Linearne diferencijalne jednadžbe

Vježbe 7 - 18.4.2025.

Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Definicija

Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda su jednadžbe oblika

$$y' + f(t)y = g(t) \tag{1}$$

za neke funkcije f i g.

Primjer.

Postupak rješavanja

① Nađemo opće rješenje **pripadne homogene jednadžbe**

$$y_H{}' + f(t)y_H = 0$$

metodom separacije varijabli. Ono je oblika

$$\boxed{y_H = Ch(t), \qquad C \in \mathbb{R}}$$

za neku funkciju h.

Postupak rješavanja

② Metoda **varijacije konstanti**:

Teorem

Ako je $y_H = Ch(t)$ rješenje homogene jednadžbe $y_H{}' + f(t)y_H = 0$, onda je svako rješenje ODJ $y' + f(t)y = g(t)$ oblika

$$y = C(t)h(t) \tag{2}$$

za neku funkciju $C : I \to \mathbb{R}$.

Rješenje polazne ODJ nađemo uvrštavanjem (2) u tu ODJ.

Zadatak 1. Riješite diferencijalne jednadžbe:

(a) $ty' - 2y = 2t^4$ Rj: $y = (t^2 + D)t^2, \quad D \in \mathbb{R}$

(b) $ty' = 3y + 3t^4 + t^2$ Rj: $3t^4 + Dt^3 - t^2, \quad D \in \mathbb{R}$

(c) $ty' + (1+t)y = e^{-t}$ Rj: $y = \frac{t+D}{t} e^{-t}, \quad D \in \mathbb{R}$

(d) $y' + y \operatorname{ctg} t = \sin(2t)$ Rj: $y = \frac{2}{3} \sin^2 t + \frac{D}{\sin t}, \quad D \in \mathbb{R}$

(e) $y' + y \operatorname{tg} t = \dfrac{1}{\cos t}$ Rj: $y = \sin t + D \cos t, \quad D \in \mathbb{R}$

(f) $y' + \dfrac{y}{1-t} = t^2 - t$ Rj: $y = (\frac{t^2}{2} + D)(t-1), \quad D \in \mathbb{R}$

Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda

Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda
s konstantnim koeficijentima

Definicija

Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s **konstantnim koeficijentima** su jednadžbe oblika

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

pri čemu su $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ konstante, $a_2 \neq 0$, a $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcija.

Primjer.

Postupak rješavanja jednadžbe

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t) \tag{3}$$

① Nađemo **opće rješenje** y_H pripadne homogene jednadžbe

$$a_2 y_H'' + a_1 y_H' + a_0 y_H = 0$$

② Nađemo jedno **partikularno rješenje** y_P početne jednadžbe (3)

③ Opće rješenje početne jednadžbe (3) je dano formulom

$$\boxed{y = y_H + y_P}$$

Postupak rješavanja jednadžbe

$$a_2 {y_H}'' + a_1 {y_H}' + a_0 y_H = 0 \tag{4}$$

Odredimo nultočke λ_1, λ_2 pripadne **karakteristične jednadžbe**

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- Ako su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ različite realne nultočke

$$\boxed{y_H = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

- Ako imamo jednu dvostruku realnu nultočku λ

$$\boxed{y_H = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

- Ako imamo dvije kompleksne nultočke $\lambda_{1,2} = a \pm bi$

$$\boxed{y_H = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}$$

Zadatak 2. Riješite diferencijalnu jednadžbu:

(a) $y'' + 4y' + 3y = 0$

Rj: $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

Rj: $y = (C_1 + C_2 t)e^{2t}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(c) $y'' + 9y = 0$

Rj: $y = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Partikularna rješenja jednadžbe

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(t)$$

$f(t)$	y_P
α (konstanta)	A
(polinom stupnja n)	$A_nt^n + A_{n-1}t^{n-1} + \ldots + A_1t + A_0$
αe^{rt}	Ae^{rt}
$\alpha\cos(kt)$	$A\cos(kt) + B\sin(kt)$
$\alpha\sin(kt)$	$A\cos(kt) + B\sin(kt)$
(polinom stupnja n)$\cdot$ $e^{rt}\cos(kt)$	$(A_nt^n + \ldots + A_1t + A_0)e^{rt}\cos(kt) +$ $(B_nt^n + \ldots + B_1t + B_0)e^{rt}\sin(kt)$
(polinom stupnja n)$\cdot$ $e^{rt}\sin(kt)$	$(A_nt^n + \ldots + A_1t + A_0)e^{rt}\cos(kt) +$ $(B_nt^n + \ldots + B_1t + B_0)e^{rt}\sin(kt)$

- Koeficijente A_i, B_i odredimo uvrštavanjem u početnu jednadžbu.
- Ako ne postoji rješenje preporučenog oblika, pokušamo s $ty_P, t^2y_P, t^3y_P, \ldots$ sve dok ne dobijemo rješenje

Zadatak 3. Riješite diferencijalnu jednadžbu:

(a) $y'' + 4y' + 3y = 5e^{2t}$

Rj: $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{3} e^{2t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(b) $y'' + 9y = 2t^2 + 4t + 7$

Rj: $y = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) + \frac{2}{9} t^2 + \frac{4}{9} t + \frac{59}{81}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(c) $y'' - 2y' + y = e^t(t-1)$

Rj: $y = x^t(\frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{2} t^2 + C_2 t + C_1)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(d) $y'' + 4y' + 3y = 5e^{-3t}$

Rj: $y = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t} - \frac{5}{2} te^{-3t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Zadatak 4. Riješite početnu zadaću:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 5\sin(2t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Rj: $y = e^{-t} - \frac{5}{13}e^{-3t} - \frac{1}{13}\sin(2t) - \frac{8}{13}\cos(2t)$

Metoda superpozicije

Diferencijalne jednadžbe oblika

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t) + g(t) \tag{5}$$

rješavamo **metodom superpozicije**:

① Odredimo opće rješenje y_H pripadne homogene jednadžbe

$$a_2 y_H'' + a_1 y_H' + a_0 y_H = 0$$

② Odredimo partikularna rješenja y_{P_1} i y_{P_2} jednadžbi

$$a_2 y_{P_1}'' + a_1 y_{P_1}' + a_0 y_{P_1} = f(t) \quad \text{i} \quad a_2 y_{P_2}'' + a_1 y_{P_2}' + a_0 y_{P_2} = g(t)$$

$\longrightarrow$ opće rješenje jednadžbe (5) je

$$\boxed{y = y_H + y_{P_1} + y_{P_2}}$$

Na isti način se rješavaju jednadžbe $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$

Zadatak 5. Riješite diferencijalnu jednadžbu

(a) $y'' + 3y' = z + \cos t$

Rj: $y = C_1 + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{6} t^2 + \frac{1}{9} t + \frac{3}{10} \sin t + \frac{1}{10} \cos t$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(b) $y'' + 2y' + y = e^{3t} + 3$

Rj: $C_1 e^{-t} + C_2 e t^{-t} + \frac{1}{16} e^{3t} + 3$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Metoda varijacije konstanti

za jednadžbu $y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t)$

Neka je

$$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

opće rješenje pripadne homogene jednadžbe

$$y_H'' + a_1 y_H' + a_0 y_H = 0.$$

Neka su funkcije $C_1(t)$ i $C_2(t)$ rješenja sustava

$$\begin{cases} C_1'(t) y_1 + C_2'(t) y_2 = 0 \\ C_1'(t) y_1' + C_2'(t) y_2' = f(t) \end{cases}$$

Tada je formulom

$$\boxed{y = C_1(t) y_1 + C_2(t) y_2}$$

dano opće rješenje jednadžbe

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t).$$

Zadatak 6. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + y = \frac{1}{\cos t}$$

Rj: $y = \ln|\cos t| \cos t + t \sin t + D_1 \sin t + D_2 \cos t,\; D_1, D_2 \in \mathbb{R}$