Obične diferencijalne jednadžbe

Vježbe 6 - 11.4.2025.

Obične diferencijalne jednadžbe

Obične diferencijalne jednadžbe (ODJ) su jednadžbe kod kojih:

- nepoznanica je funkcija jedne varijable;
- jednadžba opisuje vezu nepoznate funkcije i njenih derivacija.

Red obične diferencijalne jednadžbe je najveći red derivacije od y u toj ODJ.

U našim primjerima će nepoznata funkcija biti

$$y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

koja ovisi o varijabli $t \in I$ ili $x \in I$.

Primjeri

1. <u>ODJ reda 1:</u>

$$y'(t) = y(t) + \sin t$$

2. <u>ODJ reda 2:</u>

$$y'' = \sin t$$

3. <u>ODJ reda 3:</u>

$$y''' + 3y = 0$$

Primjer

Provjerimo da je funkcija $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$y(t) = 3 - \frac{1}{t}$$

rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' = 2(y-3)^3.$$

Opće rješenje ODJ

ODJ često imaju beskonačno mnogo rješenja, npr. funkcija

$$y(t) = 3 - \frac{1}{t + C} \qquad (\spadesuit)$$

je rješenje ODJ $y'' = 2(y-3)^3$ za svaki izbor konstante $C \in \mathbb{R}$.

Rješenje tog oblika zove se **opće rješenje** obične diferencijalne jednadžbe.

Opće rješenje je funkcija koja ovisi o jednoj ili više konstanti i predstavlja beskonačno mnogo rješenja dane ODJ.

Partikularno rješenje

Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti za konstante u općem rješenju dobivamo **partikularna rješenja**, npr. u gornjem primjeru imamo partikularna rješenja:

- za $C = 0$
- za $C = 2$

Singularno rješenje

Neke ODJ imaju i "dodatna" rješenja, koja se ne mogu dobiti uvrštavanjem nikojih vrijednosti za konstante u općem rješenju.

Takva rješenja zovemo **singularnim** rješenjima.

Npr. funkcija

$$y(t) = 3$$

je rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = 2(y-3)^3$, a ne možemo je dobiti ni za koju vrijednost konstante C u (♠).

Metoda separacije varijabli

Metoda separacije varijabli

Metoda separacije varijabli koristi se za rješavanje ODJ koje se mogu zapisati u obliku

$$\boxed{y'(t) = f(t) \cdot g(y(t))}$$

za neke funkcije f i g.

Metoda separacije - postupak

① Zapišemo jednadžbu u ekvivalentnom obliku.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t) \cdot g(y)$$

② **Separiramo varijable**: (formalno) pomnožimo jednadžbu odgovarajućim izrazom tako da jedna strana ovisi samo o y, a druga samo o t.

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(t)\mathrm{d}t$$

Metoda separacije - postupak

③ Integriramo

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(t)\mathrm{d}t$$

i time dobivamo **opće rješenje**.

④ Oprez: nultočke nazivnika izraza kojim smo množili u koraku ② su također kandidati za rješenje!

Zadatak 1. Riješite sljedeće ODJ:

(a) $t^2y^2y' + 1 = y$

(b) $ty + (t+1)y' = 0$

(c) $\sqrt{y^2+1} = tyy'$

(d) $y' = 3y^{\frac{3}{2}}$

(e) $ty' + y = y^2$

(f) $y' - ty^2 = 2ty$

Početna zadaća

Početna zadaća je problem oblika

$$\begin{cases} \text{ODJ} \\ \text{početni uvjeti} \end{cases}$$

pri čemu su početni uvjeti oblika

$$\boxed{y(t_0) = y_0} \quad \text{ili} \quad \boxed{y^{(n)}(t_0) = y_0}$$

Rješavanje:

① Riješimo ODJ;
② Nađemo partikularno (ili singularno) rješenje koje zadovoljava početne uvjete.

Zadatak 2. Riješite početnu zadaću

$$\begin{cases} 1 + y^2 = tyy' \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

Supstitucijia $u = at + by + c$

Obične diferencijalne jednadžbe oblika

$$y' = f(at + by + c)$$

(gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a, b \neq 0$)

ne mogu se direktno riješiti separacijom varijabli.

Takve jednadžbe možemo svesti na jednadžbe sa separiranim varijablama supstitucijom

$$\boxed{u(t) := at + by(t) + c}$$

tada je $u' = a + by'$, tj. $y' = \frac{u' - a}{b}$

Time jednadžba prelazi u

$$\boxed{u' = bf(u) + a}$$

Zadatak 3. Riješite ODJ:

(a) $y' = (4t + 2y - 1)^{\frac{1}{2}}$

Zadatak 3. Riješite ODJ:

(b) $y' = (3y + 2t)^2$

Homogene diferencijalne jednadžbe

Homogene diferencijalne jednadžbe su jednadžbe koje se mogu zapisati u obliku

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

Takve jednadžbe rješavamo uvođenjem supstitucije

$$\boxed{u := \frac{y}{t}}$$

tada je $y = ut$, tj. $y' = u' t + u$

Time jednadžba prelazi u $u' t + u = f(u)$, tj.

$$\boxed{u' = \frac{1}{t}(f(u) - u)}$$

Zadatak 4. Odredite opće rješenje ODJ:

(a) $ty' + t\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{y}{t} = y$

Zadatak 4. Odredite opće rješenje ODJ:

(b) $t^2 y' + y^2 = ty$