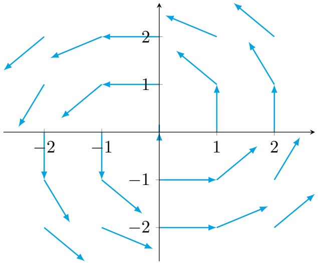
Gradijent, krivulje i plohe

Vježbe 9 - 22.5.2025.

Ponavljanje: vektorska polja

Funkcija $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gdje je $n > 1$ zove se **vektorsko polje**.



Ponavljanje: gradijent

Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1. **Gradijent** od f u točki $X = (x_1, \ldots, x_n)$ je vektor $\nabla f(X)$ prvih parcijalnih derivacija od f izračunatih u X, tj.

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right).$$

Funkcija koja svakoj točki X pridružuje vektor $\nabla f(X)$ je primjer vektorskog polja.

Stacionarne točke

Definicija

$X \in \Omega$ je stacionarna točka funkcije $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ako je

$$\nabla f(X) = \mathbf{0},$$

tj. ako je

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) = 0.$$

Primjer. Odredimo stacionarne točke funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Nivo-skupovi

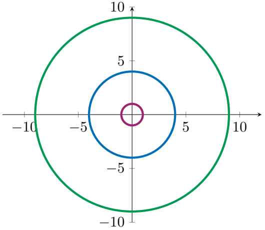
Definicija

Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 i neka je $c \in \mathbb{R}$. Skup

$$S := \{X \in \Omega : f(X) = c\}$$

zove se **nivo-skup** funkcije f na visini c. Kraće pišemo

$$S \ldots\ f(X) = c.$$



$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$S_1 \ldots\ x^2 + y^2 = 1$

$S_2 \ldots\ x^2 + y^2 = 4$

$S_3 \ldots\ x^2 + y^2 = 9$

Krivulje u $\mathbb{R}^2$

Definicija

Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1. Nivo skup

$$S \ldots \ f(x, y) = c$$

te funkcije je **(nivo)-krivulja** ako ne sadrži nijednu stacionarnu točku od f, tj. ako vrijedi $\nabla f(x, y) \neq 0$ za sve $(x, y) \in S$.

Primjer. Za $f(x, y) = x^2 + y^2$, skup

$$S \ldots \ x^2 + y^2 = c$$

je krivulja za svaki $c \neq 0$, a skup

$$S \ldots \ x^2 + y^2 = 0$$

nije krivulja.

Plohe u $\mathbb{R}^3$

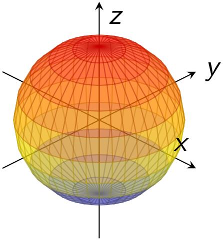
Definicija

Neka je $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1. Nivo skup

$$S \ldots \; f(x, y, z) = c$$

te funkcije je **(nivo)-ploha** ako ne sadrži nijednu stacionarnu točku od f, tj. ako vrijedi $\nabla f(x, y, z) \neq 0$ za sve $(x, y, z) \in S$.

Primjer. Nivo-plohe funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ su sfere sa središtem u ishodištu.



Zadatak 1. Zadana je funkcija $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Jesu li sljedeći skupovi plohe zadane funkcijom f?

(a) $S_0 \ldots \; x^2 + y^2 + z^2 = 0$ Rj: Ne

(b) $S_1 \ldots \; x^2 + y^2 + z^2 = 1$ Rj: Da (kugla sa središtem u ishodištu radijusa 1)

Zadatak 2. Skicirajte zadani podskup od $\mathbb{R}^3$ i dokažite da je on ploha:

(a) $\mathcal{P} \ldots \; z = x^2 + y^2$ Rj: Rotacijski paraboloid

(b) $\mathcal{C} \ldots \; x^2 + y^2 = 1$ Rj: Cilindar

Tangencijalna ravnina

Definicija

Tangencijalna ravnina na plohu $S \ldots\ f(x,y,z) = c$ u točki $P = (x_P, y_P, z_P)$ je ravnina π_P kroz točku P čija normala je $\nabla f(P)$.

Podsjetnik: jednadžba ravnine π kroz $T = (x_0, y_0, z_0)$ s normalom $\vec{n} = [a, b, c]$ je

$$\pi \ldots\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Dakle, jednadžba tangencijalne ravnine π_P je

$$\boxed{\pi_P \ldots\ \frac{\partial f}{\partial x}(P) \cdot (x - x_P) + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \cdot (y - y_P) + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \cdot (z - z_P) = 0.}$$

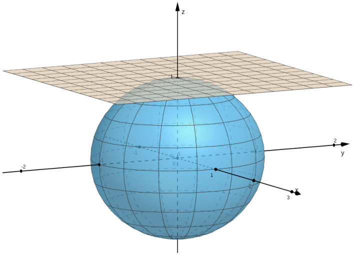
Primjer. Jednadžba tangencijalne ravnine π_P na plohu

$$S \ldots\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

u proizvoljnoj točki $P = (x_P, y_P, z_P)$ je

$$\pi_P \ldots\ 2x_P(x - x_P) + 2y_p(y - y_P) + 2z_P(z - z_P) = 0.$$

Konkretno, za $P = (0, 0, 1)$ je $\pi_P \ldots\ 2(z - 1) = 0 \iff z = 1.$



Zadatak 3. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu

(a) $S \dots\ z = x^2 + y^2$ u točki $P = (1, -2, 5)$ Rj: $\pi_P \dots\ -2x + 4y + z = -5$

(b) $S \dots\ x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ u točki $P = (R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$ gdje je $R \in \langle 0, \infty\rangle$ i $\alpha \in [0, 2\pi]$ Rj: $\pi_P \dots\ \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y = R$

Zadatak 4. Odredite u kojim točkama su tangencijalne ravnine plohe $S \ldots\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ paralelne s ravninom $M \ldots\ x + 4y + 6z = 0$.