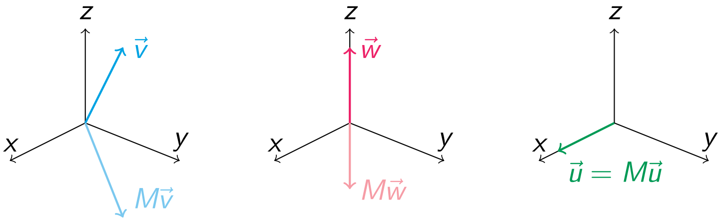
Spektar linearnog operatora

Vježbe 5 - 4.4.2025.

Motivacijski primjer

Promotrimo operator $M : V^3(O) \to V^3(O)$ koji zrcali vektore u odnosu na *xy*–ravninu.



Uočimo:

- za vektore $\vec{w}$ na *z*–osi vrijedi $M\vec{w} = -1 \cdot \vec{w}$
- za vektore $\vec{u}$ u *xy*–ravnini vrijedi $M\vec{u} = 1 \cdot \vec{u}$

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Definicija

Neka je V vektorski prostor i neka je $A : V \to V$ linearan operator. Ako neki vektor $v \in V$ različit od nulvektora zadovoljava

$$Av = \lambda v \qquad \text{za neki } \lambda \in \mathbb{R},$$

tada

- λ zovemo **svojstvenom vrijednosti** od A;
- v zovemo **svojstvenim vektorom** od A (za svojstvenu vrijednost λ).

Svojstveni polinom

Definicija

Svojstveni ili **karakteristični polinom** matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ je polinom k_A definiran sa

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Svojstveni polinom operatora A je svojstveni polinom matrice od A *u bilo kojoj bazi.*

Spektar

Teorem

Realan broj je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako je (realna) nultočka njegovog svojstvenog polinoma k_A.

Definicija

Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A zove se **spektar** od A i označava se sa $\sigma(A)$.

Kako odrediti svojstvene vektore?

Neka je λ svojstvena vrijednost linearnog operatora $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i neka je matrični prikaz od A u kanonskoj bazi

$$[A]_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Svojstveni vektor v od A za svojstvenu vrijednost λ je vektor $v = (v_1, \dots v_n)$ (različit od nulvektora!) takav da je

$$Av = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad [A]_e[v]_e = \lambda I_n [v]_e \quad \Leftrightarrow \quad ([A]_e - \lambda I_n)[v]_e = \mathbf{0}_n.$$

Dakle, imamo

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj. v je rješenje homogenog sustava linearnih jednadžbi čija matrica je $A - \lambda I_n$.

Zadatak 1. Odredite spektar i svojstvene vektore linearnog operatora $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ čija je matrica u kanonskoj bazi

$$[A]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 2. Odredite spektar i svojstvene vektore linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadanog s

$$A(x, y, z) = (3x + z, x + 2y + z, 2z).$$

Zadatak 3. Matrica linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ u bazi

$$f = ((2,1,0),(1,1,1),(0,1,1))$$

je

$$[A]_f = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dokažite da je f zaista baza prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) Odredite matrični prikaz od A u kanonskoj bazi.

(c) Odredite spektar operatora A. Odredite svojstveni vektor pridružen najmanjoj svojstvenoj vrijednosti.