Matrice i vektorski prostori

Vježbe 2 - 14.3.2025.

Matrice

Definicija

(Realna) matrica tipa (dimenzije) $m \times n$ je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]$$

gdje je $a_{ij} \in \mathbb{R}$ za sve $i \in \{1, \dots, m\}$ i $j \in \{1, \dots, n\}$.

Skup svih realnih matrica tipa $m \times n$ označavamo sa $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

(Ako je $m = n$, pišemo samo $M_n(\mathbb{R})$ umjesto $M_{n,n}(\mathbb{R})$)

Primjeri

1. **Nulmatrica** tipa $m \times n$

2. **Jedinična matrica** tipa $m \times m$

Primjeri

3. $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = i + j$

4. $A \in M_{1,4}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = (j - i)^2$

Zbrajanje matrica

Matrice se mogu zbrajati ako su istog tipa. To se radi tako da se zbrajaju elementi na istim pozicijama:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Rezultat zbrajanja matrica tipa $m \times n$ je matrica istog tipa.

Primjer.

Svojstva zbrajanja matrica

① $A + B = B + A$

② $(A + B) + C = A + (B + C)$

③ $A + \mathbf{0}_{m,n} = A$

④ $A + (-A) = \mathbf{0}_{m,n}$

Množenje matrica skalarom

Svaka matrica može se množiti brojem (skalarom). To se radi tako da se svaki njen element pomnoži tim brojem:

$$\alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}].$$

Množenje matrice skalarom ne mijenja tip matrice.

Primjer.

Svojstva množenja skalarom

⑤ $1 \cdot A = A$

⑥ $0 \cdot A = \mathbf{0}_{m,n}$

⑦ $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

⑧ $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

⑨ $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$

Zadatak 1. Izračunajte:

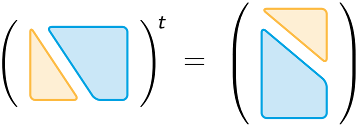
$$123 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 122 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Transponiranje matrice

Definicija

Transponirana matrica matrice $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ je matrica $A^t \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ koja na poziciji (i, j) ima element a_{ji}.

Drugim riječima, transponiranje matrice je "zrcaljenje oko glavne dijagonale".



Transponiranjem matrice njeni stupci prelaze u retke i obratno.

Primjer.

Zadatak 2. Izračunajte:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^t$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}^t$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}^t$

Simetrične matrice

Definicija

Matricu A zovemo **simetričnom** ako je ona jednaka svojoj transponiranoj matrici A^t, tj. ako je $a_{ij} = a_{ji}$ za sve i, j.

Svaka simetrična matrica je kvadratna.

Primjer.

Antisimetrične matrice

Definicija

Matricu A zovemo **antisimetričnom** ako je $A^t = -A$, tj. ako je $a_{ij} = -a_{ji}$ za sve i, j.

Svaka antisimetrična matrica je kvadratna i ima nule na glavnoj dijagonali.

Primjer.

Zadatak 3. Koje od sljedećih matrica su simetrične, a koje antisimetrične?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} \sin(\pi) & \cos(\pi) \\ \cos(2\pi) & \sin(2\pi) \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

Vektorski prostori

Vektorski prostori

Definicija

(Realan) vektorski prostor je skup V na kojem su zadane operacije zbrajanja i množenja skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:

① $(v+w)+u = v+(w+u)$, za sve $v, w, u \in V$;

② Postoji **nulvektor** $\mathbf{0}_V \in V$ takav da je $v + \mathbf{0}_V = v$ za sve $v \in V$;

③ Za svaki $v \in V$ postoji $-v \in V$ takav da je $v + (-v) = \mathbf{0}_V$;

④ $v + w = w + v$ za sve $v, w \in V$;

⑤ $1 \cdot v = v$ za sve $v \in V$;

⑥ $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $v \in V$;

⑦ $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$ za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ i $v, w \in V$;

⑧ $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta w$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $v \in V$.

Primjeri

1. V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$

   Uz standardne operacije zbrajanja $\vec{v} + \vec{w}$ i množenja skalarom $\alpha\vec{v}$ te nulvektor $\vec{0}$

2. $M_{m,n}(\mathbb{R})$ – skup svih matrica tipa $m \times n$ s realnim koeficijentima

   Uz operacije zbrajanja matrica i množenja skalarom matrica skalarom; nulvektor je nulmatrica dimenzije $m \times n$

3. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$

   Uz standardno zbrajanje i množenje; nulvektor je broj 0

4. Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$

   Slično kao $\mathbb{R}$

Primjeri

4. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, skup svih uređenih n–torki relanih brojeva

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

je realan vektorski prostor s operacijama

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\text{i} \quad \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

Nulvektor je $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n}$

Primjeri

5. **Skup svih polinoma** s realnim koeficijentima, s operacijama

   $\oplus$ npr. $(3x+5)+(x^3-x+1)=x^3+2x+6$
   $\odot$ npr. $\frac{1}{3}(3x+5)=x+\frac{5}{3}$

   Pripadni nulvektor je nulpolinom $p(x)=0$, za svaki $x\in\mathbb{R}$.

6. **Skup svih funkcija** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s operacijama

   $\oplus$ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
   $\odot$ $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$

   Pripadni nulvektor je funkcija $f(x)=0$, za svaki $x\in\mathbb{R}$.

7. **Nulprostor** $\{\mathbf{0}\}$ s operacijama

   $\oplus$ $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$
   $\odot$ $\alpha\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$, za svaki $\alpha\in\mathbb{R}$

Linearna kombinacija

Definicija

Neka je V realan vektorski prostor. Za $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ i $v_1, \ldots, v_n \in V$, izraz

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

zove se **linearna kombinacija** vektora $v_1, \ldots, v_n$ s koeficijentima $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

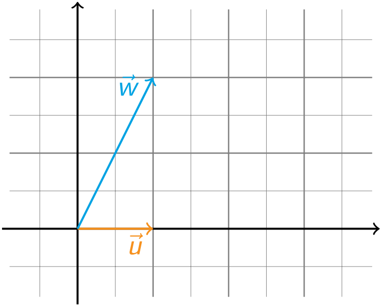
Primjeri

1. Jedna linearna kombinacija vektora $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ i $v_2 = (0, 1, 0, -1)$ iz $\mathbb{R}^4$ je

2. Polinom je linearna kombinacija polinoma $x^2 + 3$ i $2x$ s koeficijentima 2 i $\frac{3}{2}$

Primjeri

3. Vektor   je linearna kombinacija vektora $\vec{u} = [1, 0]$ i $\vec{w} = [1, 2]$ s koeficijentima 2 i 1



Linearna nezavisnost

Definicija

Neka je V vektorski prostor. Skup $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ je **linearno nezavisan** ako je jedino rješenje jednadžbe

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}_V$$

dano sa

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Ako skup vektora nije linearno nezavisan, kažemo da je **linearno zavisan**.

Zadatak 4. Odredite jesu li sljedeći skupovi vektora linearno nezavisni:

(a) $\{(1,1),(4,5)\}$

(b) $\{(1,3),(4,5),(0,6)\}$

Zadatak 4. Odredite jesu li sljedeći skupovi vektora linearno nezavisni:

(c) $\{(1,2,3),(1,3,0),(1,1,6)\}$

(d) $\{(1,\sqrt{2},1),(1,1,\pi),(0,0,0)\}$

Napomene

- U vektorskom prostoru V^3 vrijedi:
  - $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ je linearno zavisan $\iff$ $\vec{v_1} \| \vec{v_2}$
  - $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ je linearno zavisan $\iff$ $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ i $\vec{v_3}$ leže u istoj ravnini

- Za podskup S vektorskog prostora V vrijedi:

$S \subseteq V$ je linearno zavisan $\iff$ neki vektor $v \in S$ je linearna kombinacija preostalih vektora iz S

Rang matrice

Definicija

Ako retke matrice (ili njene stupce) shvatimo kao vektore, **rang** matrice je broj linearno nezavisnih redaka (odnosno stupaca) te matrice.

Rang matrice A označavamo sa $r(A)$.

Teorem

Rang matrice se ne mijenja primjenom elementarnih transformacija na **retke i stupce** te matrice.

Vrijedi:

$$r\begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * & \dots & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c}\text{broj elemenata različitih od } 0 \\ \text{na glavnoj dijagonali.}\end{array}$$

Zadatak 5. Izračunajte:

(a) $r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $r\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Zadatak 5. Izračunajte:

(c) $r\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Zadatak 6. Je li skup

$$\{(1,2,0,4),(1,2,0,1),(1,2,0,7)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

linearno nezavisan?

Baza i dimenzija

Definicija

Najveći broj elemenata kojeg u vektorskom prostoru V može imati neki linearno nezavisan skup vektora zove se **dimenzija** prostora V i označava se s $\dim V$.

Baza prostora V je bilo koji linearno nezavisan skup vektora koji ima $\dim V$ elemenata.

Primjeri

1. Nulprostor $\{\mathbf{0}\}$

2. Prostor $\mathbb{R}^n$

Primjeri

3. Prostor $M_{m,n}(\mathbb{R})$

Zadatak 7. Je li skup

$$\{(1,2,3),(2,2,3),(0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

baza za $\mathbb{R}^3$?

Potprostori

Definicija

Potprostor M vektorskog prostora V je neprazan podskup $M \subseteq V$ koji ima svojstvo da su sve linearne kombinacije elemenata iz M također elementi iz M.

potprostor je "zatvoren na linearne kombinacije"

Vrijedi: $M \subseteq V$ je potprostor od V $\iff$ $\boxed{\text{Za sve } v, w \in M \text{ i } \alpha \in \mathbb{R},\ v + w \in M \text{ i } \alpha v \in M}$

Potprostor vektorskog prostora je i sam vektorski prostor.

Primjer

Potprostori od $V^3(0)$

- dimenzije 0:
- dimenzije 1:
- dimenzije 2:
- dimenzije 3:

Prostor rješenja sustava

Skup R svih rješenja $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ **homogenog** sustava linearnih jednadžbi

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right.$$

je potprostor od $\mathbb{R}^n$, i pritom vrijedi

- $\dim R =$ broj slobodnih parametara
- Koeficijenti uz pojedine slobodne parametre u zapisu rješenja čine vektore jedne baze za R

Zadatak 8. Odredite dimenziju i jednu bazu prostora R rješenja sustava

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$