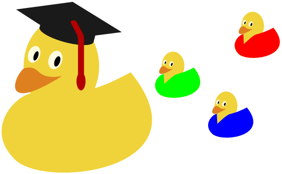
16. predavanje: Parcijalne derivacije. Plohe u prostoru. Lokalni ekstremi skalarnih funkcija više varijabli.

Franka Miriam Brückler



Parcijalne derivacije prvog reda

Ako je z zavisna varijabla, a x jedna od njezinih nezavisnih varijabli, $\frac{\partial z}{\partial x}(X)$, gdje je X element domene od z, aproksimira

Parcijalne derivacije prvog reda

Ako je z zavisna varijabla, a x jedna od njezinih nezavisnih varijabli, $\frac{\partial z}{\partial x}(X)$, gdje je X element domene od z, aproksimira relativnu promjenu z kad se x malo promijeni u odnosu na svoju vrijednost u X, a sve ostale nezavisne varijable se ne mijenjaju.

Primjer

Izohorni toplinski kapacitet:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,p,n_1,n_2,\ldots,n_k}.$$

Parcijalne derivacije prvog reda

Ako je z zavisna varijabla, a x jedna od njezinih nezavisnih varijabli, $\frac{\partial z}{\partial x}(X)$, gdje je X element domene od z, aproksimira relativnu promjenu z kad se x malo promijeni u odnosu na svoju vrijednost u X, a sve ostale nezavisne varijable se ne mijenjaju.

Primjer

Izohorni toplinski kapacitet:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,p,n_1,n_2,\dots,n_k}.$$

Eulerovo cikličko pravilo:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

Zadatak

U izotermnim odnosno izoentropijskim okolnostima definirana je izotermna odnosno adijabatska kompresibilnost

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T, \quad \kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S.$$

Znajući da vrijedi

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V, \quad C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$$

dokažite

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}.$$

Gradijent skalarne funkcije

Koliko parcijalnih derivacija prvog reda ima skalarna funkcija od n varijabli?

Gradijent skalarne funkcije

Koliko parcijalnih derivacija prvog reda ima skalarna funkcija od n varijabli?

Gradijent skalarne funkcije f u nekoj točki X njene domene je vektor $\nabla f(X)$ prvih parcijalnih derivacija od f izračunatih u toj točki:

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \dots \right).$$

Gradijent skalarne funkcije

Koliko parcijalnih derivacija prvog reda ima skalarna funkcija od n varijabli?

Gradijent skalarne funkcije f u nekoj točki X njene domene je vektor $\nabla f(X)$ prvih parcijalnih derivacija od f izračunatih u toj točki:

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \dots \right).$$

Elemente domene X, ako se radi o funkciji dviju ili triju varijabli, za crtanje polja gradijenta interpretiramo kao točke, a njima pridružene gradijente kao geometrijske vektore koji počinju u X.

Gradijent skalarne funkcije

Koliko parcijalnih derivacija prvog reda ima skalarna funkcija od n varijabli?

Gradijent skalarne funkcije f u nekoj točki X njene domene je vektor $\nabla f(X)$ prvih parcijalnih derivacija od f izračunatih u toj točki:

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \dots \right).$$

Elemente domene X, ako se radi o funkciji dviju ili triju varijabli, za crtanje polja gradijenta interpretiramo kao točke, a njima pridružene gradijente kao geometrijske vektore koji počinju u X.

Zadatak

Kako biste za danu skalarnu funkciju f triju varijabli kojoj ne znate formulu, ali imate dobre procjene iznosa njezinih parcijalnih derivacija prvog reda u točki $(1, 2, 3)$ procijenili promjenu iznosa te funkcije ako se sve tri varijable malo promijene?

Funkcije dviju varijabli i nivo-krivulje

Zadatak

Za $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ *skicirajte jednu nivo-krivulju i polje gradijenta duž nje. Što uočavate? Izračunajte jednadžbu tangente u jednoj točki te krivulje!*

Zadatak

Za $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ skicirajte jednu nivo-krivulju i polje gradijenta duž nje. Što uočavate? Izračunajte jednadžbu tangente u jednoj točki te krivulje!

Krivulja u ravnini $\mathbb{R}^2$ je nivo-krivulja skalarne funkcije f dviju varijabli x i y uz uvjet $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ za sve (x,y) na krivulji. Koeficijent smjera tangente u točki (x_0, y_0) na krivulji $f(x,y) = a$ je

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Kako bismo po analogiji proširili razmišljanje o nivo-krivuljama na slučaj funkcija triju varijabli? Objasnite na primjeru jedne linearne funkcije triju varijabli!

Plohe u prostoru

Ploha u prostoru je skup $\mathcal{P}$ svih točaka (x, y, z) koje zadovoljavaju jednadžbu plohe

$$f(x, y, z) = a$$

(tj. to je nivo-skup jedne skalarne funkcije triju varijabli) uz uvjet da je

$$\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

za svaku točku iz $\mathcal{P}$.

Plohe u prostoru

Ploha u prostoru je skup $\mathcal{P}$ svih točaka (x, y, z) koje zadovoljavaju jednadžbu plohe

$$f(x, y, z) = a$$

(tj. to je nivo-skup jedne skalarne funkcije triju varijabli) uz uvjet da je

$$\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

za svaku točku iz $\mathcal{P}$.

Zadatak

Dokažite da su sljedeći skupovi plohe u prostoru:

- *svaka sfera* $(x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - s)^2 = r^2$*;*
- *svaka ravnina;*
- *graf svake derivabilne funkcije dviju varijabli.*

Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju?

Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju? A kako leže vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ u odnosu na plohe zadane s $f(x, y, z) = a$?

Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju? A kako leže vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ u odnosu na plohe zadane s $f(x, y, z) = a$?
Gradijent (njegov smjer i orijentacija) funkcije f u točki (x_0, y_0) nivo-krivulje $f(x, y) = a$ odnosno točki (x_0, y_0, z_0) nivo-plohe $f(x, y, z) = a$ pokazuje smjer pomakom u kojem dolazi do najvećeg porasta vrijednosti funkcije koja zadaje krivulju odnosno plohu.

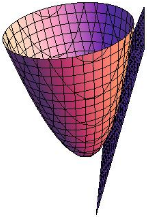
Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju? A kako leže vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ u odnosu na plohe zadane s $f(x, y, z) = a$?
Gradijent (njegov smjer i orijentacija) funkcije f u točki (x_0, y_0) nivo-krivulje $f(x, y) = a$ odnosno točki (x_0, y_0, z_0) nivo-plohe $f(x, y, z) = a$ pokazuje smjer pomakom u kojem dolazi do največeg porasta vrijednosti funkcije koja zadaje krivulju odnosno plohu.
Zašto smo kod definicije krivulje $f(x, y) = a$ tražili da u svakoj njezinoj točki ∇f bude različit od nulvektora?

Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju? A kako leže vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ u odnosu na plohe zadane s $f(x, y, z) = a$?

Gradijent (njegov smjer i orijentacija) funkcije f u točki (x_0, y_0) nivo-krivulje $f(x, y) = a$ odnosno točki (x_0, y_0, z_0) nivo-plohe $f(x, y, z) = a$ pokazuje smjer pomakom u kojem dolazi do najvećeg porasta vrijednosti funkcije koja zadaje krivulju odnosno plohu.

Zašto smo kod definicije krivulje $f(x, y) = a$ tražili da u svakoj njezinoj točki ∇f bude različit od nulvektora? Ima li smisla govoriti o tangenti na sferu ili neku drugu plohu? Zašto?

Kako su ležali vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ u odnosu na njezinu nivo-krivulju? A kako leže vektori koji odgovaraju gradijentu funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ u odnosu na plohe zadane s $f(x, y, z) = a$?
Gradijent (njegov smjer i orijentacija) funkcije f u točki (x_0, y_0) nivo-krivulje $f(x, y) = a$ odnosno točki (x_0, y_0, z_0) nivo-plohe $f(x, y, z) = a$ pokazuje smjer pomakom u kojem dolazi do najvećeg porasta vrijednosti funkcije koja zadaje krivulju odnosno plohu.
Zašto smo kod definicije krivulje $f(x, y) = a$ tražili da u svakoj njezinoj točki ∇f bude različit od nulvektora? Ima li smisla govoriti o tangenti na sferu ili neku drugu plohu? Zašto?



Tangencijalne ravnine

Tangencijalna ravnina na plohu $f(x, y, z) = a$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.
Kako glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki?

Tangencijalne ravnine

Tangencijalna ravnina na plohu $f(x, y, z) = a$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.

Kako glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki? A jednadžba normale?

Tangencijalne ravnine

Tangencijalna ravnina na plohu $f(x, y, z) = a$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.
Kako glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki? A jednadžba normale?
Može li tangencijalna ravnina na graf skalarne funkcije dviju varijabli biti paralelna sa z-osi? Zašto?

Tangencijalne ravnine

Tangencijalna ravnina na plohu $f(x, y, z) = a$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.
Kako glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki? A jednadžba normale?
Može li tangencijalna ravnina na graf skalarne funkcije dviju varijabli biti paralelna sa z-osi? Zašto?

Zadatak

Izračunajte jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na majmunovo sedlo, tj. graf funkcije $f(x, y) = x^3 - 3x\,y^2$ u njegovoj točki određenoj s $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Tangencijalne ravnine

Tangencijalna ravnina na plohu $f(x,y,z) = a$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.
Kako glasi jednadžba tangencijalne ravnine na plohu u nekoj njenoj točki? A jednadžba normale?
Može li tangencijalna ravnina na graf skalarne funkcije dviju varijabli biti paralelna sa z-osi? Zašto?

Zadatak

Izračunajte jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na majmunovo sedlo, tj. graf funkcije $f(x,y) = x^3 - 3x\,y^2$ u njegovoj točki određenoj s $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Lokalni ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = x^2$, $h(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x,y) = x^2 - y^2$? Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme?

Lokalni ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = x^2$, $h(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x,y) = x^2 - y^2$? Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme? Globalne?

Lokalni ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = x^2$, $h(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x,y) = x^2 - y^2$? Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme? Globalne? Što je neobično za točku $(0,0,0)$ na grafu funkcije i?

Lokalni ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^2$, $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x, y) = x^2 - y^2$? Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme? Globalne? Što je neobično za točku $(0, 0, 0)$ na grafu funkcije i?

Za skalarnu funkciju $f : D \to \mathbb{R}$ točku $X_0 \in D$ zovemo **točkom lokalnog minimuma odnosno maksimuma** funkcije f ako za sve $X \in D$ iz neke okoline od X_0 vrijedi $f(X) \geq f(X_0)$ odnosno $f(X) \leq f(X_0)$;

Lokalni ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^2$, $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x, y) = x^2 - y^2$? Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme? Globalne? Što je neobično za točku $(0, 0, 0)$ na grafu funkcije i?

Za skalarnu funkciju $f : D \to \mathbb{R}$ točku $X_0 \in D$ zovemo točkom lokalnog minimuma odnosno maksimuma funkcije f ako za sve $X \in D$ iz neke okoline od X_0 vrijedi $f(X) \geq f(X_0)$ odnosno $f(X) \leq f(X_0)$; Koji su bili osnovni koraci postupka određivanja lokalnih ekstrema za derivabilne funkcije jedne varijable?

Lokalni ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Kako izgledaju grafovi funkcija zadanih s $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^2$, $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $i(x, y) = x^2 - y^2$? Što biste rekli, postižu li te funkcije lokalne ekstreme? Globalne? Što je neobično za točku $(0, 0, 0)$ na grafu funkcije i?

Za skalarnu funkciju $f : D \to \mathbb{R}$ točku $X_0 \in D$ zovemo točkom lokalnog minimuma odnosno maksimuma funkcije f ako za sve $X \in D$ iz neke okoline od X_0 vrijedi $f(X) \geq f(X_0)$ odnosno $f(X) \leq f(X_0)$; Koji su bili osnovni koraci postupka određivanja lokalnih ekstrema za derivabilne funkcije jedne varijable?

Stacionarna točka skalarne funkcije je nultočka njenog gradijenta.

Zadatak

Ako je (x_0, y_0) stacionarna točka skalarne funkcije f dviju varijabli, što nam to govori o tangencijalnoj ravnini na graf te funkcije u točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$?

Parcijalne derivacije drugog reda

Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija od 2 varijable? 3? n?

Parcijalne derivacije drugog reda

Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija od 2 varijable? 3? n? Zašto se za parcijalnu derivaciju prvo po $\heartsuit$ pa onda po $\spadesuit$ koristi notacija

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \spadesuit \partial \heartsuit}?$$

Zadatak

Odredite parcijalne derivacije drugog reda za $f(x, y, z) = \sin(x\,y) \cdot e^z - x^3 + \frac{y}{z}$. *Što primjećujete?*

Parcijalne derivacije drugog reda

Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija od 2 varijable? 3? n? Zašto se za parcijalnu derivaciju prvo po $\heartsuit$ pa onda po $\spadesuit$ koristi notacija

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\spadesuit\partial\heartsuit}?$$

Zadatak

Odredite parcijalne derivacije drugog reda za $f(x, y, z) = \sin(x\,y) \cdot e^z - x^3 + \frac{y}{z}$. *Što primjećujete?*

Što je to Hesseova matrica?

Parcijalne derivacije drugog reda

Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija od 2 varijable? 3? n? Zašto se za parcijalnu derivaciju prvo po $\heartsuit$ pa onda po $\spadesuit$ koristi notacija

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \spadesuit \partial \heartsuit}?$$

Zadatak

Odredite parcijalne derivacije drugog reda za $f(x, y, z) = \sin(x\,y) \cdot e^z - x^3 + \frac{y}{z}$. Što primjećujete?

Što je to Hesseova matrica? Što o njoj kaže Schwarzov teorem?

Parcijalne derivacije drugog reda

Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija od 2 varijable? 3? n? Zašto se za parcijalnu derivaciju prvo po $\heartsuit$ pa onda po $\spadesuit$ koristi notacija

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\spadesuit\partial\heartsuit}?$$

Zadatak

Odredite parcijalne derivacije drugog reda za $f(x,y,z) = \sin(x\,y)\cdot e^z - x^3 + \frac{y}{z}$. *Što primjećujete?*

Što je to Hesseova matrica? Što o njoj kaže Schwarzov teorem? Što su to (glavne) minore kvadratne matrice?

Parcijalne derivacije drugog reda

Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija od 2 varijable? 3? n? Zašto se za parcijalnu derivaciju prvo po $\heartsuit$ pa onda po $\spadesuit$ koristi notacija

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \spadesuit \partial \heartsuit}?$$

Zadatak

Odredite parcijalne derivacije drugog reda za $f(x, y, z) = \sin(x\,y) \cdot e^z - x^3 + \frac{y}{z}$. *Što primjećujete?*

Što je to Hesseova matrica? Što o njoj kaže Schwarzov teorem? Što su to (glavne) minore kvadratne matrice? Izračunajte glavne minore Hesseove matrice funkcije iz gornjeg zadatka!

Provjera je li stacionarna točka točka lokalnog ekstrema

Funkcija f u stacionarnoj točki X_0 ima

- lokalni mi nimum ako su sve minore Hesseove matrice $H_f(X_0)$ pozitivne.
- lokalni maksimum ako predznaci minora Hesseove matrice $H_f(X_0)$ alterniraju počevši s negativnim.

Provjera je li stacionarna točka točka lokalnog ekstrema

Funkcija f u stacionarnoj točki X_0 ima

- lokalni mi nimum ako su sve minore Hesseove matrice $H_f(X_0)$ pozitivne.
- lokalni maksimum ako predznaci minora Hesseove matrice $H_f(X_0)$ alterniraju počevši s negativnim.

Što je to sedlasta točka?

Provjera je li stacionarna točka točka lokalnog ekstrema

Funkcija f u stacionarnoj točki X_0 ima

- lokalni mi nimum ako su sve minore Hesseove matrice $H_f(X_0)$ pozitivne.
- lokalni maksimum ako predznaci minora Hesseove matrice $H_f(X_0)$ alterniraju počevši s negativnim.

Što je to sedlasta točka? Što ako su neke od minora Hesseove matrice nula?

Provjera je li stacionarna točka točka lokalnog ekstrema

Funkcija f u stacionarnoj točki X_0 ima

- lokalni mi nimum ako su sve minore Hesseove matrice $H_f(X_0)$ pozitivne.
- lokalni maksimum ako predznaci minora Hesseove matrice $H_f(X_0)$ alterniraju počevši s negativnim.

Što je to sedlasta točka? Što ako su neke od minora Hesseove matrice nula?

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$