Funkcije više varijabli

Vježbe 8 - 9.5.2025.

Skalarne funkcije više varijabli

Skalarne funkcije više varijabli

Definicija

Skalarne (ili **realne**) **funkcije više varijabli** su funkcije

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

pri čemu je $n \in \mathbb{N}$.

Primjer.

Prirodna domena

Ako je funkcija f zadana samo formulom oblika

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (\heartsuit),$$

podrazumijevamo da je njena domena skup

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ za koje izraz } (\heartsuit) \text{ ima smisla}\}}$$

Skup $\mathcal{D}_f$ je tzv. **prirodna domena** funkcije f.

Primjer. Za $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ prirodna domena je

Zadatak 1. Skicirajte prirodnu domenu funkcije

(a) $f(x, y) = \left(\sqrt{x - 3y}, \dfrac{6x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\right)$ Rj: $-3 \leq x \leq 3, y \leq \frac{1}{3}x$

(b) $f(x, y) = 3\ln\left(1 - 2x + x^2 - y\right)$ Rj: $y < (x-1)^2$

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y}$ Rj: $(x-4)^2 + (y-3)^2 \geq 5$

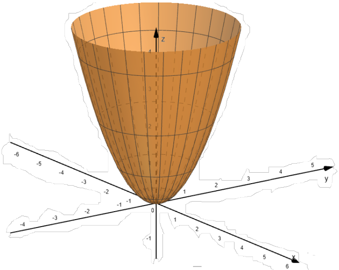
Graf funkcije

Definicija

Graf funkcije $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je skup

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Primjer. Graf funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ je



Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije prvog reda

Definicija

Neka je $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i neka je $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. ***i*-ta parcijalna derivacija (prvog reda)** funkcije f je funkcija

$$\partial_{x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \to \mathbb{R}$$

koja se dobije deriviranjem funkcije f po varijabli x_i (ako ta derivacija postoji).

Intuitivno, za točku $X \in \Omega$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$ je brzina kojom vrijednosti funkcije f raste kad u smjeru i-te koordinatne osi prolazimo točkom X.

Primjer. Za $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$ imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \partial_x (x^2 + y^2 - 3xy) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \partial_y (x^2 + y^2 - 3xy) =$$

Zadatak 2. Odredite sve parcijalne derivacije prvog reda funkcije

(a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

Rj: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2y}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{(x-y)^2}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Rj: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(c) $f(x,y,z) = \ln\left(x + \dfrac{y}{z}\right)$

Rj: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{z}{xz+y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{1}{xz+y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{-y}{z(xz+y)}$

(d) $f(x,y,z) = \operatorname{arcctg}(x^2) + \dfrac{1}{y}$.

Rj: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{-2x}{1+x^4}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$

Zadatak 3.

(a) Dokažite da funkcija $f(x, y) = (x + y)^2$ zadovoljava

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

(b) Dokažite da funkcija $f(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)$ zadovoljava

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Lančano pravilo

Definicija

Ako funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima sve parcijalne derivacije prvog reda i one su neprekidne, kažemo da je f **klase** C^1.

Lančano pravilo

Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 i neka su $x_1, \ldots, x_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilne funkcije. Pretpostavimo da za svaki $t \in I$ vrijedi $(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \Omega$. Tada je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t}.$$

Zadatak 4.

(a) Izračunajte $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ ako je $u(x, y, z) = xyz$ i

$$x(t) = t^2 + 1, \quad y(t) = \ln t, \quad z(t) = \operatorname{tg} t.$$

Rj: $\frac{\partial u}{\partial t} = 2t \ln t \operatorname{tg} t + \frac{t^2+1}{t} \operatorname{tg} t + \frac{t^2+1}{\cos^2 t} \ln t$

(b) Izračunajte $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ ako je $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ i

$$x(u, v) = u^2 - v^2, \qquad y(u, v) = 2uv.$$

Rj: $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{-2v}{(u^2+v^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{2u}{u^2+v^2}$

Parcijalne derivacije drugog reda

Definicija

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ su funkcije

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

Ako je $i = j$, umjesto $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ pišemo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Koriste se još i oznake $\partial_{x_i}\partial_{x_j} f$ i $\partial_{x_i}^2 f$.

Primjer. Za $f(x, y) = x^2 y$ imamo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$, pa je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) =$$

Schwarzov teorem

Definicija

Kažemo da je funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **klase** C^2 ako ima sve parcijalne derivacije prvog i drugog reda i one su neprekidne.

Schwarzov teorem

Ako je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^2, onda je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

za svaki izbor $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

"Svejedno je deriviramo li prvo po x_i pa onda po x_j ili obratno"

Hesseova matrica

Definicija

Neka je $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^2. **Hesseova matrica** od f u točki $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ je $n \times n$ matrica čiji elementi su parcijalne derivacije drugog reda of f u točki x, tj.

$$(Hf)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

Schwarzov teorem: Hesseova matrica je simetrična!

Primjer. Za $f(x,y) = x^2 y$ imamo

$$(Hf)(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$=$$

Zadatak 5. Odredite sve parcijalne derivacije drugog reda i zapišite Hesseovu matricu funkcije

(a) $f(x, y) = \ln\left(x + y^2\right)$

Rj: $(Hf)(x, y) = -\frac{1}{(x+y^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2y & 2(y^2 - x) \end{pmatrix}$

(b) $f(x, y, z) = xyz.$

Rj: $(Hf)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$

Gradijent

Vektorska polja

Definicija

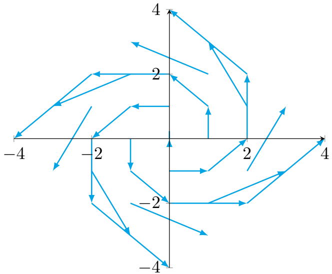
Funkcija $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, gdje je $m > 1$ zove se **vektorska funkcija**.

Ako je $n = m$, tj. ako je broj koordinata u domeni i kodomeni jednak, kažemo da je F **vektorsko polje**.

Za (točku) $X \in \Omega$, $F(X)$ je zgodno interpretirati kao geometrijski vektor nanesen iz točke X.

Primjer. Za $F(x,y) = \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ imamo

$F(X) =$ vektor X rotiran za 90° i skaliran tako da mu duljina bude 1.



Gradijent

Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1.

Definicija

Gradijent od f u točki $X = (x_1, \dots, x_n)$ je vektor $\nabla f(X)$ prvih parcijalnih derivacija od f izračunatih u X, tj.

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right).$$

Funkcija koja svakoj točki X pridružuje vektor $\nabla f(X)$ je primjer vektorskog polja!

Primjer. Za $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ imamo

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x, 2y).$$