

Matematika 2 za kemičare

pismeni ispit, 8. srpnja 2026.

Franka Miriam Brückler i Matea Čelar

1. (20) Linearni operator $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ima spektar $\sigma(\hat{A}) = \{0, 2\}$. Svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti 0 su $\{(t, 0, -t) : t \in \mathbb{R}\}$, a svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti 2 su $\{(2s + t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

(a) (10 bodova) Odredite matricu operatora $\hat{A}$ s obzirom na kanonsku bazu za $\mathbb{R}^3$.

(b) (10 bodova) Odredite sve vektore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ takve da vektor $\hat{A}\vec{v}$ leži na pravcu

$$p \dots \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Rješenje.

(a) Iz zadanih informacija o spektru i svojstvenim vektorima znamo da je

$$\hat{A}(1, 0, -1) = (0, 0, 0), \quad \hat{A}(2, 1, 0) = (4, 2, 0), \quad \hat{A}(1, 0, 1) = (2, 0, 2).$$

Sada imamo

$$(1, 0, 0) = \frac{1}{2}((1, 0, 1) + (1, 0, -1)) \Rightarrow \hat{A}(1, 0, 0) = \frac{1}{2}((2, 0, 2) + (0, 0, 0)) = (1, 0, 1),$$

$$(0, 1, 0) = (2, 1, 0) - 2(1, 0, 0) \Rightarrow \hat{A}(0, 1, 0) = (4, 2, 0) - 2(1, 0, 1) = (2, 2, -2)$$

$$(0, 0, 1) = \frac{1}{2}((1, 0, 1) - (1, 0, -1)) \Rightarrow \hat{A}(0, 0, 1) = \frac{1}{2}((2, 0, 2) - (0, 0, 0)) = (1, 0, 1).$$

Dakle, tražena matrica je

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \hat{A}e_1 & \hat{A}e_2 & \hat{A}e_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Za $\vec{v} = (x, y, z)$ imamo

$$\begin{pmatrix} | \\ \hat{A}\vec{v} \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 2y \\ x - 2y + z \end{pmatrix}.$$

Tražimo vektore (x, y, z) koji su paralelni sa vektorom smjera pravca p , tj. $(3, 2, -1)$. Dakle, treba riješiti jednadžbu

$$(x + 2y + z, 2y, x - 2y + z) = \lambda(3, 2, -1),$$

odnosno sustav

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3\lambda \\ 2y = 2\lambda \\ x - 2y + z = -\lambda. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe dobivamo $y = \lambda$, a zatim uvrštavanjem u drugu i treću jednadžbu dobivamo $x + z = y$. Preostala nam je jedna jednadžba s tri nepoznanice, pa je rješenje dvoparametarska familija, npr.

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = s - t, \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Skup traženih vektora je $\{(t, s, s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

2. (20) Riješite početnu zadaću

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = \cos^2 t \\ y(0) = \frac{11}{85} \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Rješenje. Karakteristična jednačba pripadne homogene ODJ je

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0,$$

čije rješenje je $\lambda = 1 \pm 2i$. Stoga je homogeno rješenje

$$y_H(t) = e^t (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

Desna strana jednačbe je

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t,$$

pa rješenje tražimo u obliku $y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$,

$$y_{P_1} = A, \quad y_{P_2} = B \cos 2t + C \sin 2t.$$

Imamo $y'_{P_1} = y''_{P_1} = 0$, pa uvrštavanjem u jednačbu $y'' - 2y' + 5y = \frac{1}{2}$ dobivamo $A = \frac{1}{10}$. Nadalje, imamo:

$$y'_{P_2} = -2B \sin 2t + 2C \cos 2t, \quad y''_{P_2} = -4B \cos 2t - 4C \sin 2t.$$

Uvrštavanjem u jednačbu $y'' - 2y' + 5y = \frac{1}{2} \cos 2t$ dobivamo

$$(B - 4C) \cos 2t + (4B + C) \sin 2t = \frac{1}{2} \cos 2t.$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobivamo sustav

$$\begin{cases} B - 4C = \frac{1}{2} \\ 4B + C = 0 \end{cases}$$

čije rješenje je

$$B = \frac{1}{34}, \quad C = -\frac{2}{17}.$$

Dakle, partikularno rješenje je

$$y_P(t) = y_{P_1}(t) + y_{P_2}(t) = \frac{1}{10} + \frac{1}{34} \cos 2t - \frac{2}{17} \sin 2t.$$

Opće rješenje diferencijalne jednačbe glasi

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = e^t (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + \frac{1}{10} + \frac{1}{34} \cos 2t - \frac{2}{17} \sin 2t.$$

Iz uvjeta $y(0) = \frac{11}{85}$ dobiva se

$$C_1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{34} = \frac{11}{85},$$

pa je $C_1 = 0$. Derivirajmo opće rješenje:

$$y'(t) = e^t ((C_1 + 2C_2) \cos 2t + (C_2 - 2C_1) \sin 2t) - \frac{1}{17} \sin 2t - \frac{4}{17} \cos 2t.$$

Uvrštavanjem $t = 0$ i $C_1 = 0$ dobivamo $2C_2 - \frac{4}{17} = 0$, odnosno $C_2 = \frac{2}{17}$. Konačno rješenje početne zadaće je

$$y(t) = \frac{2}{17} e^t \sin 2t + \frac{1}{10} + \frac{1}{34} \cos 2t - \frac{2}{17} \sin 2t.$$

3. (20) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$.

(a) (10 bodova) Dokažite da je skup

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 1\}$$

ploha u $\mathbb{R}^3$.

(b) (10 bodova) Izračunajte $\iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz$, pri čemu je

$$V \dots \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Rješenje.

(a) Odredimo stacionarne točke funkcije f . Računamo parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{2xz}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{2yz}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Stacionarne točke zadovoljavaju sustav

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Međutim,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} > 0$$

za svaku točku (x, y, z) iz domene, pa parcijalna derivacija po varijabli z nikada nije jednaka nuli. Stoga funkcija nema stacionarnih točaka.

Kako nivo-skup $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 1\}$ ne sadrži stacionarne točke od f , prema teoremu s predavanja on je ploha.

(b) Prelazimo na cilindrične koordinate. Skup V je tada

$$V \dots \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Integral sada poprima oblik

$$\iiint_V \frac{z}{r^2} \cdot r \, dr d\varphi dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{z}{r} \, dr d\varphi dz = \left(\int_1^2 \frac{dr}{r} \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^1 z \, dz \right)$$

Redom integriramo:

$$\int_1^2 \frac{1}{r} \, dr = \ln 2, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \quad \int_0^1 z \, dz = \frac{1}{2}.$$

Dakle,

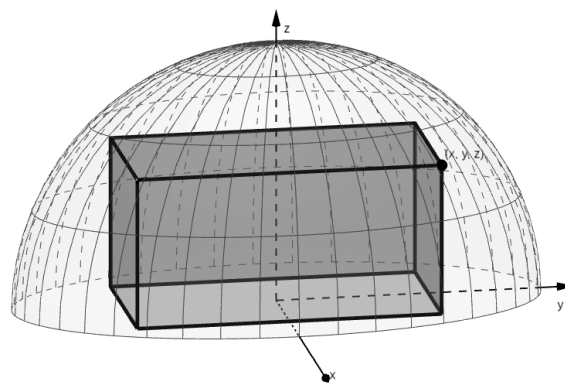
$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \ln 2 = \pi \ln 2.$$

4. (20) Tehnološka kompanija projektira zgradu za novi podatkovni centar. U prostoru čiji strop ima oblik gornje polovice elipsoida s jednažbom

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 48$$

treba smjestiti server u obliku kvadra. Koji je najveći volumen servera koji stane u tu prostoriju?

Rješenje. Kvadar (server) najvećeg volumena koji se može smjestiti u zadanu prostoriju će gornjim vrhovima dodirivati strop. Nadalje, on mora biti centriran u ishodištu i imati stranice paralelne s koordinatnim osima; u suprotnom, translacijom i rotacijom možemo dobiti kvadar koji ne dodiruje gornju plohu, pa ga možemo produžiti i time povećati ukupni volumen.



Neka je jedan vrh kvadra u točki (x, y, z) . Zbog simetrije možemo pretpostaviti da je $x, y \geq 0$, a svakako je i $z \geq 0$ jer promatramo gornju polovicu elipsoida. Tada su stranice kvadra duljina $2x$, $2y$ i z , pa je volumen $V = 4xyz$. Volumen će biti maksimalan ako i samo ako je xyz maksimalno. Kako je dovoljno promatrati slučajeve kada jedan vrh kvadra dodiruje strop, vrijedi $4x^2 + y^2 + z^2 = 48$.

Dakle, treba maksimizirati funkciju

$$f(x, y, z) = xyz$$

uz uvjet

$$g(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 48 = 0.$$

To radimo metodom Lagrangeovih multiplikatora. Definiramo Lagrangeovu funkciju

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(4x^2 + y^2 + z^2 - 48).$$

Njene stacionarne točke zadovoljavaju sustav

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz = 8\lambda x \\ xz = 2\lambda y \\ xy = 2\lambda z \\ 4x^2 + y^2 + z^2 = 48. \end{cases}$$

Uočimo da λ ne može biti 0 – u suprotnom bi neka od varijabli x , y i z bila nula, pa bismo dobili volumen 0 što sigurno nije maksimalno. Slično, možemo odbaciti slučajeve kad je $x = 0$, $y = 0$ ili $z = 0$. Također, zbog $x, y, z > 0$ iz prve tri jednadžbe slijedi da je i $\lambda > 0$. Sada možemo npr. iz prve jednadžbe izraziti $x = \frac{yz}{8\lambda}$, pa uvrštavanjem u drugu i treću dobivamo

$$z^2 = 16\lambda^2 \quad \text{i} \quad y^2 = 16\lambda^2,$$

odnosno (koristimo $y, z, \lambda > 0$)

$$z = y = 4\lambda.$$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo

$$16\lambda^2 = 8\lambda x, \quad \text{odnosno} \quad x = 2\lambda.$$

Sada iz četvrte jednadžbe dobivamo $48\lambda^2 = 48$, tj. $\lambda = 1$. Dakle, izraz xyz je maksimalan za $x = 2$, $y = 4$ i $z = 4$, pa je traženi maksimalni volumen

$$V_{max} = 4xyz = 128 \text{ (kubnih jedinica).}$$