Nizovi i redovi realnih brojeva

Vježbe 14 - 13.6.2025.

Nizovi realnih brojeva

Nizovi realnih brojeva

Definicija

(Realan) niz je funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Uobičajeno je pisati

$$a_n := a(n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

a_n zvati **n-tim članom niza** i niz a označavati sa (a_n).

Primjer.

1. **Konstantan niz**, npr. $a_n := 2$

$$\begin{array}{ccccc} 2, & 2, & 2, & 2, & \ldots \\ \| & \| & \| & \| & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \end{array}$$

2. $a_n := (-1)^n$

$$\begin{array}{ccccc} -1, & 1, & -1, & 1, & \ldots \\ \| & \| & \| & \| & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \end{array}$$

3. **Aritmetički niz**: za zadane $s, d \in \mathbb{R}$

$$\boxed{a_n := s + (n-1)d}$$

Vrijedi:

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = d \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.}$$

Npr. $s = -1$, $d = 4$:

$$\begin{array}{cccccc} -1, & 3, & 7, & 11, & 15, & \ldots \\ \| & \| & \| & \| & \| & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \ldots \end{array}$$

4. **Geometrijski niz**: za zadane $s, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$

$$\boxed{a_n := s \cdot q^{n-1}}$$

Vrijedi:

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.}$$

Npr. $s = 1$, $q = \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{8}, & \frac{1}{16}, & \ldots \\ \| & \| & \| & \| & \| & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \ldots \end{array}$$

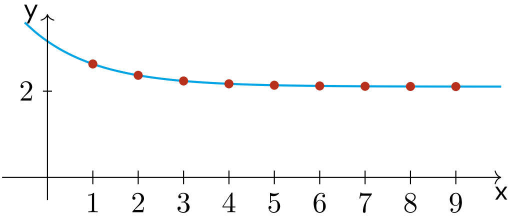
Suma prvih n članova geometrijskog niza,

$S_n := a_1 + a_2 + \ldots a_n$, jednaka je

$$\boxed{S_n = s\frac{1-q^n}{1-q}}$$

Limes niza

Graf niza: npr. $a_n := 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$



$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = 2.$$

Limese nizova računamo istim tehikama kao i limese $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Računanje limesa niza

Neke korisne formule

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \text{ za sve } a \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ za sve } a > 0}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \text{ za sve } a \in \mathbb{R}}$$

Podsjetnik: za $n \in \mathbb{N}$, $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Zadatak 1. Izračunajte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+4n-2}{5n^2-2n+1}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n+3^n}{5^n+2^n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2n}\cdot 3^{n+2}}{n!}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right).$

Rj: (a) $\frac{3}{5}$ (b) 0 (c) 0 (d) 0 (e) 0 (f) 2 (g) $\frac{3}{4}$ (h) $\frac{1}{2}$.

Redovi realnih brojeva

Redovi

Definicija

Red je uređeni par $((a_n), (S_n))$ niza (a_n) i pripadnog niza **parcijalnih suma**

$$S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Red definiran nizom (a_n) se u praksi označava na razne načine:

$$\sum a_n, \quad \sum_n a_n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Suma reda

Definicija

Suma reda $\sum a_n$ je broj

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

(ako taj limes postoji).

Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$, kažemo da red **konvergira**, a inače kažemo da red **divergira**.

Primjer. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Po definiciji sume reda imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}_{\substack{\text{suma prvih } n \text{ članova geometrijskog} \\ \text{niza sa } s = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} s \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1,$$

dakle, red $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergira i suma mu je 1.

Na sličan način se dokazuje da za $s, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **geometrijski red**

$$\sum_{n=0/1}^{\infty} sq^n$$

konvergira ako i samo ako je $\boxed{|q| < 1.}$

U tom slučaju je

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} sq^n = \frac{s}{1-q}} \quad \text{i} \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} sq^n = \frac{sq}{1-q}.}$$

Primjer. Red $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ divergira: po definiciji sume reda imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \lim_{n \to \infty} (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ pribrojnika}}) = \lim_{n \to \infty} n = +\infty.$$

Svojstva redova

① Ako je $a_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tada je

ili $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in [0, \infty\rangle}$ ili $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.}$

② Za sve $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijedi

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.}$$

③ Vrijedi

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n}$$

(kad god su sume $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definirane i nije jedna $+\infty$, a druga $-\infty$).

Kriteriji konvergencije i divergencije reda

Nužan uvjet konvergencije reda

Teorem

Ako red $\sum_n a_n$ konvergira, tada je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ekvivalentno (i korisnije pri ispitivanju konvergencije redova):

Ako $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tada red $\sum_n a_n$ divergira.

Obrat ne vrijedi: npr.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \text{ali} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ zove se **harmonijski red**.

Zadatak 2. Ispitajte konvergenciju reda:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ Rj: Divergira

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$ Rj: Divergira

Usporedni kriterij

Teorem

Ako vrijedi $0 \leq a_n \leq b_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.
- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

"Manji divergira $\implies$ veći divergira"

"Veći konvergira $\implies$ manji konvergira"

Redovi čiju konvergenciju ispitujemo najčešće se uspoređuju s

- (pozitivnim) **geometrijskim redom** $(s, q > 0)$

$$\sum_{n=0/1} sq^n \qquad \begin{cases} \text{konvergira,} & \text{ako je } 0 < q < 1, \\ \text{divergira,} & \text{ako je } q \geq 1 \end{cases}$$

- redom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \begin{cases} \text{konvergira,} & \text{ako je } p > 1, \\ \text{divergira,} & \text{ako je } 0 < p \leq 1. \end{cases}$$

Zadatak 3. Ispitajte konvergenciju reda:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$ Rj: Konvergira

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n|\sin n|}$$ Rj: Divergira

D'Alembertov kriterij

Teorem

Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: q,$$

tada:

$q > 1$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira
$q < 1$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira
$q = 1$	kriterij ne daje odgovor

Zadata 4. Ispitajte konvergenciju reda:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$ Rj: Konvergira

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{2n-1}$$ Rj: Divergira

Cauchyjev kriterij

Teorem

Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: q,$$

tada:

$q > 1$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira
$q < 1$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira
$q = 1$	kriterij ne daje odgovor

Zadatak 5. Ispitajte konvergenciju reda:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$ Rj: Konvergira

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ Rj: Konvergira

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ Rj: Konvergira