# Sustavi linearnih jednadžbi

**Vježbe 1 - 7.3.2025.**

**Zadatak 1.** Koliko srebra čistoće 0.85 trebamo pomiješati sa srebrom čistoće 0.5 da bismo dobili 1kg srebra čistoće 0.65?

**Zadatak 2.** U dvorištu su crne ovce, bijele ovce i bijele patke. Ako je u dvorištu 101 ovca, 150 bijelih životinja i 504 nogu, koliko ima crnih ovaca?

**Zadatak 3.** Novčić mase 7g načinjen je od legure bakra, aluminija i cinka. Aluminija ima 2g više nego cinka. Kada bi bilo dvostruko više aluminija, a ne bi bilo cinka, masa novčića se ne bi promijenila. Koliko je kojeg metala u novčiću?

**Zadatak 4.** Izjednačite kemijsku jednadžbu

$$x\,\mathrm{HNO_3} + y\,\mathrm{I_2} \longrightarrow z\,\mathrm{HIO_3} + u\,\mathrm{NO} + v\,\mathrm{H_2O}.$$

# Sustav linearnih jednadžbi

**Linearna jednadžba s $n$ nepoznanica** je jednadžba oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ zadani (realni) brojevi.

**Sustav linearnih jednadžbi** je skup od konačno mnogo linearnih jednadžbi s istim nepoznanicama (za koje tražimo zajedničko rješenje).

**Rješenje sustava** je svaka uređena $n$–torka brojeva koja zadovoljava sve jednadžbe sustava.

# Matrica sustava

Sustavu linearnih jednadžbi oblika

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pridružujemo **(proširenu) matricu sustava**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

# Elementarne transformacije

**Elementarne transformacije** matrice sustava su:

① zamjena dvaju redaka;

② množenje nekog retka brojem koji nije nula;

③ pribrajanje jednog retka drugom.

**Teorem**

Elementarne transformacije ne mijenjaju skup rješenja sustava.

Ako je jedna matrica dobivena iz druge primjenom elementarnih transformacija, kažemo da su te matrice **ekvivalentne** i između njih pišemo znak $\sim$.

**Primjer.**

# Gaussova metoda eliminacija

Cilj Gaussove metode eliminacija je matricu sustava primjenom elementarnih transformacija svesti na oblik

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_n \end{array}\right)$$

iz kojeg možemo lako očitati rješenja sustava:

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad \dots \quad x_n = c_n.$$

# Napomene

- Kombinacijom transformacija ② i ③ dobivamo sljedeće pravilo:

  Ako je $i \neq j$, možemo $i$–tom retku pribrojiti
  $\alpha \cdot (j\text{–ti redak})$ za bilo koji $\alpha \in \mathbb{R}$.

  Najčešće ćemo koristiti upravo tu transformaciju!

- Ako se pojavi redak

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  možemo ga ispustiti.

- Ako se pojavi redak

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{array}\right)$$

  gdje je $c \neq 0$, sustav nema rješenja!

# Napomene

- Ako dobijemo matricu oblika

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & * & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * & c_n \end{array}\right)$$

  sustav ima beskonačno mnogo rješenja!

**Zadatak 5.** Gaussovom metodom eliminacija riješite sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

(a) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 12x_3 = 1 \end{cases}$$

**Zadatak 5.** Gaussovom metodom eliminacija riješite sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

(b) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

**Zadatak 5.** Gaussovom metodom eliminacija riješite sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

(c) $$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5 \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2 \end{cases}$$

**Zadatak 5.** Gaussovom metodom eliminacija riješite sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

(d) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Ovo je primjer **homogenog** sustava - sustava u kojem su svi slobodni članovi $0$.
Takav sustav uvijek ima **trivijalno** rješenje $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

**Zadatak 5.** Gaussovom metodom eliminacija riješite sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

(e) $$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 - 15x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 - 10x_3 = 4 \\ 4x_1 + 12x_2 - 20x_3 = 8 \end{cases}$$

**Zadatak 6.** U ovisnosti o parametru $\lambda$ riješite sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

(a) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = \lambda \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

**Zadatak 6.** U ovisnosti o parametru $\lambda$ riješite sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

(b) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9 \end{cases}$$