Ekstremi funkcija više varijabli

Vježbe 10 - 23.5.2025.

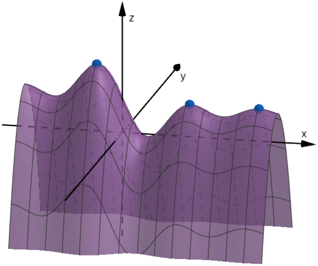
Lokalni i globalni ekstremi

Lokalni maksimum

Definicija

Točka **lokalnog maksimuma** funkcije $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je točka $A \in \Omega$ takva da postoji krug K sa središtem u A takav da je

$$f(A) \geq f(X) \qquad \forall X \in K \cap \Omega.$$



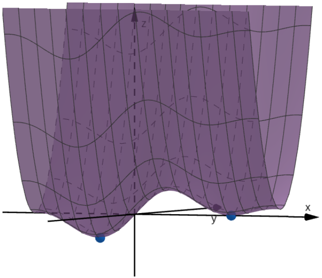
Analogno definiramo lokalni maksimum za funkcije $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, samo riječ "krug" zamijenimo sa "n-dimenzionalna kugla".

Lokalni minimum

Definicija

Točka **lokalnog minimuma** funkcije $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je točka $A \in \Omega$ takva da postoji krug K sa središtem u A takav da je

$$f(A) \leq f(X) \qquad \forall X \in K \cap \Omega.$$



Analogno definiramo lokalni minimum za funkcije $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, samo riječ "krug" zamijenimo sa "n-dimenzionalna kugla".

Globalni maksimum i minimum

Definicija

Točka **globalnog maksimuma** funkcije $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je točka $A \in \Omega$ takva je

$$f(A) \geq f(X) \qquad \forall X \in \Omega.$$

Točka **globalnog minimuma** funkcije $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je točka $A \in \Omega$ takva je

$$f(A) \leq f(X) \qquad \forall X \in \Omega.$$

Ispitivanje lokalnih ekstrema

za funkcije dviju varijabli

Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^2. Lokalne ekstreme od f tražimo na sljedeći način:

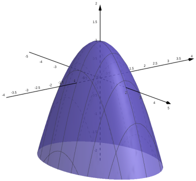
① Odredimo **stacionarne točke** od f, tj. točke X takve da je $\nabla f(X) = 0$. One su jedini kandidati za lokalne ekstreme.

② Za svaku stacionarnu točku izračunamo **pripadnu Hesseovu matricu** u toj točki

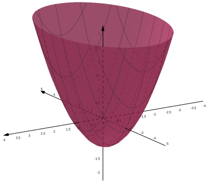
$$Hf(X) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

③ Vrijedi:

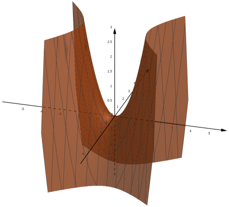
<table>
<tr><td rowspan="2">$\det Hf(X) > 0$</td><td>$a_{11} > 0$</td><td>X je lokalni minimum</td></tr>
<tr><td>$a_{11} < 0$</td><td>X je lokalni maksimum</td></tr>
<tr><td>$\det Hf(X) < 0$</td><td colspan="2">X nije točka lokalnog ekstrema
(tzv. sedlasta točka)</td></tr>
<tr><td>$\det Hf(X) = 0$</td><td colspan="2">ne možemo ništa zaključiti
(sve je moguće)</td></tr>
</table>



Lokalni maksimum



Lokalni minimum



Sedlasta točka

Zadatak 1. Ispitajte lokalne ekstreme funkcije

(a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

Rj: $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ je lokalni minimum

(b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Rj: $(0, 0)$ je sedlasta točka;
$(1, 1)$ je lokalni minimum

Ispitivanje lokalnih ekstrema

za funkcije tri i više varijabli

Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^2. Lokalne ekstreme od f tražimo na sljedeći način:

① Odredimo **stacionarne točke** od f, one su jedini kandidati za lokalne ekstreme.

② Za svaku stacionarnu točku izračunamo **Hesseovu matricu**

$$Hf(X) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i brojeve (tzv. **minore**):

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

③ Vrijedi:

$A_1 > 0$, $A_2 > 0$, ..., $A_n > 0$ (sve pozitivne)	X je lokalni minimum
$A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0, \ldots$ (predznaci alterniraju)	X je lokalni maksimum
n paran i $\det Hf(X) < 0$	X nije točka lokalnog ekstrema (sedlasta točka)
u svim ostalim slučajevima ovaj test ne daje odluku	

Zadatak 2. Odredite barem jednu točku lokalnog minimuma funkcije

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Uvjetni ekstremi

Uvjetni ekstremi

Neka su zadane funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i niz funkcija $g_1, \dots, g_m : \Omega \to \mathbb{R}$ klase C^1 takve da je za svaki $X \in S$ skup

$$\{\nabla g_1(X), \dots, \nabla g_m(X)\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

linearno nezavisan.

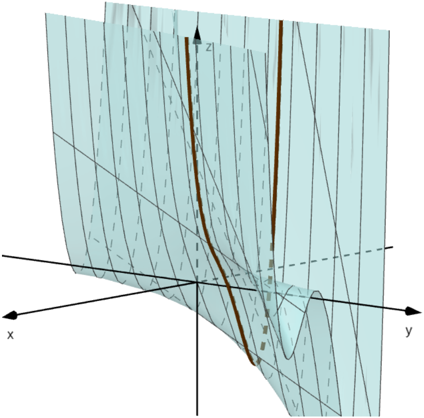
Problem

Želimo minimizirati/maksimizirati vrijednost funkcije f na skupu

$$S \dots \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Preciznije, želimo odrediti točke skupa S u kojima je vrijednost funkcije f najmanja/najveća. Takve točke nazivamo **točkama uvjetnih ekstrema**.

Primjer 1. Tražimo minimalnu vrijednost funkcije
$f(x, y) = x^4 - x(xy + 2)$ na skupu $S \dots \ y = 0$.



Primjer 2. Odredimo točku pravca

$$p \ldots \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

koja je najbliža točki $(0, 0, 0)$.

Drugim riječima: treba minimizirati vrijednost funkcije

$$(x, y, z) \mapsto d((x, y, z), (0, 0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ili, ekvivalentno, funkcije

$$(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$

na skupu

$$S \ldots \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

Ovakve probleme rješavamo **metodom Lagrangeovih multiplikatora**.

Metoda Lagrangeovih multiplikatora

Definiramo **Lagrangeovu funkciju**

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) := f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) - \dots - \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n).$$

Teorem

Jedini kandidati za točke uvjetnih ekstrema su točke oblika $(x_1, \dots, x_n)$ za koje je

$$(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

stacionarna točka funkcije F.

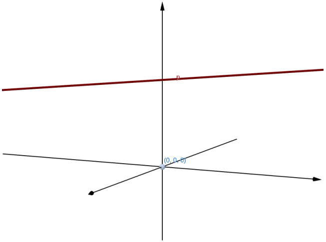
Koje od tih točaka su zaista uvjetni ekstremi (i kojeg tipa) određujemo iz oblika funkcije f i prirode problema.

Primjer 2 (nastavak). Pripadna Lagrangeova funkcija je

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(x + y - 1) - \lambda_2(z - 2).$$

Jedina stacionarna točka od F je $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 1, 4)$.

Budući da na pravcu p sigurno postoji točka najbliža ishodištu, tj. funkcija f sigurno postiže minimum u nekoj točki pravca p, $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ mora biti tražena točka.



Zadatak 3. Odredite točku ravnine

$$\pi \ldots \ x - 3y + z = 15$$

koja je najbliža točki $T = (1, 2, -1)$.

Rj: $\left(\frac{30}{11}, -\frac{35}{11}, -\frac{30}{11} \right)$

Zadatak 4. Odredite duljine stranica pravokutnika površine $5\mathrm{cm}^2$ tako da mu opseg bude minimalan.

Rj: Obje stranice duljine $\sqrt{5}$cm.