Množenje matrica, invertibilnost i determinanta

Vježbe 3 - 21.3.2025.

Množenje matrica

Množenje retka i stupca

Definicija

Matricu $A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ (vektor-redak) množimo matricom $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ (vektor-stupac) na sljedeći način:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \in M_{1,1}(\mathbb{R}).$$

Primjer.

Množenje matrica

Definicija

Matrice $A \in M_{m,n}$ i $B \in M_{n,p}$ množimo tako da svaki redak R_i od A pomnožimo sa svakim stupcem S_j od B i rezultat zapišemo na poziciju (i,j) u matricu tipa $m \times p$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} —R_1— \\ —R_2— \\ \vdots \\ —R_m— \end{pmatrix}}_{m\times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ S_1 & S_2 & \dots & S_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{n\times p} = \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 \cdot S_1 & R_1 \cdot S_2 & \dots & R_1 \cdot S_n \\ R_2 \cdot S_1 & R_2 \cdot S_2 & \dots & R_2 \cdot S_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_m \cdot S_1 & R_m \cdot S_2 & \dots & R_m \cdot S_n \end{pmatrix}}_{m\times p}$$

Važno: mogu se množiti samo **ulančane matrice**, tj. matrice A i B (tim redom!) takve da je

$$\text{broj stupaca od } A = \text{broj redaka od } B$$

Zadatak 1. Izračunajte:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Zadatak 1. Izračunajte:

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Svojstva množenja matrica

Vrijedi:

① $(AB)C = A(BC)$ za sve $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ i $C \in M_{p,r}(\mathbb{R})$

② $A(B + C) = AB + AC$ za sve $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ i $B, C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

③ $(A + B)C = AC + BC$ za sve $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ i $C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

④ $AI_n = I_m A = A$ za sve $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

⑤ $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ za sve $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

Važna napomena

Množenje matrica općenito nije komutativno, tj. općenito

$$AB \neq BA.$$

Primjer.

Zadatak 2. Riješite matričnu jednadžbu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veza matričnih jednadžbi i sustava

Uočimo: rješavanje matrične jednadžbe $AX = B$, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ekvivalentno je rješavanju sustava

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right.$$

Inverz matrice

Definicija

Inverz matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ je matrica $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ takva da je

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

Samo kvadratne matrice mogu imati inverz. Neke (kvadratne) matrice nemaju inverz!
Ako matrica ima inverz, on je jedinstven.

Primjer.

Algoritam za traženje inverza

Matricu

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

elementarnim transformacijama **na retcima** dovedemo do matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right).$$

Tada je $A^{-1} = B$.

Ako se u to postupku na lijevoj strani matrice pojavi nulredak, A^{-1} ne postoji!

Zadatak 3. Odredite A^{-1}, ako postoji:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$

Zadatak 3. Odredite A^{-1}, ako postoji:

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Inverz 2×2 matrice

Inverz matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ možemo izračuati po formuli:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Inverz postoji ako i samo ako je $ad - bc \neq 0$!

Broj $ad - bc$ zovemo **determinanta** matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Primjer.

Determinanta

Svakoj kvadratnoj matrici $A \in M_n(\mathbb{R})$ (na dolje opisan način) pridružujemo broj

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$$

koji karakterizira invertibilnost matrice A

$$\det A = 0 \quad \longleftrightarrow \quad A \text{ nema inverz}$$
$$\det A \neq 0 \quad \longleftrightarrow \quad A \text{ ima inverz}$$

Taj broj zovemo **determinanta** matrice A.

Računanje determinante

- Za 1×1 matricu $A = (a)$:

$$\det A = |a| =$$

- Za 2×2 matricu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

Sarrusovo pravilo

- Za 3×3 matricu $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

Laplaceov razvoj

- Za $n \times n$ matricu A, označimo sa A_{ij} matricu dobivenu iz A brisanjem i–tog retka i j–tog stupca

Razvoj po i–tom retku

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} (\det A_{ij})$$

Razvoj po j–tom stupcu

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} (\det A_{ij})$$

npr. razvoj po prvom stupcu:

$$\begin{vmatrix} a_1 & -R_1- \\ a_2 & -R_2- \\ a_3 & -R_3- \\ a_4 & -R_4- \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} -R_2- \\ -R_3- \\ -R_4- \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} -R_1- \\ -R_3- \\ -R_4- \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} -R_1- \\ -R_2- \\ -R_4- \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} -R_1- \\ -R_2- \\ -R_3- \end{vmatrix}$$

Primjer. (Razvoj po trećem stupcu)

Napomena: Predznaci pribrojnika u razvoju su

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Determinanta i elementarne transformacije

① Ako neki redak (stupac) pomnožimo s $\alpha \in \mathbb{R}$, determinanta se množi s α.

$$\begin{vmatrix} \text{——————} R_1 \text{——————} \\ \text{——————} R_2 \text{——————} \\ \cdots \\ \alpha a_1 \quad \alpha a_2 \quad \ldots \quad \alpha a_n \\ \cdots \\ \text{——————} R_n \text{——————} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \text{——————} R_1 \text{——————} \\ \text{——————} R_2 \text{——————} \\ \cdots \\ a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n \\ \cdots \\ \text{——————} R_n \text{——————} \end{vmatrix}$$

Primjer.

Determinanta i elementarne transformacije

② Zamjenom dvaju redaka ili stupaca determinanta se množi s -1.

$$\begin{vmatrix} \text{———} R_1 \text{———} \\ \cdots \\ \text{———} R_i \text{———} \\ \cdots \\ \text{———} R_j \text{———} \\ \cdots \\ \text{———} R_n \text{———} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{———} R_1 \text{———} \\ \cdots \\ \text{———} R_j \text{———} \\ \cdots \\ \text{———} R_i \text{———} \\ \cdots \\ \text{———} R_n \text{———} \end{vmatrix}$$

Primjer.

Determinanta i elementarne transformacije

③ Dodavanjem retka (stupca) pomnoženog s $\alpha \in \mathbb{R}$ nekom drugom retku (stupcu) determinanta se ne mijenja.

$$\begin{vmatrix} \text{———} R_1 \text{———} \\ \dots \\ \text{———} R_i \text{———} \\ \dots \\ \text{———} R_j \text{———} \\ \dots \\ \text{———} R_n \text{———} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{———} R_1 \text{———} \\ \dots \\ \text{———} R_i + \alpha R_j \text{———} \\ \dots \\ \text{———} R_j \text{———} \\ \dots \\ \text{———} R_n \text{———} \end{vmatrix}$$

Primjer.

Računanje determinante: posebni slučajevi

- Vrijedi:

$$\begin{vmatrix} d_1 & * & \dots & * & * \\ 0 & d_2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & d_{n-1} & 0 \\ * & * & \dots & * & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

- Ako vrijedi nešto od sljedećeg:
  - A ima nulredak ili nulstupac;
  - A ima dva jednaka retka/stupca;
  - retci/stupci od a su linearno zavisni;

  onda je $\det A = 0$.

Zadatak 4. Izračunajte:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Zadatak 4. Izračunajte:

(b) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Zadatak 4. Izračunajte:

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Zadatak 4. Izračunajte:

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Determinanta i operacije s matricama

Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Općenito $\boxed{\det(A+B) \neq \det A + \det B,}$ ali vrijedi

$$\begin{vmatrix} \text{---} R_1 \text{---} \\ \text{---} R_2 \text{---} \\ \cdots \\ \text{---} R_i + R_i' \text{---} \\ \cdots \\ \text{---} R_n \text{---} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{---} R_1 \text{---} \\ \text{---} R_2 \text{---} \\ \cdots \\ \text{---} R_i \text{---} \\ \cdots \\ \text{---} R_n \text{---} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{---} R_1 \text{---} \\ \text{---} R_2 \text{---} \\ \cdots \\ \text{---} R_i' \text{---} \\ \cdots \\ \text{---} R_n \text{---} \end{vmatrix}$$

  i analogno po stupcima.

- Vrijedi $\boxed{\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.}$

- Vrijedi **Binet-Cauchyjev teorem**: $\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B.}$

- Ako postoji A^{-1}, onda je $\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.}$

Zašto je važna determinanta?

Teorem

Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrica i $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ matrica-stupac. Tada je ekvivalentno:

(a) $\det A \neq 0$

(b) $r(A) = n$

(c) Retci od A su lin. nezavisni

(d) Retci od A čine bazu za $\mathbb{R}^n$

(e) Stupci od A su lin. nez.

(f) Stupci od A čine bazu za $\mathbb{R}^n$

(g) A ima inverz A^{-1}

(h) Matrična jednadžba $Ax = b$ ima jedinstveno rješenje (dano s $x = A^{-1}b$).

Cramerovo pravilo

Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ takva da je $\det A \neq 0$ i $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Tada sustav

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

možemo riješiti **Cramerovim pravilom**:

$$\boxed{x_j = \frac{\det A_j}{\det A}}$$

pri čemu je A_j matrica dobivena iz A zamjenom j–tog stupca s b.

Zadatak 5. Cramerovim pravilom riješite sustav:

$$\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ x - y + z &= 2 \\ x - y &= 2. \end{cases}$$