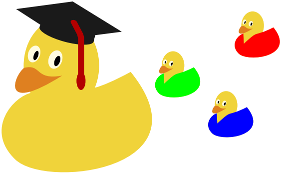
Trigonometrijski redovi

Franka Miriam Brückler

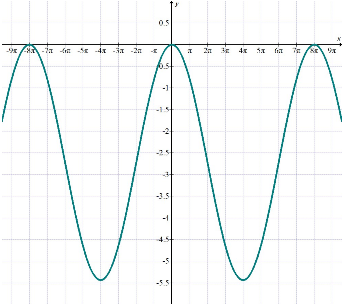


- Kako se definiraju periodične realne funkcije?

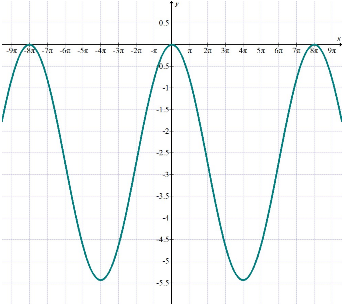
- Kako se definiraju periodične realne funkcije? Što je period? Temeljni period?

- Kako se definiraju periodične realne funkcije? Što je period? Temeljni period?
- Skicirajte graf funkcije $f(x) = 2\sin(-\pi t) + 3$. Koji su joj periodi?

- Kako se definiraju periodične realne funkcije? Što je period? Temeljni period?
- Skicirajte graf funkcije $f(x) = 2\sin(-\pi t) + 3$. Koji su joj periodi?
- Koja je formula funkcije čiji je graf na slici dolje? Koji su joj periodi?

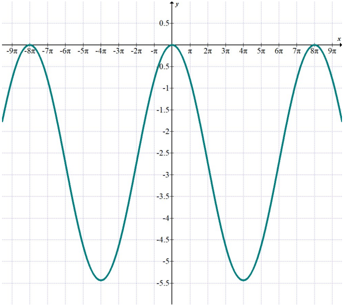


- Kako se definiraju periodične realne funkcije? Što je period? Temeljni period?
- Skicirajte graf funkcije $f(x) = 2\sin(-\pi t) + 3$. Koji su joj periodi?
- Koja je formula funkcije čiji je graf na slici dolje? Koji su joj periodi?



- Skicirajte graf neke neprekidne periodične funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kojoj je period 10 i koja ima bar jednu točku u kojoj nije derivabilna.

- Kako se definiraju periodične realne funkcije? Što je period? Temeljni period?
- Skicirajte graf funkcije $f(x) = 2\sin(-\pi t) + 3$. Koji su joj periodi?
- Koja je formula funkcije čiji je graf na slici dolje? Koji su joj periodi?



- Skicirajte graf neke neprekidne periodične funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kojoj je period 10 i koja ima bar jednu točku u kojoj nije derivabilna. Objasnite zašto je dovoljno zadati tu funkciju na

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(t) = |t|$. Skicirajte njezin graf.

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(t) = |t|$. Skicirajte njezin graf. Proširite ju do periodične funkcije s domenom $\mathbb{R}$.

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(t) = |t|$. Skicirajte njezin graf. Proširite ju do periodične funkcije s domenom $\mathbb{R}$. Koji joj je temeljni period T?

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(t) = |t|$. Skicirajte njezin graf. Proširite ju do periodične funkcije s domenom $\mathbb{R}$. Koji joj je temeljni period T? Koje funkcije tipa $\cos(\omega\, t)$, $\sin(\omega\, t)$ maju period T?

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $F(t) = |t|$. Skicirajte njezin graf. Proširite ju do periodične funkcije s domenom $\mathbb{R}$. Koji joj je temeljni period T? Koje funkcije tipa $\cos(\omega\, t)$, $\sin(\omega\, t)$ maju period T?

Ako je temeljni period razmatrane periodične funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jednak T, uvodimo oznake:

$$L = \frac{T}{2},\ \omega_n = \frac{n\,\pi}{L},\ c_n(t) = \cos(\omega_n\, t),\ s_n(t) = \sin(\omega_n\, t) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Funkciju f gledamo kao funkciju s domenom $[-L, L]$ $(f(-L) = f(L))$.

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $F(t) = |t|$. Skicirajte njezin graf. Proširite ju do periodične funkcije s domenom $\mathbb{R}$. Koji joj je temeljni period T? Koje funkcije tipa $\cos(\omega\, t)$, $\sin(\omega\, t)$ maju period T?

Ako je temeljni period razmatrane periodične funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jednak T, uvodimo oznake:

$$L = \frac{T}{2},\ \omega_n = \frac{n\,\pi}{L},\ c_n(t) = \cos(\omega_n\, t),\ s_n(t) = \sin(\omega_n\, t) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Funkciju f gledamo kao funkciju s domenom $[-L, L]$
$(f(-L) = f(L))$.
Što je bila svrha Taylorovog reda funkcije f?

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(t) = |t|$. Skicirajte njezin graf. Proširite ju do periodične funkcije s domenom $\mathbb{R}$. Koji joj je temeljni period T? Koje funkcije tipa $\cos(\omega\, t)$, $\sin(\omega\, t)$ maju period T?

Ako je temeljni period razmatrane periodične funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jednak T, uvodimo oznake:

$$L = \frac{T}{2},\ \omega_n = \frac{n\,\pi}{L},\ c_n(t) = \cos(\omega_n\, t),\ s_n(t) = \sin(\omega_n\, t) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Funkciju f gledamo kao funkciju s domenom $[-L, L]$ $(f(-L) = f(L))$.

Što je bila svrha Taylorovog reda funkcije f? Ovdje želimo periodičnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aproksimirati linearnom kombinacijom sinusa i kosinusa istog perioda.

Trigonometrijski red (perioda T) je red oblika

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\, c_n(t) + B_n\, s_n(t)).$$

Trigonometrijski red (perioda T) je red oblika

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\, c_n(t) + B_n\, s_n(t)).$$

Želimo naći koeficijente trigonometrijskog reda (njega ćemo zvati Fourierovim redom funkcije f) koji je (do u na eventualno konačno mnogo $x \in [-L, L]$) jednak $f(x)$.

Trigonometrijski red (perioda T) je red oblika

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\, c_n(t) + B_n\, s_n(t)).$$

Želimo naći koeficijente trigonometrijskog reda (njega ćemo zvati Fourierovim redom funkcije f) koji je (do u na eventualno konačno mnogo $x \in [-L, L]$) jednak $f(x)$.
Prema Dirichletovom teoremu, to je moguće postići uz sljedeće pretpostavke na funkciju $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$:

1. po dijelovima neprekidna

Trigonometrijski red (perioda T) je red oblika

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \, c_n(t) + B_n \, s_n(t)).$$

Želimo naći koeficijente trigonometrijskog reda (njega ćemo zvati Fourierovim redom funkcije f) koji je (do u na eventualno konačno mnogo $x \in [-L, L]$) jednak $f(x)$.
Prema Dirichletovom teoremu, to je moguće postići uz sljedeće pretpostavke na funkciju $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$:

1. po dijelovima neprekidna i svi prekidi, ako ih ima, su skokovi.

Trigonometrijski red (perioda T) je red oblika

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\, c_n(t) + B_n\, s_n(t)).$$

Želimo naći koeficijente trigonometrijskog reda (njega ćemo zvati Fourierovim redom funkcije f) koji je (do u na eventualno konačno mnogo $x \in [-L, L]$) jednak $f(x)$.
Prema Dirichletovom teoremu, to je moguće postići uz sljedeće pretpostavke na funkciju $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$:

1. po dijelovima neprekidna i svi prekidi, ako ih ima, su skokovi.
2. $[-L, L]$ se može podijeliti na konačno mnogo intervala tako da je f na svakom od njih ili rastuća ili padajuća.

Trigonometrijski red (perioda T) je red oblika

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\, c_n(t) + B_n\, s_n(t)).$$

Želimo naći koeficijente trigonometrijskog reda (njega ćemo zvati Fourierovim redom funkcije f) koji je (do u na eventualno konačno mnogo $x \in [-L, L]$) jednak $f(x)$.

Prema Dirichletovom teoremu, to je moguće postići uz sljedeće pretpostavke na funkciju $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$:

1. po dijelovima neprekidna i svi prekidi, ako ih ima, su skokovi.
2. $[-L, L]$ se može podijeliti na konačno mnogo intervala tako da je f na svakom od njih ili rastuća ili padajuća.

Primjer, drugi dio

Zadovoljava li F Dirichletove uvjete?

- Argumentirajte zašto sve funkcije koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete čine (beskonačnodimenzionalan) realan unitarni prostor!

- Argumentirajte zašto sve funkcije koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete čine (beskonačnodimenzionalan) realan unitarni prostor!
- Svake dvije različite funkcije iz niza funkcija $c_0, s_1, c_1, s_2, c_2, \ldots$ su međusobno ortogonalne.

- Argumentirajte zašto sve funkcije koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete čine (beskonačnodimenzionalan) realan unitarni prostor!
- Svake dvije različite funkcije iz niza funkcija $c_0, s_1, c_1, s_2, c_2, \dots$ su međusobno ortogonalne.
- $\langle c_n, c_n \rangle = \langle s_n, s_n \rangle = L$ za $n \neq 0$ i $\langle c_0, c_0 \rangle = 2L$.

- Argumentirajte zašto sve funkcije koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete čine (beskonačnodimenzionalan) realan unitarni prostor!
- Svake dvije različite funkcije iz niza funkcija $c_0, s_1, c_1, s_2, c_2, \ldots$ su međusobno ortogonalne.
- $\langle c_n, c_n \rangle = \langle s_n, s_n \rangle = L$ za $n \neq 0$ i $\langle c_0, c_0 \rangle = 2L$.
- Ako je $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\, c_n(t) + B_n\, s_n(t))$ razvoj funkcije f u Fourierov red, formule za Fourierove koeficijente su:

$$A_n = \frac{1}{L}\langle f, c_n \rangle, \quad B_n = \frac{1}{L}\langle f, s_n \rangle.$$

- Argumentirajte zašto sve funkcije koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete čine (beskonačnodimenzionalan) realan unitarni prostor!
- Svake dvije različite funkcije iz niza funkcija $c_0, s_1, c_1, s_2, c_2, \ldots$ su međusobno ortogonalne.
- $\langle c_n, c_n \rangle = \langle s_n, s_n \rangle = L$ za $n \neq 0$ i $\langle c_0, c_0 \rangle = 2L$.
- Ako je $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\, c_n(t) + B_n\, s_n(t))$ razvoj funkcije f u Fourierov red, formule za Fourierove koeficijente su:

$$A_n = \frac{1}{L}\langle f, c_n \rangle, \quad B_n = \frac{1}{L}\langle f, s_n \rangle.$$

- Zašto se u Fourierovom redu parne funkcije pojavljuju samo kosinusi, a u Fourierovom redu neparne funkcije samo sinusi?

- Argumentirajte zašto sve funkcije koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete čine (beskonačnodimenzionalan) realan unitarni prostor!
- Svake dvije različite funkcije iz niza funkcija $c_0, s_1, c_1, s_2, c_2, \ldots$ su međusobno ortogonalne.
- $\langle c_n, c_n \rangle = \langle s_n, s_n \rangle = L$ za $n \neq 0$ i $\langle c_0, c_0 \rangle = 2L$.
- Ako je $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\, c_n(t) + B_n\, s_n(t))$ razvoj funkcije f u Fourierov red, formule za Fourierove koeficijente su:

$$A_n = \frac{1}{L}\langle f, c_n \rangle, \quad B_n = \frac{1}{L}\langle f, s_n \rangle.$$

- Zašto se u Fourierovom redu parne funkcije pojavljuju samo kosinusi, a u Fourierovom redu neparne funkcije samo sinusi?
- Koji je trigonometrijski red jednak funkciji $1 + \sin^2 t$?

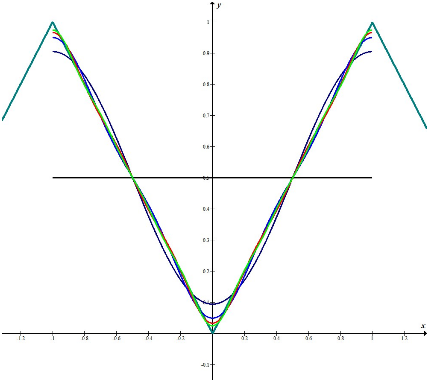
Primjer, treći dio

Razvijte F u Fourierov red!

Primjer, treći dio

Razvijte F u Fourierov red!

$$F(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t) - \frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi t) - \frac{4}{25\pi^2}\cos(5\pi t) - \frac{4}{49\pi^2}\cos(7\pi t) - \dots$$



- Kako glasi Eulerova formula za kompleksne brojeve? Kako se sinus i kosinus mogu zapisati pomoću kompleksne eksponencijalne funkcije?

- Kako glasi Eulerova formula za kompleksne brojeve? Kako se sinus i kosinus mogu zapisati pomoću kompleksne eksponencijalne funkcije?
- Za svaki $t \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$A_n c_n(t) + B_n s_n(t) = c_{-n} \exp(-i\omega_n t) + c_n \exp(i\omega_n t),$$

pri čemu je $c_{-n} = \overline{c_n}$.

- Kako glasi Eulerova formula za kompleksne brojeve? Kako se sinus i kosinus mogu zapisati pomoću kompleksne eksponencijalne funkcije?
- Za svaki $t \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$A_n c_n(t) + B_n s_n(t) = c_{-n} \exp(-i\omega_n t) + c_n \exp(i\omega_n t),$$

pri čemu je $c_{-n} = \overline{c_n}$.
- Kompleksni oblik Fourierovog reda funkcije f je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n t),$$

$$c_{\pm n} = \frac{A_n \mp iB_n}{2}, \quad c_0 = \frac{A_0}{2}.$$

- Kakvi su kompleksni Fourierovi koeficijenti za parne odnosno neparne funkcije?

Primjer, četvrti dio

Odredite kompleksni oblik Fourierovog reda funkcije F!

Primjer, četvrti dio

Odredite kompleksni oblik Fourierovog reda funkcije F!

- Što su apsolutna vrijednost i argument kompleksnog broja?

Primjer, četvrti dio

Odredite kompleksni oblik Fourierovog reda funkcije F!

- Što su apsolutna vrijednost i argument kompleksnog broja? Kakvi su argumenti kompleksnih Fourierovih koeficijenata za parne odnosno neparne funkcije?

Primjer, četvrti dio

Odredite kompleksni oblik Fourierovog reda funkcije F!

- Što su apsolutna vrijednost i argument kompleksnog broja? Kakvi su argumenti kompleksnih Fourierovih koeficijenata za parne odnosno neparne funkcije?
- (c_n): $((|c_n|), (\varphi_n))$.
- c odnosno $|c|$ i φ možemo umjesto kao funkcije od n gledati kao funkcije od ω_n.

Primjer, četvrti dio

Odredite kompleksni oblik Fourierovog reda funkcije F!

- Što su apsolutna vrijednost i argument kompleksnog broja? Kakvi su argumenti kompleksnih Fourierovih koeficijenata za parne odnosno neparne funkcije?
- (c_n): $((|c_n|), (\varphi_n))$.
- c odnosno $|c|$ i φ možemo umjesto kao funkcije od n gledati kao funkcije od ω_n.
- Spektar amplituda je ovisnost $|c|$ o ω_n, a fazni spektar je ovisnost φ o ω_n. Kakvi su ti spektri za realne funkcije? Parne? Neparne?

Primjer, peti dio

Odredite i skicirajte spektar amplituda i fazni spektar funkcije F!

Zadatak

Odredite 5 članova (jedan član := jedan n u realnom obliku $= \pm n$ u kompleksnom obliku) Fourierovog reda koji najbolje aproksimiraju $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \exp(t)$ (proširenu po periodičnosti na $\mathbb{R}$).

- $L = \pi$, $\omega_n = n$, nije ni parna ni neparna; $f(-\pi) := \exp(\pi)$ ili $f(\pi) := f(-\pi)$;

Zadatak

Odredite 5 članova (jedan član := jedan n u realnom obliku = $\pm n$ u kompleksnom obliku) Fourierovog reda koji najbolje aproksimiraju $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \exp(t)$ (proširenu po periodičnosti na $\mathbb{R}$).

- $L = \pi$, $\omega_n = n$, nije ni parna ni neparna; $f(-\pi) := \exp(\pi)$ ili $f(\pi) := f(-\pi)$;
- $A_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-t)\, \mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{sh} \pi$; $c_0 = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \pi = |c_0| \approx 7.35$;
- $A_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-t) \cos(n\, t)\, \mathrm{d}t =$(parc. int.)$= \dfrac{(-1)^n\, 2 \operatorname{sh} \pi}{\pi\, (n^2 + 1)}$;
- $B_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-t) \sin(n\, t)\, \mathrm{d}t =$(p. i.)$= \dfrac{(-1)^n\, 2n \operatorname{sh} \pi}{\pi\, (n^2 + 1)}$;
- $c_n = \overline{c_{-n}} = \dfrac{1}{2}(A_n - i\, B_n) = \dfrac{(-1)^n\, (1 - n\, i) \operatorname{sh} \pi}{\pi\, (n^2 + 1)}$

$$|c_{\pm n}| = \left|\frac{(-1)^n\,(1-n\,i)\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi\,(n^2+1)}\right| = \frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2+1}\cdot\sqrt{1+n^2} = \frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Dakle, na $\mathbb{N}$ je spektar amplituda padajući, pri čemu je $|c_1| = \frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 2.599.$
Stoga je rješenje točno peta parcijalna suma $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$

$$\frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\cdot\Bigg(1-\cos(t)-\sin(t)+\frac{2}{5}\cos(2t)+\frac{4}{5}\sin(2t)-$$

$$-\frac{1}{5}\cos(3t)-\frac{3}{5}\sin(3t)+\frac{2}{17}\cos(4t)+\frac{8}{17}\sin(4t)\Bigg)$$

Zadatak

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *formulom* $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$*. Skicirajte spektar amplituda za polinom stupnja* 3 *koji ju najbolje aproksimira oko* 0*, restringiran na* $[-1, 1]$*.*

Uputa:

1. Prvo treba naći T_3. Funkcija je parna pa je $T_3 = T_2$ jer je razvoj oko 0.
2. $T_2(x) = b_0 + b_1\, x + b_2\, x^2$ možemo dobiti ili korištenjem definicije Taylorovih koeficijenata ili kao 2. parcijalnu sumu Maclaurinovog reda.

Zadatak

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom $f(x) = \dfrac{1}{4 + x^2}$. Skicirajte spektar amplituda za polinom stupnja 3 koji ju najbolje aproksimira oko 0, restringiran na $[-1, 1]$.

Uputa:

1. Prvo treba naći T_3. Funkcija je parna pa je $T_3 = T_2$ jer je razvoj oko 0.
2. $T_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ možemo dobiti ili korištenjem definicije Taylorovih koeficijenata ili kao 2. parcijalnu sumu Maclaurinovog reda.
3. Uzmemo $T_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ i podrazumijevamo da je po periodičnosti proširen na $\mathbb{R}$: $L = 1$, $\omega_n = n\pi$.
4. T_2 je također parna funkcija pa je $B_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *formulom* $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$. *Skicirajte spektar amplituda za polinom stupnja* 3 *koji ju najbolje aproksimira oko* 0, *restringiran na* $[-1, 1]$.

Uputa:

1. Prvo treba naći T_3. Funkcija je parna pa je $T_3 = T_2$ jer je razvoj oko 0.
2. $T_2(x) = b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2$ možemo dobiti ili korištenjem definicije Taylorovih koeficijenata ili kao 2. parcijalnu sumu Maclaurinovog reda.
3. Uzmemo $T_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ i podrazumijevamo da je po periodičnosti proširen na $\mathbb{R}$: $L = 1$, $\omega_n = n\,\pi$.
4. T_2 je također parna funkcija pa je $B_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
5. Izračunamo $A_n = \int_{-1}^{1} T_2(x)\,\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$ za $n \in \mathbb{N}_0$ i $c_{\pm n} = \frac{A_0}{2}$ pa je $|c_{\pm n}| = \frac{1}{2}|A_n|$.
6. Skiciramo graf $|c_n|$ kao funkcije od ω_n.

Zadatak

Spektar amplituda neke realne parne funkcije temeljnog perioda 1 *zadan je formulom* $|c_n| = \omega_n^{-1}$ *za* $n \neq 0$ *i* $c_0 = 1/\pi$. *Odredite najbolju polinomijalnu aproksimaciju stupnja* 2 *koji oko* 0 *najbolje aproksimira tri najznačajnija člana Fourierovog reda te funkcije.*

Uputa:

1. $T = 1 \Rightarrow L = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_n = 2n\pi$.
2. Funkcija je parna, dakle su $B_n = 0$ za sve n, odnosno spektar amplituda je $|c_{\pm n}| = \frac{1}{2}|A_n|$ za $n \in \mathbb{N}_0$.

Zadatak

Spektar amplituda neke realne parne funkcije temeljnog perioda 1 zadan je formulom $|c_n| = \omega_n^{-1}$ za $n \neq 0$ i $c_0 = 1/\pi$. Odredite najbolju polinomijalnu aproksimaciju stupnja 2 koji oko 0 najbolje aproksimira tri najznačajnija člana Fourierovog reda te funkcije.

Uputa:

1. $T = 1 \Rightarrow L = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_n = 2n\pi$.
2. Funkcija je parna, dakle su $B_n = 0$ za sve n, odnosno spektar amplituda je $|c_{\pm n}| = \frac{1}{2}|A_n|$ za $n \in \mathbb{N}_0$.
3. $c_0 = \frac{1}{\pi} \Rightarrow A_0 = \frac{2}{\pi} \approx 0.6366$;
4. $\frac{1}{2}|A_n| = \frac{1}{\omega_n} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n}$ pada na $\mathbb{N}$ počevši od $\frac{1}{2\pi} \approx 0.159$pa su tri najznačajnija člana oni s $n = 0, 1, 2$.

Zadatak

Spektar amplituda neke realne parne funkcije temeljnog perioda 1 *zadan je formulom* $|c_n| = \omega_n^{-1}$ *za* $n \neq 0$ *i* $c_0 = 1/\pi$. *Odredite najbolju polinomijalnu aproksimaciju stupnja* 2 *koji oko* 0 *najbolje aproksimira tri najznačajnija člana Fourierovog reda te funkcije.*

Uputa:

1. $T = 1 \Rightarrow L = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_n = 2n\pi$.
2. Funkcija je parna, dakle su $B_n = 0$ za sve n, odnosno spektar amplituda je $|c_{\pm n}| = \frac{1}{2}|A_n|$ za $n \in \mathbb{N}_0$.
3. $c_0 = \frac{1}{\pi} \Rightarrow A_0 = \frac{2}{\pi} \approx 0.6366$;
4. $\frac{1}{2}|A_n| = \frac{1}{\omega_n} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n}$ pada na $\mathbb{N}$ počevši od $\frac{1}{2\pi} \approx 0.159$pa su tri najznačajnija člana oni s $n = 0, 1, 2$.
5. To je dakle $f(t) = \frac{2}{\pi} \pm \frac{1}{\pi}\cos(2\pi t) \pm \frac{1}{4\pi}\cos(4\pi t)$ (četiri mogućnosti)
6. $T_2(x) = b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2$ opet možemo dobiti ili korištenjem definicije Taylorovih koeficijenata ili kao 2. parcijalnu sumu Maclaurinovog reda.