. U preostalim slučajevima govorimo o sedlastoj točki: **Sedlasta točka funkcije** je stacionarna točka koja nije točka ekstrema.

Odredimo lokalne ekstreme funkcije zadane formulom

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y.$$

Njen gradijent je

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 2xy, x^2 - 2y - 4),$$

a Hesseova matrica je

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}.$$

Odredimo lokalne ekstreme funkcije zadane formulom

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y.$$

Njen gradijent je

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 2xy, x^2 - 2y - 4),$$

a Hesseova matrica je

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}.$$

Stacionarne točke od f su $(0, -2)$, $(1, -3/2)$ i $(-4, 6)$.

Odredimo lokalne ekstreme funkcije zadane formulom

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y.$$

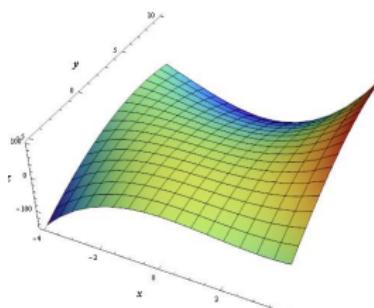
Njen gradijent je

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 2xy, x^2 - 2y - 4),$$

a Hesseova matrica je

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}.$$

Stacionarne točke od f su $(0, -2)$, $(1, -3/2)$ i $(-4, 6)$. Od njih je $(0, -2)$ točka lokalnog maksimuma, a druge dvije stacionarne točke su sedlaste.



Uvjetni ekstremi

Primjer

Treba odrediti dimenzije otvoren kutije oblika kvadra maksimalnog obujma koja ima oplošje 64 cm^2 .

Ako su x , y i z tražene duljine bridova te kutije (u centimetrima), zadatak se svodi na

²Uvjeti moraju biti takvi da je ∇g različit od nulvektora za sve točke koje zadovoljavaju uvjet.

Uvjetni ekstremi

Primjer

Treba odrediti dimenzije otvoren kutije oblika kvadra maksimalnog obujma koja ima oplošje 64 cm^2 .

Ako su x , y i z tražene duljine bridova te kutije (u centimetrima), zadatak se svodi na određivanje maksimuma funkcije

$$f(x, y, z) = xyz$$

uz uvjet

$$2xy + 2xz + yz = 64.$$

²Uvjeti moraju biti takvi da je ∇g različit od nulvektora za sve točke koje zadovoljavaju uvjet.

Uvjetni ekstremi

Primjer

Treba odrediti dimenzije otvoren kutije oblika kvadra maksimalnog obujma koja ima oplošje 64 cm^2 .

Ako su x , y i z tražene duljine bridova te kutije (u centimetrima), zadatak se svodi na određivanje maksimuma funkcije

$$f(x, y, z) = xyz$$

uz uvjet

$$2xy + 2xz + yz = 64.$$

Problem koji želimo riješiti je određivanje ekstrema funkcije zadane formulom $f(x, y, \dots)$ uz jedan ili više uvjeta² oblika $g(x, y, \dots) = 0$.

²Uvjeti moraju biti takvi da je ∇g različit od nulvektora za sve točke koje zadovoljavaju uvjet.

Primjer

Godine 1613., Johannes Kepler se u Linzu po drugi puta ženio. Za svadbu je nabavio bačvu vina, no pri kupnji mu se čudnom učinila metoda kojom je trgovac određivao cijenu vina: Cijenu je uzeo razmjernu volumenu, ali volumen je određivao pomoću štapa kojeg je provukao kroz rupu u sredini ruba bačve, dok na suprotnoj strani ne dotakne jedan od kružnih krajeva te zatim izmjerio koliko je dug mokri dio štapa. Kepler je primijetio da mokri dio štapa može biti jednak dug za bačve različitih volumena te je odlučio odrediti za kakve je dimenzije bačve i danu duljinu mokrog dijela štapa (cijenu) volumen bačve najveći. U tu je svrhu zamislio da su bačve valjkastog oblika.

Koliko iznosi omjer promjera i duljine valjkaste bačve maksimalnog volumena ako je fiksirana duljina mokrog dijela štapa?

$$V(d, h) = r^2 h \pi = \frac{\pi}{4} d^2 h \rightarrow \max$$

$$V(d, h) = r^2 h \pi = \frac{\pi}{4} d^2 h \rightarrow \max$$

$$d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = L = \text{const.}$$

$$V(d, h) = r^2 h \pi = \frac{\pi}{4} d^2 h \rightarrow \max$$

$$d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = L = \text{const.}$$

$$d^2 = L - \frac{h^2}{4} \Rightarrow V(h) = \frac{L\pi}{4} h - \frac{\pi}{16} h^3$$

$$V(d, h) = r^2 h \pi = \frac{\pi}{4} d^2 h \rightarrow \max$$

$$d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = L = \text{const.}$$

$$d^2 = L - \frac{h^2}{4} \Rightarrow V(h) = \frac{L\pi}{4} h - \frac{\pi}{16} h^3$$

$$V'(h) = \frac{L\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} h^2 = 0 \Rightarrow h = +2\sqrt{\frac{L}{3}}$$

$$V(d, h) = r^2 h \pi = \frac{\pi}{4} d^2 h \rightarrow \max$$

$$d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = L = \text{const.}$$

$$d^2 = L - \frac{h^2}{4} \Rightarrow V(h) = \frac{L\pi}{4}h - \frac{\pi}{16}h^3$$

$$V'(h) = \frac{L\pi}{4} - \frac{3\pi}{16}h^2 = 0 \Rightarrow h = +2\sqrt{\frac{L}{3}}$$

$$d^2 = \frac{2L}{3} \Rightarrow d : h = \sqrt{L/3}$$

Zašto smo sigurni da za taj omjer imamo maksimalni volumen uz danu cijenu?

Metoda Lagrangeovih multiplikatora

Za svaki od uvjeta uvodi se po jedna nova varijabla, tzv.

Lagrangeov multiplikator λ te se formira nova funkcija koja ovisi o polaznim varijablama x, y, \dots i Lagrangeovim multiplikatorima λ, \dots :

$$F(x, y, \dots, \lambda, \dots) = f(x, y, \dots) - \lambda g(x, y, \dots) - \dots$$

Ta nova funkcija zove se **Lagrangeova funkcija**.

Primjer

Za problem s kutijom maksimalnog volumena

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(2xy + 2yz + xz - 64).$$

Teorem

Ako polazna funkcija f postiže traženi uvjetni ekstrem u točki (x, y, \dots) , onda postoje Lagrangeovi multiplikatori λ, \dots tako da je $X = (x, y, \dots, \lambda, \dots)$ stacionarna točka za Lagrangeovu funkciju F .

Primijetimo: $\nabla F(X) = \mathbf{0}$ ako i samo ako je $\nabla f(x, y, \dots) = \mathbf{0}$ i zadovoljeni su svi uvjeti polaznog problema.

Teorem

Ako polazna funkcija f postiže traženi uvjetni ekstrem u točki (x, y, \dots) , onda postoje Lagrangeovi multiplikatori λ, \dots tako da je $X = (x, y, \dots, \lambda, \dots)$ stacionarna točka za Lagrangeovu funkciju F .

Primijetimo: $\nabla F(X) = \mathbf{0}$ ako i samo ako je $\nabla f(x, y, \dots) = \mathbf{0}$ i zadovoljeni su svi uvjeti polaznog problema.

Geometrijska interpretacija za slučaj dvije varijable x i y i jednog uvjeta $g(x, y) = 0$: Uvjet je

Teorem

Ako polazna funkcija f postiže traženi uvjetni ekstrem u točki (x, y, \dots) , onda postoje Lagrangeovi multiplikatori λ, \dots tako da je $X = (x, y, \dots, \lambda, \dots)$ stacionarna točka za Lagrangeovu funkciju F .

Primjetimo: $\nabla F(X) = \mathbf{0}$ ako i samo ako je $\nabla f(x, y, \dots) = \mathbf{0}$ i zadovoljeni su svi uvjeti polaznog problema.

Geometrijska interpretacija za slučaj dvije varijable x i y i jednog uvjeta $g(x, y) = 0$: Uvjet je krivulja u ravnini koja je podskup domene od f . Na njoj tražimo točku u kojoj f postiže minimum/maksimum. Mogli bismo u (x, y) -ravnini crtati nivo-krivulje funkcije f i tražimo onu s najvećom vrijednošću koja dodiruje krivulju $g(x, y) = 0$.

Teorem

Ako polazna funkcija f postiže traženi uvjetni ekstrem u točki (x, y, \dots) , onda postoje Lagrangeovi multiplikatori λ, \dots tako da je $X = (x, y, \dots, \lambda, \dots)$ stacionarna točka za Lagrangeovu funkciju F .

Primijetimo: $\nabla F(X) = \mathbf{0}$ ako i samo ako je $\nabla f(x, y, \dots) = \mathbf{0}$ i zadovoljeni su svi uvjeti polaznog problema.

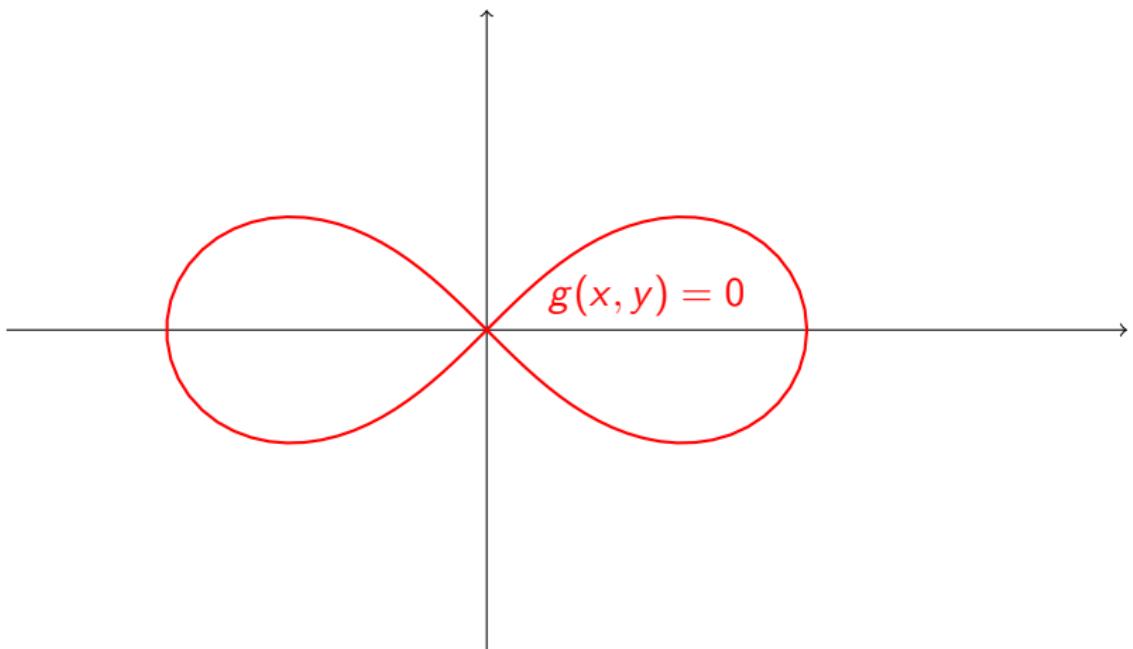
Geometrijska interpretacija za slučaj dvije varijable x i y i jednog uvjeta $g(x, y) = 0$: Uvjet je krivulja u ravnini koja je podskup domene od f . Na njoj tražimo točku u kojoj f postiže minimum/maksimum. Mogli bismo u (x, y) -ravnini crtati nivo-krivulje funkcije f i tražimo onu s najvećom vrijednošću koja dodiruje krivulju $g(x, y) = 0$. Uvjet $\nabla F(x, y, \lambda) = 0$ svodi se sad na $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, $g(x, y) = 0$, dakle na traženje točke na krivulji u kojoj su gradijenti od f i g kolinearni.

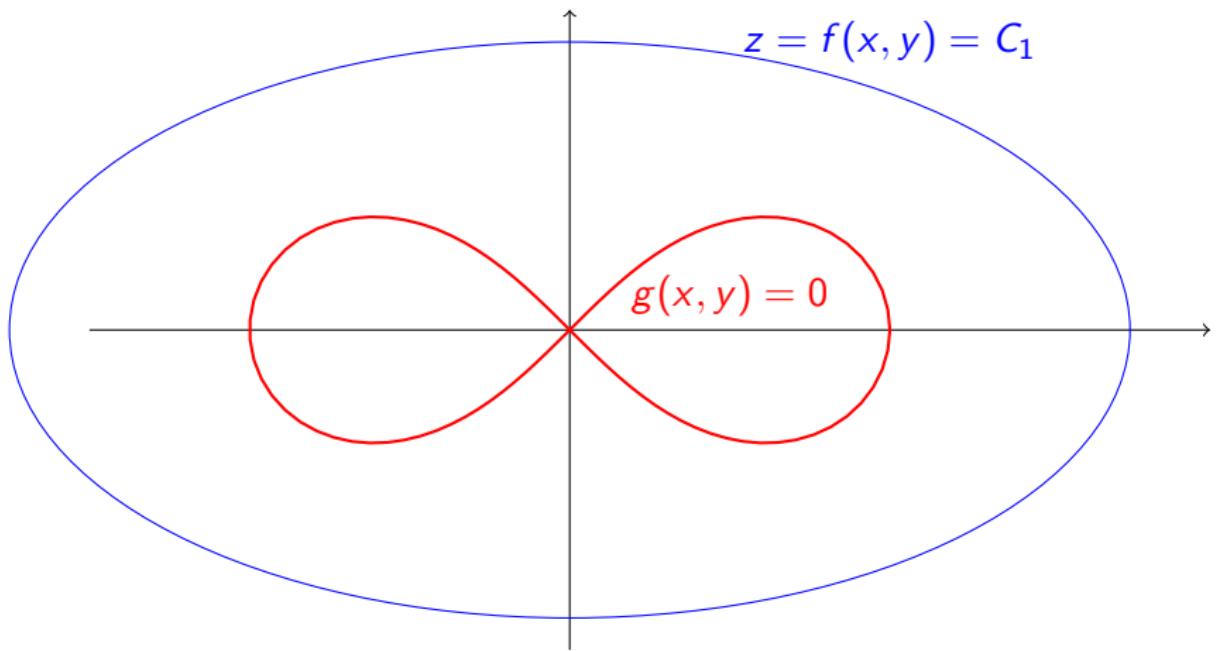
Gradijent; plohe u prostoru
oooooooo

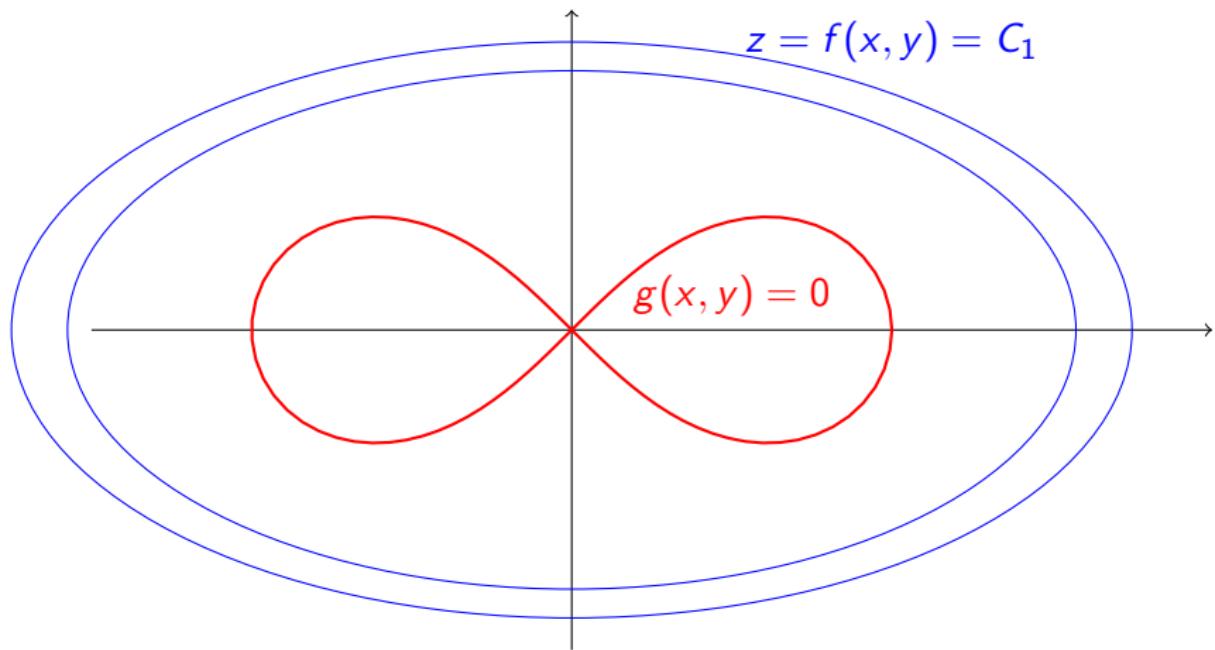
Određivanje lokalnih ekstremi skalarnih funkcija
oooo

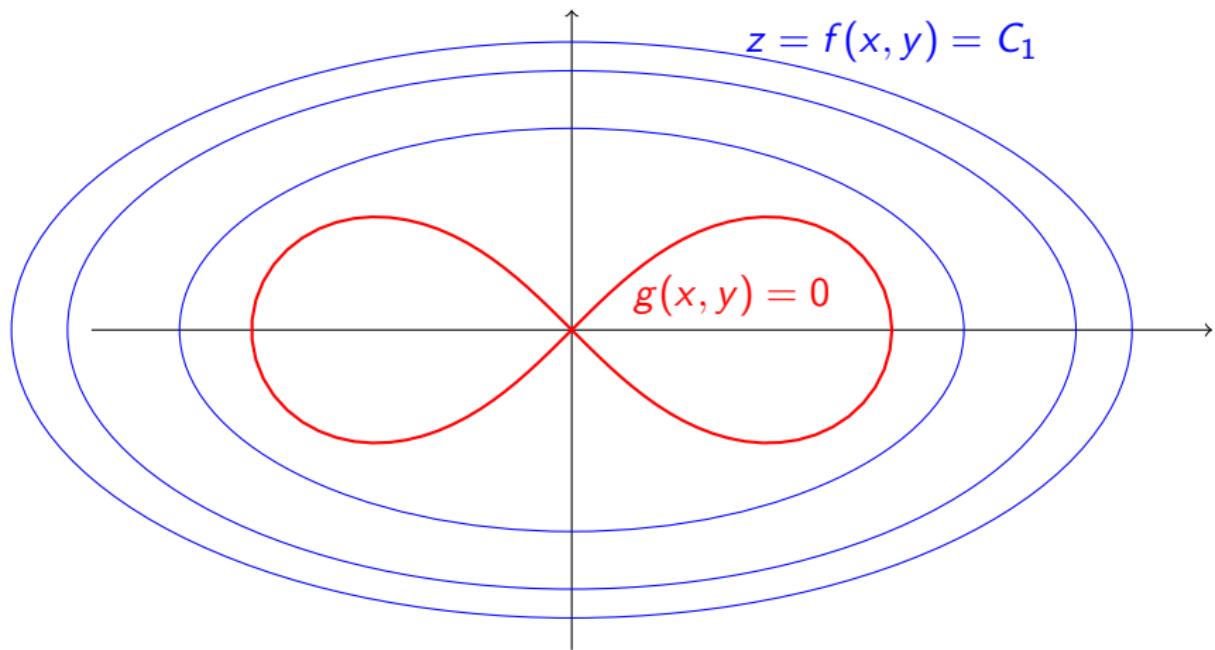
Uvjetni ekstremi
ooooo●ooo

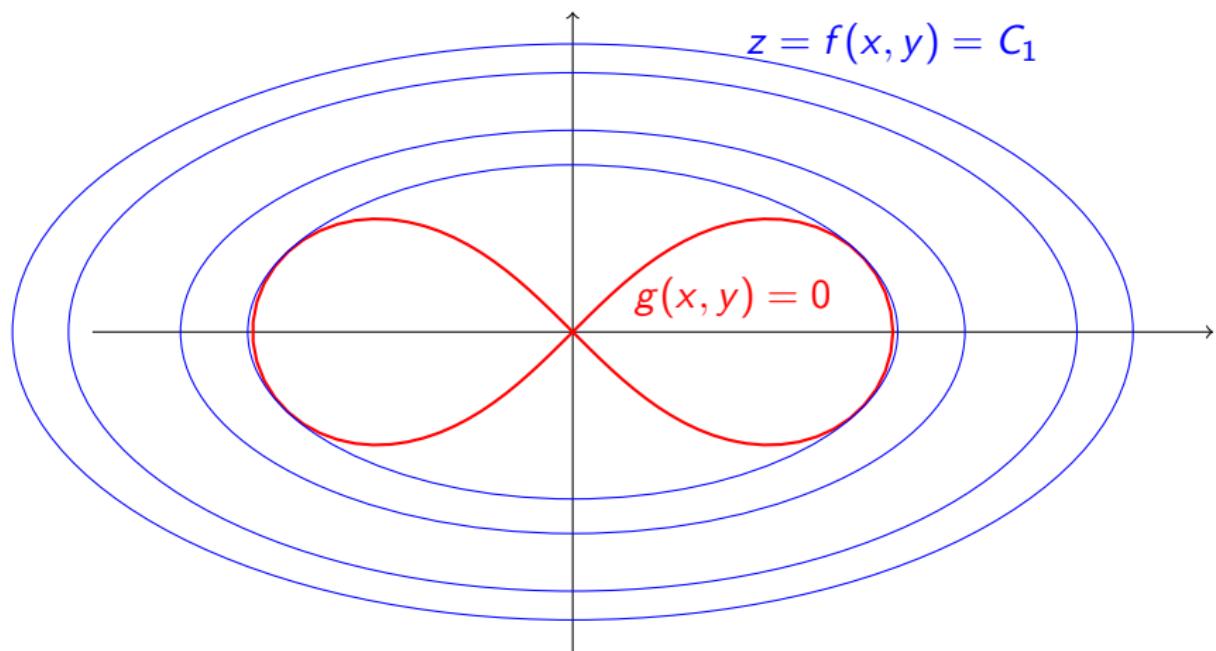
Metoda najmanjih kvadrata
oooooooooooo

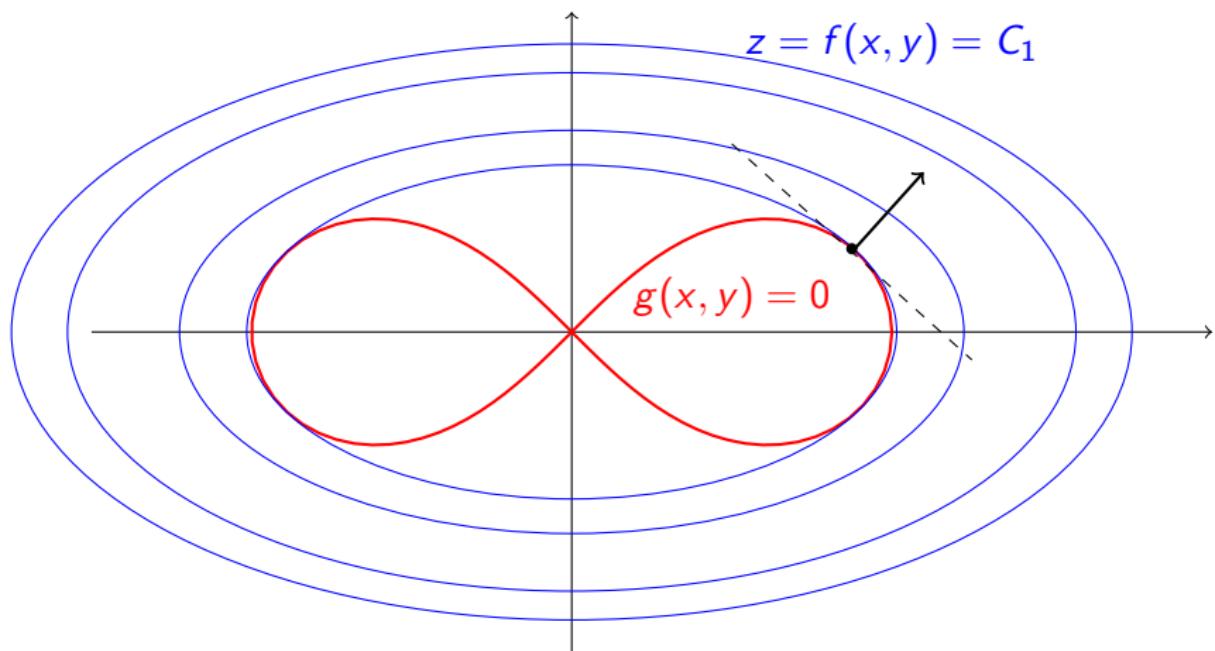












Primjer

Riješimo problem kutije.

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \quad \& \quad g(x, y, z) = 0 :$$

$$yz = \lambda(2y + z), \quad xz = \lambda(2x + 2z),$$

$$xy = \lambda(2y + x), \quad 2xy + 2yz + xz = 64$$

Primjer

Riješimo problem kutije.

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \quad \& \quad g(x, y, z) = 0 :$$

$$yz = \lambda(2y + z), \quad xz = \lambda(2x + 2z),$$

$$xy = \lambda(2y + x), \quad 2xy + 2yz + xz = 64$$

Pomnožimo prvu od jednadžbi s x , drugu s y i treću sa z :

$$xyz = \lambda x(2y + z) = \lambda y(2x + 2z) = \lambda z(x + 2y).$$

To može vrijediti za $\lambda = 0$, no to rješenje nas ne zanima (zašto?).

Primjer

Riješimo problem kutije.

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \quad \& \quad g(x, y, z) = 0 :$$

$$yz = \lambda(2y + z), \quad xz = \lambda(2x + 2z),$$

$$xy = \lambda(2y + x), \quad 2xy + 2yz + xz = 64$$

Pomnožimo prvu od jednadžbi s x , drugu s y i treću sa z :

$$xyz = \lambda x(2y + z) = \lambda y(2x + 2z) = \lambda z(x + 2y).$$

To može vrijediti za $\lambda = 0$, no to rješenje nas ne zanima (zašto?). Stoga mora biti $2xy + xz = 2xy + 2yz = xz + 2yz$, ergo (jer $x, y, z \neq 0$) $x = z = 2y$. To uvrstimo u četvrtu jednadžbu i dobivamo $12x^2 = 64$ odnosno $y = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ cm}$ i $x = z = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ cm}$. Zašto se radi o točki maksimuma?

Primjer (Sekularne jednadžbe)

U fizici se često određuju ekstremi funkcija tipa

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j$$

(kvadratne forme), uz „energetski” uvjet tipa

$$\sum_i x_i^2 = 1.$$

Jednadžbe koje odgovaraju određivanju stacionarne točke odgovarajuće Lagrangeove funkcije tad se nazivaju sekularnim jednadžbama.

Primjer su jednadžbe koje se dobivaju u tzv. Hückelovoj metodi za određivanje molekulskeih orbitala kao linearnih kombinacija atomskih (tu λ postaje svojstvena vrijednost prikladne matrice).

Metoda najmanjih kvadrata

Primjer

Arrheniusova jednadžba

$$k = A e^{-E_a/(RT)}$$

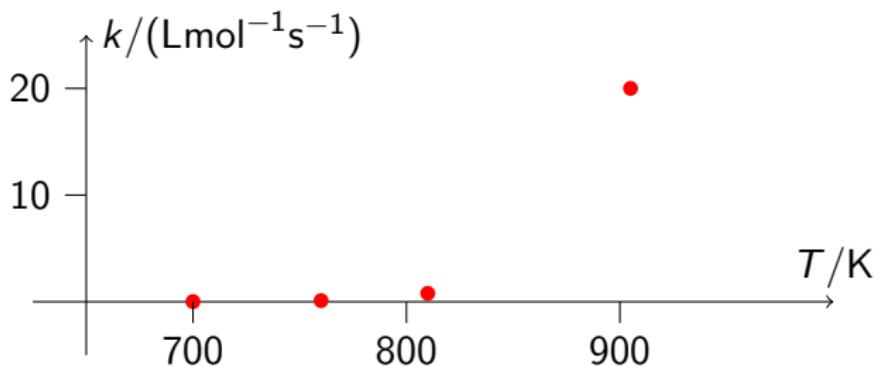
opisuje ovisnost koeficijenta k brzine reakcije o temperaturi T.

Vrijednosti A (predeksponencijalni faktor) i E_a (energija aktivacije) su konstantne, ali u pravilu nepoznate.

Mjerenjima pri jednoj reakciji su dobiveni sljedeći podaci:

(T/K)	k/(L/(mol s))
700	0,0110
760	0,105
810	0,789
910	20,0

Koliko iznose predeskponencijalni faktor i energija aktivacije za tu reakciju? Koliko iznosi koeficijent brzine te reakcije pri temperaturi 800 K?



Problem 1: Za zadani niz parova brojeva (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, traži se funkcija $y = f(x)$ (prepostavljene vrste) takva da je ukupna greška aproksimacije što manja.

Problem 1: Za zadani niz parova brojeva (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, traži se funkcija $y = f(x)$ (prepostavljene vrste) takva da je ukupna greška aproksimacije što manja.

Problem 2: Kako za danu funkciju $y = f(x)$ opisati ukupnu grešku obzirom na zadane parove (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$?

Problem 1: Za zadani niz parova brojeva (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, traži se funkcija $y = f(x)$ (prepostavljene vrste) takva da je ukupna greška aproksimacije što manja.

Problem 2: Kako za danu funkciju $y = f(x)$ opisati ukupnu grešku obzirom na zadane parove (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$?

$$e_i = y_i - f(x_i); f(x_i) - y_i?$$

Problem 1: Za zadani niz parova brojeva (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, traži se funkcija $y = f(x)$ (prepostavljene vrste) takva da je ukupna greška aproksimacije što manja.

Problem 2: Kako za danu funkciju $y = f(x)$ opisati ukupnu grešku obzirom na zadane parove (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$?

$$e_i = y_i - f(x_i); f(x_i) - y_i? e_i = |f(x_i) - y_i|?$$

Problem 1: Za zadani niz parova brojeva (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, traži se funkcija $y = f(x)$ (prepostavljene vrste) takva da je ukupna greška aproksimacije što manja.

Problem 2: Kako za danu funkciju $y = f(x)$ opisati ukupnu grešku obzirom na zadane parove (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$?

$$e_i = y_i - f(x_i); f(x_i) - y_i? e_i = |f(x_i) - y_i|? E_i = (f(x_i) - y_i)^2.$$

Ukupna greška aproksimacije:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min$$

Problem 1: Za zadani niz parova brojeva (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, traži se funkcija $y = f(x)$ (prepostavljene vrste) takva da je ukupna greška aproksimacije što manja.

Problem 2: Kako za danu funkciju $y = f(x)$ opisati ukupnu grešku obzirom na zadane parove (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$?

$$e_i = y_i - f(x_i); f(x_i) - y_i? e_i = |f(x_i) - y_i|? E_i = (f(x_i) - y_i)^2.$$

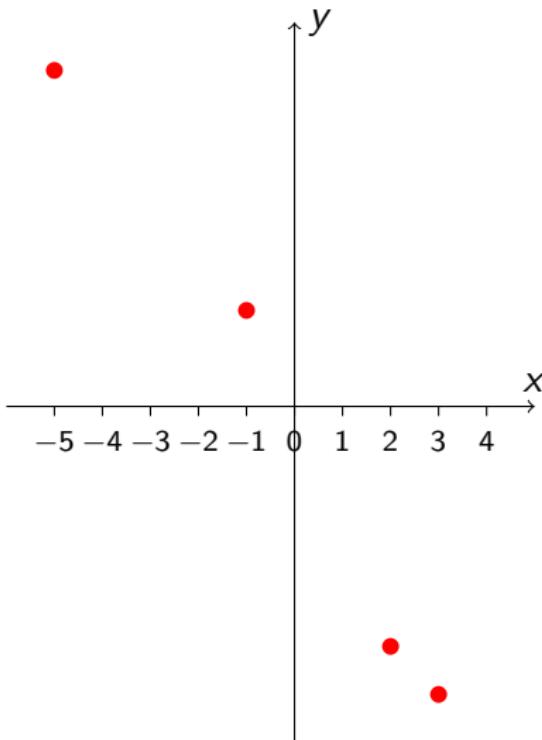
Ukupna greška aproksimacije:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min$$

Problem 3: Ako smo prepostavili oblik funkcije f , s nepoznatim parametrima a, b, c, \dots , kako minimizirati E ?

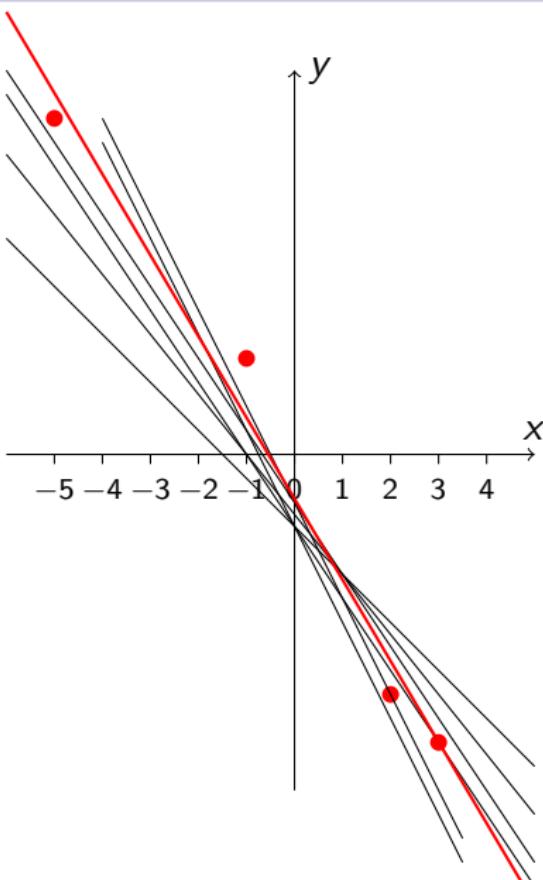
Zadatak

Odredite pravac koji najbolje aproksimira točke $(-5, 7)$, $(-1, 2)$, $(2, -5)$, $(3, -6)$.



Zadatak

Odredite pravac koji najbolje aproksimira točke $(-5, 7)$, $(-1, 2)$, $(2, -5)$, $(3, -6)$.



$f(x) = ax + b$:

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \rightarrow \min$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$E(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \rightarrow \min$$

$f(x) = ax + b$:

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \rightarrow \min$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$E(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \rightarrow \min$$

Funkcije E su diferencijabilne, dakle su jedine kritične točke stacionarne:

$$\nabla E = 0.$$

MNK: Aproksimacija afinom funkcijom

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2,$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 a + 2 \sum_{i=1}^n x_i b - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 2 \sum_{i=1}^n x_i a + 2nb - 2 \sum_{i=1}^n y_i = 0.$$

MNK: Aproksimacija afinom funkcijom

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2,$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 a + 2 \sum_{i=1}^n x_i b - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 2 \sum_{i=1}^n x_i a + 2nb - 2 \sum_{i=1}^n y_i = 0.$$

$$s_{x^2} = \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad s_x = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$s_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \quad s_y = \sum_{i=1}^n y_i$$

Imamo dakle sustav:

$$s_{x^2} \cdot a + s_x \cdot b = s_{xy}$$

$$s_x \cdot a + n \cdot b = s_y$$

Cramerovo pravilo daje:

$$a = \frac{ns_{xy} - s_x s_y}{ns_{x^2} - s_x^2}$$

$$b = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{ns_{x^2} - s_x^2}.$$

Nije preteško dokazati da je ova stacionarna točka (a, b) stvarno točka minimuma za E .

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$s_x =$	$s_y =$	$s_{x^2} =$	$s_{xy} =$

$$a = \frac{ns_{xy} - s_x s_y}{ns_{x^2} - s_x^2}$$

$$b = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{ns_{x^2} - s_x^2}.$$

Primjer

Za zadatok s četiri točke u koordinatnom sustavu: $n = 4$, $s_x = -1$, $s_y = -2$, $s_{x^2} = 39$, $s_{xy} = -65$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$s_x =$	$s_y =$	$s_{x^2} =$	$s_{xy} =$

$$a = \frac{ns_{xy} - s_x s_y}{ns_{x^2} - s_x^2}$$

$$b = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{ns_{x^2} - s_x^2}.$$

Primjer

Za zadatok s četiri točke u koordinatnom sustavu: $n = 4$, $s_x = -1$, $s_y = -2$, $s_{x^2} = 39$, $s_{xy} = -65$ $a = -\frac{262}{155}$, $b = -\frac{143}{155}$

Ima li smisla podatke iz uvodnog primjera s Arrheniusovom jednadžbom aproksimirati pravcem?

Ima li smisla podatke iz uvodnog primjera s Arrheniusovom jednadžbom aproksimirati pravcem? Ne! Grafički prikaz upućuje na afinu ovisnost, a i znamo da ona nije afina, nego kompozicija eksponencijalne i racionalne.

$$k = A e^{-E_a/(RT)} \Leftrightarrow \ln \frac{k}{\text{L/(mols)}} = \ln \frac{A}{\text{L/(mols)}} - \frac{E_a}{R} \cdot \frac{1}{T}$$

$$y = \ln \frac{A}{\text{L/(mols)}}, \quad x = \frac{1}{T}$$

$$a = -\frac{E_a}{R}, \quad b = \ln \frac{A}{\text{L/(mols)}}$$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$1,42857 \cdot 10^{-3}$	-4,50986	$2,04082 \cdot 10^{-6}$	$-6,44266 \cdot 10^{-3}$
$1,31579 \cdot 10^{-3}$	-2,25379	$1,73130 \cdot 10^{-6}$	$-2,96552 \cdot 10^{-3}$
$1,23457 \cdot 10^{-3}$	-0,23699	$1,52416 \cdot 10^{-6}$	$-0,29258 \cdot 10^{-3}$
$1,09890 \cdot 10^{-3}$	2,99573	$1,20758 \cdot 10^{-6}$	$3,29201 \cdot 10^{-3}$
$s_x = 5,07783 \cdot 10^{-3}$	$s_y = -4,00482$	$s_{x^2} = 6,50386 \cdot 10^{-6}$	$s_{xy} = -6,40875 \cdot 10^{-3}$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$1,42857 \cdot 10^{-3}$	-4,50986	$2,04082 \cdot 10^{-6}$	$-6,44266 \cdot 10^{-3}$
$1,31579 \cdot 10^{-3}$	-2,25379	$1,73130 \cdot 10^{-6}$	$-2,96552 \cdot 10^{-3}$
$1,23457 \cdot 10^{-3}$	-0,23699	$1,52416 \cdot 10^{-6}$	$-0,29258 \cdot 10^{-3}$
$1,09890 \cdot 10^{-3}$	2,99573	$1,20758 \cdot 10^{-6}$	$3,29201 \cdot 10^{-3}$
$s_x = 5,07783 \cdot 10^{-3}$	$s_y = -4,00482$	$s_{x^2} = 6,50386 \cdot 10^{-6}$	$s_{xy} = -6,40875 \cdot 10^{-3}$

$$\Delta = ns_{x^2} - s_x^2 = 2,31082 \cdot 10^{-7},$$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$1,42857 \cdot 10^{-3}$	-4,50986	$2,04082 \cdot 10^{-6}$	$-6,44266 \cdot 10^{-3}$
$1,31579 \cdot 10^{-3}$	-2,25379	$1,73130 \cdot 10^{-6}$	$-2,96552 \cdot 10^{-3}$
$1,23457 \cdot 10^{-3}$	-0,23699	$1,52416 \cdot 10^{-6}$	$-0,29258 \cdot 10^{-3}$
$1,09890 \cdot 10^{-3}$	2,99573	$1,20758 \cdot 10^{-6}$	$3,29201 \cdot 10^{-3}$
$s_x = 5,07783 \cdot 10^{-3}$	$s_y = -4,00482$	$s_{x^2} = 6,50386 \cdot 10^{-6}$	$s_{xy} = -6,40875 \cdot 10^{-3}$

$$\Delta = ns_{x^2} - s_x^2 = 2,31082 \cdot 10^{-7},$$

$$a = \frac{ns_{xy} - s_x s_y}{\Delta} = -22932,14036, \quad b = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{\Delta} = 28,1101045$$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$1,42857 \cdot 10^{-3}$	-4,50986	$2,04082 \cdot 10^{-6}$	$-6,44266 \cdot 10^{-3}$
$1,31579 \cdot 10^{-3}$	-2,25379	$1,73130 \cdot 10^{-6}$	$-2,96552 \cdot 10^{-3}$
$1,23457 \cdot 10^{-3}$	-0,23699	$1,52416 \cdot 10^{-6}$	$-0,29258 \cdot 10^{-3}$
$1,09890 \cdot 10^{-3}$	2,99573	$1,20758 \cdot 10^{-6}$	$3,29201 \cdot 10^{-3}$
$s_x = 5,07783 \cdot 10^{-3}$	$s_y = -4,00482$	$s_{x^2} = 6,50386 \cdot 10^{-6}$	$s_{xy} = -6,40875 \cdot 10^{-3}$

$$\Delta = ns_{x^2} - s_x^2 = 2,31082 \cdot 10^{-7},$$

$$a = \frac{ns_{xy} - s_x s_y}{\Delta} = -22932,14036, \quad b = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{\Delta} = 28,1101045$$

$$E_a = -Ra = 1,91 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{mol}}, \quad A = 1,61 \cdot 10^{12} \frac{\text{L}}{\text{mol s}}$$