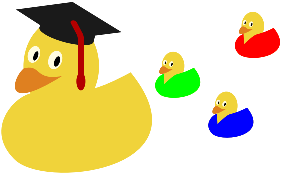
20. predavanje: Višestruki i krivuljni integrali — primjene

Franka Miriam Brückler



Primjene višestrukih integrala ...

...uključuju računanje površina i volumena, prosječnih vrijednosti skalarnih funkcija više varijabli i primjene u vjerojatnosti.

$$P(\Omega) = \iint_{\Omega} \mathrm{d}P$$

Zadatak

Izračunajte površinu koja se nalazi izvan $r = 2$ i unutar $r = 3 + 2\sin\varphi$.

Primjene višestrukih integrala ...

...uključuju računanje površina i volumena, prosječnih vrijednosti skalarnih funkcija više varijabli i primjene u vjerojatnosti.

$$P(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}P$$

Zadatak

Izračunajte površinu koja se nalazi izvan $r = 2$ i unutar $r = 3 + 2\sin\varphi$.

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V; \quad V(\Omega) = \iint\limits_{A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Zadatak

Izračunajte volumen tetraedra omeđenog ravninama $4x + 2y + z = 10$, $y = 3x$, $z = 0$ i $x = 0$.

$$\overline{f} = \frac{1}{P(\Omega)} \iint f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y; \quad \overline{f} = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ z$$

Zadatak

Na linku $\boxed{\textit{Colorado: temperature}}$ *prikazane su temperature u državi Colorado* 24.3.2008. *u* 12 : 58 *sati. Izračunajte prosječnu temperaturu u Coloradu tog trena!*

$$\overline{f} = \frac{1}{P(\Omega)} \iint f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y; \quad \overline{f} = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ z$$

Zadatak

Na linku $\boxed{\textit{Colorado: temperature}}$ *prikazane su temperature u državi Colorado 24.3.2008. u 12 : 58 sati. Izračunajte prosječnu temperaturu u Coloradu tog trena!*

Skalarni produkt dviju realnih ili kompleksnih funkcija:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_S \psi_1^* \psi_2\,\mathrm{d}S.$$

Zadatak

Izračunajte normu funkcije $z = x^2 + y^2$ *s domenom* $[0,1] \times [0,1]$.

Ako je f funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje nekog objekta na poziciji (x, y, z) u prostoru, vjerojatnost da se on nalazi unutar dijela prostora Ω je

$$p = \iiint\limits_{\Omega} f \, \mathrm{d}V.$$

Funkcija gustoće mora biti normirana:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f \, \mathrm{d}V = 1.$$

Prosječna (očekivana) vrijednost veličine opisane operatorom $\hat{\Omega}$ za $f = |\psi|^2$ je

$$\langle \Omega \rangle = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \psi^* \hat{\Omega} \psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Zadatak

Pokažite da su vodikove 1s i 2s orbitale ortogonalne:

$$\psi_{1s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

$$\psi_{2s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right).$$

Zadatak

Pokažite da su vodikove 1s i 2s orbitale ortogonalne:

$$\psi_{1s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

$$\psi_{2s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right).$$

Zadatak

Odredite prosječnu (očekivanu) udaljenost ($\hat{\Omega} = \hat{r} = r\cdot$) *elektrona 1s-orbitale do jezgre atoma vodika.*

Zadatak

Pokažite da su vodikove 1s i 2s orbitale ortogonalne:

$$\psi_{1s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

$$\psi_{2s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right).$$

Zadatak

Odredite prosječnu (očekivanu) udaljenost ($\hat{\Omega} = \hat{r} = r\cdot$) *elektrona 1s-orbitale do jezgre atoma vodika.*

Zadatak

Ako je elektron opisan valnom funkcijom ψ, *koja je vjerojatnost da se on nađe izvan stošca s vrhom u ishodištu, kojemu je os pozitivni dio z-osi i kut pri vrhu* 45°, *a unutar kugle polumjera* R*?*

Primjene krivuljnih integrala 1. vrste ...

... uključuju računanje duljina krivulja, mase žice iz gustoće, ...

$$l(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}s$$

Zadatak

Izračunajte duljinu grafa funkcije $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^{3/2}$.

Primjene krivuljnih integrala 1. vrste ...

... uključuju računanje duljina krivulja, mase žice iz gustoće, ...

$$l(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}s$$

Zadatak

Izračunajte duljinu grafa funkcije $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^{3/2}$.

$$m = \int_\gamma \rho \, \mathrm{d}s$$

Zadatak

Izračunajte masu federa oblika helikoida $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ *(za* $0 \le t \le 10\pi$*) ako je gustoća federa na poziciji* (x, y, z) *jednaka* $x + y + z \, \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$.

Primjene krivuljnih integrala 2. vrste ...

... uključuju računanje rada, promjena vrijednosti svojstava termodinamičkog sustava, ...

$$w = \int_\gamma F_x \, \mathrm{d}x + F_y \, \mathrm{d}y + \dots$$

Zadatak

Koji rad izvrši sila $F(x, y) = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}(-y, x)$ *duž gornje jedinične polukružnice od* $(-1, 0)$ *do* $(1, 0)$*?*

Zadatak

Izračunajte rad izvršen poljem sile $F(x, y, z) = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}(x^2 + y, x + y, 0)$ *od ishodišta do točke* $(1, 1, 1)$.