Linearni operatori

Vježbe 4 - 28.3.2025.

Podsjetnik: vektorski prostori

Vektorski prostor V je skup na kojem su definirane operacije **zbrajanja** $+$ i **množenja skalarom** $\cdot$ koje zadovoljavaju svojstva ...

Jedan istaknuti element svakog vektorskog prostora je **nulvektor** $\mathbf{0}_V$.

Primjeri: $V^3(O)$, $\mathbb{R}^n$, $M_{m,n}(\mathbb{R})$, polinomi, ...

Linearni operatori

Linearni opearatori

Definicija

Linearan operator je funkcija $A : V \to W$ (V i W su vektorski prostori) koja ima sljedeća dva svojstva:

① $A(v + w) = A(v) + A(w), \qquad \forall v, w \in V$

② $A(\alpha v) = \alpha A(v), \qquad \forall v \in V,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Ako je $W = \mathbb{R}$, linearan operator zovemo **linearnim funkcionalom**.

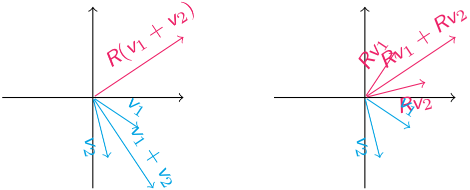
Primjeri

1. **Linerana funkcija** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2x + 3y - z$

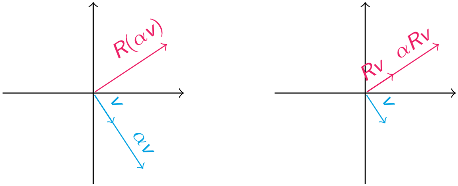
2. Funkcija $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $f(A) = 3A$

Primjeri

3. Rotacija vektora za 90° oko ishodišta $R : V^2(O) \to V^2(O)$



"Nije bitno zbrajamo li prvo ili rotiramo"



"Nije bitno množimo li prvo s α ili rotiramo"

Primjeri

4. **Jedinični operator** ili **identiteta**

$$\mathrm{id}_V : V \to V, \quad \mathrm{id}_V(v) = v$$

5. **Nuloperator**

$$\widehat{O} : V \to W, \quad \widehat{O}(v) = \mathbf{0}_W$$

Zadatak 1. Ispitajte je li zadana funkcija linearni operator:

(a) $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A(x) = 2x$

(b) $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B(x) = x + 2$

Svojstva linearnih operatora

Za svaki linearan operator $A : V \to W$ vrijedi:

1. $A(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$

2. Za bilo koje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ i $v_1, \ldots, v_n \in V$ vrijedi

$$A(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 A(v_i) + \cdots + \alpha_n A(v_n).$$

Linearni operatori $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Linearno operatori $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ su točno funkcije $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oblika

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n,\ \ldots\ , a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n).$$

Svaka komponenta rezultata je linearna funkcija $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Primjer.

2. Nuloperator

Koordinatni i matrični prikaz

Podsjetnik: baza vektorskog prostora

Baza vektorskog prostora V je linearno nezavisan skup vektora iz V koji ima najveći mogući broj elemenata.

$\longrightarrow$ dodavanjem nekog vektora baza prestaje biti linearno nezavisna, tj. svaki drugi vektor može se prikazati pomoću vektora iz baze. **Takav prikaz je jedinstven!**

Kanonska baza za $\mathbb{R}^n$ je

$$\{\underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{e_1}, \underbrace{(0, 1, \dots, 0)}_{e_2}, \dots, \underbrace{(0, 0, \dots, 1)}_{e_n}\}$$

Matrični prikaz vektora s obzirom na bazu

Definicija

Neka je $f = (f_1, \dots, f_n)$ (uređena) baza vektorskog prostora V.
Koordinatni prikaz vektora

$$v = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n \in V$$

u bazi f je

$$v(f) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,$$

a **matrični prikaz vektora** v u bazi f je

$$[v]_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{R}).$$

Primjer. Promotrimo vektor

$$v = (1, 0, -2) \in \mathbb{R}^3$$

i kanonsku bazu $e = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

Imamo

$$v = (1, 0, -2) = 1 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) + (-2) \cdot (0,0,1);$$

pa je

$$v(e) = \qquad \text{i} \quad [v]_e =$$

S obzirom na kanonsku bazu uvijek je $v(e) = v$ i $[v]_e = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}$.

Primjer (nastavak). Promotrimo sada isti vektor

$$v = (1, 0, -2) \in \mathbb{R}^3$$

i bazu $f = ((1, 0, 2), (0, 4, 0), (0, 0, 1))$.

Imamo

$$v = (1, 0, -2) = 1 \cdot (1, 0, 2) + 0 \cdot (0, 4, 0) + (-4) \cdot (0, 0, 1);$$

pa je

$$v(f) = \qquad \text{i} \quad [v]_f =$$

Matrični prikaz operatora s obzirom na bazu

Definicija

Neka je $A : V \to V$ linearni operator i neka je $f = (f_1, \ldots, f_n)$ (uređena) baza vektorskog prostora V. **Matrica linearnog operatora** A **s obzirom na bazu** f je matrica

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [Af_1]_f & [Af_2]_f & \ldots & [Af_n]_f \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

tj. matrica čiji j–ti stupac je matrični prikaz vektora Af_j u bazi f, za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Primjer

Odredimo $[A]_f$ za operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$A(x, y) = (-x, y),$$

i bazu $f = (\underbrace{(-1, 1)}_{f_1}, \underbrace{(2, 0)}_{f_2})$.

$$Af_1 = A(-1, 1) = (1, 1) = 1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 \quad \Rightarrow \quad [Af_1]_f =$$

$$Af_2 = A(2, 0) = (-2, 0) = 0 \cdot f_1 + (-1) \cdot f_2 \quad \Rightarrow \quad [Af_2]_f =$$

Dakle, $[A]_f =$

Zadatak 2. Odredite matricu linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x, y, z) = (x - y + z, 2x + z, x - z + y)$$

s obzirom na

(a) kanonsku bazu e za $\mathbb{R}^3$

Zadatak 2. Odredite matricu linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x, y, z) = (x - y + z, 2x + z, x - z + y)$$

s obzirom na

(b) bazu $f = ((1, 2, 4), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$

Važna napomena

Za linearni operator $A : V \to V$ i dvije baze $e = (e_1, \ldots, e_n)$ i $f = (f_1, \ldots, f_n)$ prostora V vrijedi

$$[A]_f = T^{-1}[A]_e T,$$

gdje je

$$T = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [f_1]_e & [f_2]_e & \ldots & [f_n]_e \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Matricu T zovemo **matricom prijelaza iz baze** e **u bazu** f.

Svojstva matrica linearnih operatora

Za sve linearne operatora $A, B : V \to V$, vektore $v \in V$ i skalare $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi:

① $[Av]_f = [A]_f[v]_f$

② $[B \circ A]_f = [B]_f[A]_f$ (kompozicija operatora = množenje matrica)

③ A je bijekcija ako i samo ako $[A]_f$ ima inverz, i vrijedi $[A^{-1}]_f = [A]_f^{-1}$ (matrica inverznog operatora je inverzna matrica)

④ Matrica jediničnog operatora je jedinična matrica I_n (u bilo kojoj bazi)

⑤ matrica nuloperatora je nulmatrica (u bilo kojoj bazi)

⑥ $[A + B]_f = [A]_f + [B]_f$

⑦ $[\alpha A]_f = \alpha[A]_f$

Zadatak 3. Linearan operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan je svojom matricom u kanonskoj bazi

$$[A]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Izračunajte $A(1, 2, 3)$.

(b) Izračunajte $A(x, y, z)$ za proizvoljne $x, y, z, \in \mathbb{R}$.

(c) Je li operator A bijekcija? Ako jest, odredite $[A^{-1}]_e$.

(d) Izračunajte $[A \circ A]_e$.