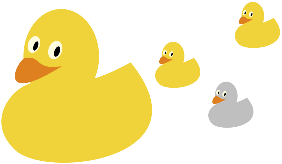
12. predavanje: Obične diferencijalne jednadžbe prvog reda

Franka Miriam Brückler



Obične diferencijalne jednadžbe 1. reda

- Što su obićne diferencijalne jednadžbe (ODJ)? Što je red ODJ? Što je rješenje ODJ? Koja je razlika općeg i partikularnog rješenja ODJ? Što su početni uvjeti? Što su integralne krivulje?

Obične diferencijalne jednadžbe 1. reda

- Što su obićne diferencijalne jednadžbe (ODJ)? Što je red ODJ? Što je rješenje ODJ? Koja je razlika općeg i partikularnog rješenja ODJ? Što su početni uvjeti? Što su integralne krivulje?
- Kako rješavamo ODJ oblika $y^{(n)} = f(t)$?

Obične diferencijalne jednadžbe 1. reda

- Što su obićne diferencijalne jednadžbe (ODJ)? Što je red ODJ? Što je rješenje ODJ? Koja je razlika općeg i partikularnog rješenja ODJ? Što su početni uvjeti? Što su integralne krivulje?
- Kako rješavamo ODJ oblika $y^{(n)} = f(t)$?
- Formulom zapišite sljedeći zadatak: Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore operatora deriviranja.

Obične diferencijalne jednadžbe 1. reda

- Što su obićne diferencijalne jednadžbe (ODJ)? Što je red ODJ? Što je rješenje ODJ? Koja je razlika općeg i partikularnog rješenja ODJ? Što su početni uvjeti? Što su integralne krivulje?
- Kako rješavamo ODJ oblika $y^{(n)} = f(t)$?
- Formulom zapišite sljedeći zadatak: Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore operatora deriviranja.
- U ovoj prezentaciji bavimo se s ODJ onlika

$$y' = F(t, y),$$

sa ili bez početnog uvjeta oblika $y(t_0) = y_0$.

Obične diferencijalne jednadžbe 1. reda

- Što su obićne diferencijalne jednadžbe (ODJ)? Što je red ODJ? Što je rješenje ODJ? Koja je razlika općeg i partikularnog rješenja ODJ? Što su početni uvjeti? Što su integralne krivulje?
- Kako rješavamo ODJ oblika $y^{(n)} = f(t)$?
- Formulom zapišite sljedeći zadatak: Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore operatora deriviranja.
- U ovoj prezentaciji bavimo se s ODJ onlika

$$y' = F(t, y),$$

sa ili bez početnog uvjeta oblika $y(t_0) = y_0$.

Obične diferencijalne jednadžbe 1. reda

- Što su obićne diferencijalne jednadžbe (ODJ)? Što je red ODJ? Što je rješenje ODJ? Koja je razlika općeg i partikularnog rješenja ODJ? Što su početni uvjeti? Što su integralne krivulje?
- Kako rješavamo ODJ oblika $y^{(n)} = f(t)$?
- Formulom zapišite sljedeći zadatak: Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore operatora deriviranja.
- U ovoj prezentaciji bavimo se s ODJ onlika

$$y' = F(t, y),$$

sa ili bez početnog uvjeta oblika $y(t_0) = y_0$.

Primjer

Opće rješenje Clairautove jednadžbe $y = t\,y' + (y')^2$ je $y(t) = C\,t + C^2$, a $y_S(t) = -\frac{1}{4}t^2$ je singularno rješenje. Skicirajte integralne krivulje!

Metoda separacije varijabli

ODJ sa separiranim varijablama:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)\,g(y)$$

Zadatak

Koje od sljedećih ODJ su sa separiranim varijablama:
$y' = x \quad y' = y^2 \quad y' = x + y \quad xy' - y = y^2 \quad 2xyy' + x = y^2$?

Metoda separacije varijabli

ODJ sa separiranim varijablama:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)\,g(y)$$

Zadatak

Koje od sljedećih ODJ su sa separiranim varijablama:
$y' = x \quad y' = y^2 \quad y' = x + y \quad xy' - y = y^2 \quad 2xyy' + x = y^2$?

Rješavanje (postupak separacija varijabli):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)\,g(y) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zadatak

$xy\,\mathrm{d}y + (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = 0,\ y(1) = 2.$

Eksponencijalni procesi

Eksponencijalni proces je proces u vremenu za koji je brzina promjene praćene veličine u svakom trenutku razmjerna iznosu te veličine (konstanta proporcionalnosti: stopa rasta/pada).

Primjer

Radioaktivni raspad: $\dot{N} = -\lambda N$.

Eksponencijalni procesi

Eksponencijalni proces je proces u vremenu za koji je brzina promjene praćene veličine u svakom trenutku razmjerna iznosu te veličine (konstanta proporcionalnosti: stopa rasta/pada).

Primjer

Radioaktivni raspad: $\dot{N} = -\lambda N$.

Zadatak

U ovisnosti o predznaku konstante proporcionalnosti i iznosa u početnom uvjetu opišite kakvi su mogući grafovi partikularnih rješenja za ODJ koje opisuju eksponencijalne procese.

Logistički procesi

Procesi koji su ispočetka (približno) eskponencijalni, ali im se onda rast (pad) usporava i nastavlja prema nekoj stabilnoj vrijednosti (HA) zovu se logistički procesi. $Y << K \Rightarrow \dot{Y} \approx k\,Y$; $Y \approx K \Rightarrow \dot{Y} \approx 0$.

Logistički procesi

Procesi koji su ispočetka (približno) eskponencijalni, ali im se onda rast (pad) usporava i nastavlja prema nekoj stabilnoj vrijednosti (HA) zovu se logistički procesi. $Y << K \Rightarrow \dot{Y} \approx k\,Y$; $Y \approx K \Rightarrow \dot{Y} \approx 0$.

Logistička ODJ: $\dot{Y} = r\,Y\left(1 - \dfrac{Y}{K}\right)$.

Zadatak

Dokažite da je za $r > 0$ rješenje logističke jednadžbe rastuće i odredite ordinatu njegove točke infleksije.

Logistički procesi

Procesi koji su ispočetka (približno) eskponencijalni, ali im se onda rast (pad) usporava i nastavlja prema nekoj stabilnoj vrijednosti (HA) zovu se logistički procesi. $Y << K \Rightarrow \dot{Y} \approx k\,Y$; $Y \approx K \Rightarrow \dot{Y} \approx 0$.

Logistička ODJ: $\dot{Y} = r\,Y\left(1 - \dfrac{Y}{K}\right)$.

Zadatak

Dokažite da je za $r > 0$ rješenje logističke jednadžbe rastuće i odredite ordinatu njegove točke infleksije.

Zadatak

Na području jednog jezera može živjeti najviše 1600 pataka. Stopa rasta u pataka je 5 % godišnje, skicirajte familiju integralnih krivulja odgovarajuće logističke jednadžbe. Koja od tih krivulja je partikularno rješenje ako je na početku broj pataka bio 400? Nakon koliko vremena se rast broja pataka počinje usporavati?

Primjeri iz kemijske kinetike

Diferencijalne jednadžbe koje se pojavljuju u kemijskoj kinetici se postavljaju i rješavaju temeljem sljedećih formula:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\nu_\mathrm{J}} \cdot \frac{\mathrm{d}c_\mathrm{J}}{\mathrm{d}t} = k\, c_1^{m_1}\, c_2^{m_2} \cdot \ldots$$

$$(\heartsuit) \quad c_\mathrm{J} = c_{\mathrm{J},0} + \nu_\mathrm{J} \cdot x,$$

$$x(0) = 0.$$

Zadatak

Objasnite zašto je konvencija da se stehiometrijski koeficijenti reaktanata gledaju s negativnim predznakom praktična iz perspektive definicije brzine v? Koja je fizikalna dimenzija veličine x ako znamo da je dimenzija svih c množinska koncentracija, a t je vrijeme? Ako $m_1 + m_2 + \ldots$ zovemo redom reakcije, ovisi li o njemu red ODJ za x (ili c_J) koja odgovara gornjim formulama? U kom slučaju je ta ODJ model eksponencijalnog procesa?

Zadatak

Za situaciju kad je $v = k\, c_{\mathrm{R}}^{m}$ *za jedan reaktant* R *početne koncentracije* c_0 *i stehiometrijskog koeficijenta* -2, *za sve* $m \in \mathbb{N}_0$ *odredite i skicirajte partikularna rješenja*

Zadatak

Za reakciju stehiometrije $\mathrm{A} + 2\mathrm{B} \to \mathrm{C}$ *je* $v = \dot{x} = k\, c_{\mathrm{A}}$. *Početne koncentracije od* A *i* B *su jednake. Nakon koliko vremena će koncentracija od* A *pasti na pola početne koncentracije? Ovisi li to vrijeme o početnoj koncentraciji od* A*? Kolika će u tom trenutku biti koncentracija od* B*?*

Zadatak

Zakon brzine za reakciju stehiometrije $\mathrm{A} + 3\mathrm{B} \to 2\mathrm{C}$ *je oblika* $v = k\, c_{\mathrm{A}}\, c_{\mathrm{B}}$. *Skicirajte ovisnost koncentracije od* C *o vremenu.*

Homogene diferencijalne jednadžbe

Homogene diferencijalne jednadžbe su ODJ 1. reda koje se mogu zapisati u obliku

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f\left(\frac{y}{t}\right).$$

Rješavaju se supstitucijom

$$u = \frac{y}{t} \Rightarrow u' = \frac{ty' - y}{t^2} = \frac{y'}{t} - \frac{u}{t} \Rightarrow y' = tu' + u \Rightarrow$$

$$t\,u' + u = f(u),$$

Zadatak

Riješite $(y - t)t\dot{y} = y^2$, $y(1) = 1$.

Linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda

ODJ koje možemo zapisati u obliku $y' + a(t)\,y = b(t)$ zovemo linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda.

Primjer

Objekt mase m izbačen je iz helikoptera. U svakom trenutku otpor zraka je proporcionalan trenutnoj brzini pa drugi Newtonov zakon daje:

$$m\,\dot{v} = m\,g - k\,v.$$

Rješavanje:

1. Riješimo pripadnu homogenu jednadžbu $y' + a(t)\,y = 0$. Njezino opće rješenje y_H sadrži jednu neodređenu konstantu c.
2. Ako $b(t) \neq 0$, koristimo metodu varijacije konstante: Pretpostavimo da je $c = c(t)$ pa taj pretpostavljeni oblik rješenja deriviramo i uvrstimo u polaznu jednadžbu. Time dobivamo eksplicitni izraz za $c'(t)$ te se $c(t)$ može dobiti integriranjem.

Zadatak

$L\,\dot{I} + R\,I = E$ *uz* $L, R, E =$*const.*, $I(0) = 0$;

Zadatak

$L\dot{I} + RI = E$ uz $L, R, E =$const., $I(0) = 0$; $xy' = 4y + x^2\sqrt{y}$

Zadatak

$L\,\dot{I} + R\,I = E$ uz $L, R, E =$const., $I(0) = 0$; $xy' = 4y + x^2\sqrt{y}$

Zadaci miješanja: Podrazumijeva da su sve otopine u svakom trenutku homogene, a brzina promjene količine otopljene tvari jednaka je razlici brzina ulijevanja i izlijevanja.

Primjer

Spremnik obujma 500 L *na početku sadrži* 10 g *soli rastopljene u* 200 L *vode. Od početnog trenutka nadalje se u spremnik brzinom* 4 L/min *ulijeva vodena otopina soli koja je masene koncentracije* $\frac{1}{4}$ g/L*, a otopina se iz cisterne izlijeva brzinom* 2 L/min*. Postavimo ODJ za ovisnost m soli u spremniku o t i odredimo vremenski interval na koji se ta jednadžba odnosi.*

- Početni uvjet: $m(0) = 10\,\mathrm{g}$.
- Vrijeme na koje se odnosi diferencijalna jednadžba bit će od $t_0 = 0$ do $T = \frac{300\,\mathrm{L}}{2\,\mathrm{L/min}} = 150\,\mathrm{min}$.

- Početni uvjet: $m(0) = 10\,\mathrm{g}$.
- Vrijeme na koje se odnosi diferencijalna jednadžba bit će od $t_0 = 0$ do $T = \frac{300\,\mathrm{L}}{2\,\mathrm{L/min}} = 150\,\mathrm{min}$.
- ODJ postavljamo iz

$$\dot{m} = \dot{m}_{\mathrm{U}} - \dot{m}_{\mathrm{I}}.$$

- $\dot{m}_{\mathrm{U}} = \frac{1}{4}\,\mathrm{g/L} \cdot 4\,\mathrm{L/min} = 1\,\mathrm{g/min}$.
- $V(t) = (200 + 2t/\mathrm{min})\,\mathrm{L} \Rightarrow$
- $\dot{m}_{\mathrm{I}} = \frac{m(t)}{V(t)} \cdot 2\,\mathrm{L/min} = \frac{m(t)}{t+100\,\mathrm{min}}$.

Zadatak

Riješite ODJ iz primjera i skicirajte graf njenog partikularnog rješenja koje odgovara početnom uvjetu. Također, skicirajte i graf ovisnosti masene koncentracije soli u spremniku o vremenu.

Jednadžbe koje se mogo zapisati u obliku $y' + a(t)\,y = b(t)\,y^{\alpha}$ s $\alpha \neq 0, 1$ zovu se Bernoullijeve jednadžbe. One se supstitucijom $v = y^{1-\alpha}$ svode na linearne ODJ 1. reda: $v' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \Rightarrow$ $v' + (1-\alpha)\,a(t)\,v = (1-\alpha)\,b(t)$.

Zadatak

Nacrtajte krivulju koja prolazi kroz točku $(1, 1)$ za koju vrijedi da je za svaku njenu točku T odsječak tangente na osi ordinata jednak peterostrukom kvadratu ordinate točke T.

Jednadžbe koje se mogo zapisati u obliku $y' + a(t)\,y = b(t)\,y^{\alpha}$ s $\alpha \neq 0, 1$ zovu se Bernoullijeve jednadžbe. One se supstitucijom $v = y^{1-\alpha}$ svode na linearne ODJ 1. reda: $v' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \Rightarrow v' + (1-\alpha)\,a(t)\,v = (1-\alpha)\,b(t)$.

Zadatak

Nacrtajte krivulju koja prolazi kroz točku $(1,1)$ za koju vrijedi da je za svaku njenu točku T odsječak tangente na osi ordinata jednak peterostrukom kvadratu ordinate točke T.

- *Tangenta:* $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
- *Odsječak tangente na y-osi:* $y_0 + f'(x_0) \cdot x_0$

Jednadžbe koje se mogo zapisati u obliku $y' + a(t)\,y = b(t)\,y^\alpha$ s $\alpha \neq 0, 1$ zovu se Bernoullijeve jednadžbe. One se supstitucijom $v = y^{1-\alpha}$ svode na linearne ODJ 1. reda: $v' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \Rightarrow v' + (1-\alpha)\,a(t)\,v = (1-\alpha)\,b(t)$.

Zadatak

Nacrtajte krivulju koja prolazi kroz točku $(1, 1)$ za koju vrijedi da je za svaku njenu točku T odsječak tangente na osi ordinata jednak peterostrukom kvadratu ordinate točke T.

- *Tangenta:* $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
- *Odsječak tangente na y-osi:* $y_0 + f'(x_0) \cdot x_0$
- *Bernoullijeva ODJ s* $\alpha = 2$*:*

$$y + y'\,x = 5y^2 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}\,y = \frac{5}{x}\,y^2$$

Supstitucija $v = y^{-1}$, $v' = -y^{-2}y' = -v^2y'$, $y' = -v^{-2}v'$:

$$-v^{-2}v' + \frac{1}{x}v^{-1} = \frac{5}{x}\,v^{-2} \Leftrightarrow v' - \frac{1}{x}v = -\frac{5}{x}$$

Supstitucija $v = y^{-1}$, $v' = -y^{-2}y' = -v^2y'$, $y' = -v^{-2}v'$:

$$-v^{-2}v' + \frac{1}{x}v^{-1} = \frac{5}{x}\,v^{-2} \Leftrightarrow v' - \frac{1}{x}v = -\frac{5}{x}$$

Rješenje pripadne homogene: $v_H = C\,x$
Varijacija konstante: $C'\,x = -\frac{5}{x} \Rightarrow C = C_0 + \frac{5}{x}$

Supstitucija $v = y^{-1}$, $v' = -y^{-2}y' = -v^2 y'$, $y' = -v^{-2}v'$:

$$-v^{-2}v' + \frac{1}{x}v^{-1} = \frac{5}{x}\,v^{-2} \Leftrightarrow v' - \frac{1}{x}v = -\frac{5}{x}$$

Rješenje pripadne homogene: $v_H = C\,x$
Varijacija konstante: $C'\,x = -\frac{5}{x} \Rightarrow C = C_0 + \frac{5}{x}$
Opće rješenje za v: $v = C_0\,x + 5$
Opće rješenje: $y = \frac{1}{5 + C_0\,x}$

Supstitucija $v = y^{-1}$, $v' = -y^{-2}y' = -v^2y'$, $y' = -v^{-2}v'$:

$$-v^{-2}v' + \frac{1}{x}v^{-1} = \frac{5}{x}\,v^{-2} \Leftrightarrow v' - \frac{1}{x}v = -\frac{5}{x}$$

Rješenje pripadne homogene: $v_H = C\,x$
Varijacija konstante: $C'\,x = -\frac{5}{x} \Rightarrow C = C_0 + \frac{5}{x}$
Opće rješenje za v: $v = C_0\,x + 5$
Opće rješenje: $y = \frac{1}{5+C_0\,x}$
Početni uvjet: $5 + C_0 = 1$
Partikularno rješenje: $y = \frac{1}{5-4x}$