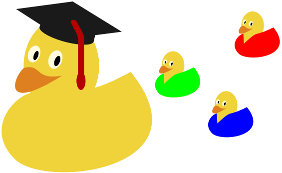
21. predavanje: Diferencijali i primjene

Franka Miriam Brückler



Pojam diferencijala

$$\int_{\gamma} xy \, \mathrm{d}x + x^2 y^2 \, \mathrm{d}y$$

Pojam diferencijala

$$\int_\gamma xy\,\mathrm{d}x + x^2y^2\,\mathrm{d}y$$

Diferencijal (s varijablama $x_1, x_2, \ldots$) je izraz oblika

$$\omega = F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\,\mathrm{d}x_n$$

u kojem su $F_1, \ldots, F_n$ skalarne funkcije varijabli $x_1, \ldots, x_n$.

Pojam diferencijala

$$\int_\gamma xy\,\mathrm{d}x + x^2y^2\,\mathrm{d}y$$

Diferencijal (s varijablama x_1, x_2, ...) je izraz oblika

$$\omega = F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\,\mathrm{d}x_n$$

u kojem su F_1, ..., F_n skalarne funkcije varijabli x_1, ..., x_n.

Primjer

$$\mathbf{F}(x,y) = (x+y, x^2-y^2) \longleftrightarrow \omega_{\mathbf{F}} = (x+y)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$$

Pojam diferencijala

$$\int_\gamma xy\,\mathrm{d}x + x^2y^2\,\mathrm{d}y$$

Diferencijal (s varijablama $x_1, x_2, \ldots$) je izraz oblika

$$\omega = F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\,\mathrm{d}x_n$$

u kojem su $F_1, \ldots, F_n$ skalarne funkcije varijabli $x_1, \ldots, x_n$.

Primjer

$\mathbf{F}(x,y) = (x+y, x^2-y^2) \longleftrightarrow \omega_\mathbf{F} = (x+y)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$

$$\omega_\mathbf{F} = \sum F_i\,\mathrm{d}x_i \longleftrightarrow \mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$$

No, što je to $\mathrm{d}x_i$? To nije isto što i Δx_i!

$\mathrm{d}x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathrm{d}x_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ (linearan funkcional)

Primjer

U kontekstu dviju varijabli x i y je

$$\mathrm{d}x(1,2) = 1,$$

$$\mathrm{d}x(\Delta x, \Delta y) = \Delta y.$$

$dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ dx_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ (linearan funkcional)

Primjer

U kontekstu dviju varijabli x i y je

$$dx(1, 2) = 1,$$

$$dx(\Delta x, \Delta y) = \Delta y.$$

Primjer

$\omega = (x + y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy \Rightarrow$
$\omega(1, 2) = (1 + 2)\,dx + (1^2 - 2^2)\,dy = 3\,dx - 3\,dy \Rightarrow$

$\mathrm{d}x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathrm{d}x_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ (linearan funkcional)

Primjer

U kontekstu dviju varijabli x i y je

$$\mathrm{d}x(1,2) = 1,$$

$$\mathrm{d}x(\Delta x, \Delta y) = \Delta y.$$

Primjer

$\omega = (x+y)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y \Rightarrow$
$\omega(1,2) = (1+2)\,\mathrm{d}x + (1^2 - 2^2)\,\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x - 3\,\mathrm{d}y \Rightarrow$
$\omega(1,2)(3,4) = 3\,\mathrm{d}x(3,4) - 3\,\mathrm{d}y(3,4) = 3\cdot 3 - 3\cdot 4 = -3.$

$$\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \underbrace{F_i}_{\text{skalarna funkcija}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \underbrace{F_i}_{\text{skalarna funkcija}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} = \text{lin. funkcional}$$

$$\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \underbrace{F_i}_{\text{skalarna funkcija}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} = \text{lin. funkcional}$$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0)(X) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{x_i}_{\text{broj}} = \text{broj}$$

$$\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \underbrace{F_i}_{\text{skalarna funkcija}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} = \text{lin. funkcional}$$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0)(X) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{x_i}_{\text{broj}} = \text{broj}$$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0)(\Delta X) = \sum_i F_i(X_0) \Delta x_i$$

$$\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \underbrace{F_i}_{\text{skalarna funkcija}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} = \text{lin. funkcional}$$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0)(X) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{x_i}_{\text{broj}} = \text{broj}$$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0)(\Delta X) = \sum_i F_i(X_0)\Delta x_i$$

Dakle, krivuljni integrali 2. vrste se podjednako odnose na vektorska polja i na diferencijale!

Ako je $\mathbf{F}$ konzervativno, kažemo da je $\omega_{\mathbf{F}}$ egzaktan diferencijal:

$$\mathbf{F} = \nabla f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

$$\omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$$

Kažemo da je $\omega_{\mathbf{F}}$ diferencijal skalarne funkcije f i pišemo $\mathrm{d}f$ umjesto $\omega_{\mathbf{F}}$.

Ako je $\mathbf{F}$ konzervativno, kažemo da je $\omega_{\mathbf{F}}$ egzaktan diferencijal:

$$\mathbf{F} = \nabla f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

$$\omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i$$

Kažemo da je $\omega_{\mathbf{F}}$ diferencijal skalarne funkcije f i pišemo $\mathrm{d}f$ umjesto $\omega_{\mathbf{F}}$.

Zadatak

Izračunajte diferencijal funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y \ln z$.

Ako je $\mathbf{F}$ konzervativno, kažemo da je $\omega_{\mathbf{F}}$ egzaktan diferencijal:

$$\mathbf{F} = \nabla f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

$$\omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i$$

Kažemo da je $\omega_{\mathbf{F}}$ diferencijal skalarne funkcije f i pišemo $\mathrm{d}f$ umjesto $\omega_{\mathbf{F}}$.

Zadatak

Izračunajte diferencijal funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y \ln z$.

Zadatak

Ako je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konstantna i* $X_0 \in \mathbb{R}^n$, *što je* $\mathrm{d}f(X_0)$?

Zadatak

Što vrijedi za krivuljne integrale egzaktnih diferencijala? Kako provjeriti je li dani diferencijal egzaktan?

Egzaktne diferencijalne jednadžbe su diferencijalne jednadžbe oblika

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

gdje je $\omega = M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y$ egzaktan.

Egzaktne diferencijalne jednadžbe su diferencijalne jednadžbe oblika

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

gdje je $\omega = M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y$ egzaktan.

Zadatak

Riješite diferencijalnu jednadžbu $(x + y)\,\mathrm{d}x + (x + 2y)\,\mathrm{d}y = 0.$

Egzaktne diferencijalne jednadžbe su diferencijalne jednadžbe oblika

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

gdje je $\omega = M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y$ egzaktan.

Zadatak

Riješite diferencijalnu jednadžbu $(x+y)\,\mathrm{d}x + (x+2y)\,\mathrm{d}y = 0$.

Ako postoji funkcija μ jedne ili obiju varijabli x i y tako da je $\mu \cdot \omega$ egzaktan, kažemo da je μ Eulerov multiplikator diferencijala ω.

Primjer

Jednadžba $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})\,\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y = 0$ *nije egzaktna, ali to postaje množenjem s* e^x.

Primjene diferencijala u termodinamici

- Termodinamički sustav: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
- Stanje termodinamičkog sustava: $X \in \Omega$
- Termodinamički proces: krivulja γ u Ω
- Svojstvo termodinamičkog sustava: $Y : \Omega \to \mathbb{R}$
- obično nije poznata eksplicitna formula, nego samo diferencijal ω takav da za sve procese vrijedi

$$\Delta Y = \int_\gamma \omega$$

- ako je ω egzaktan, onda je Y funkcija stanja

Primjene diferencijala u termodinamici

- Termodinamički sustav: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
- Stanje termodinamičkog sustava: $X \in \Omega$
- Termodinamički proces: krivulja γ u Ω
- Svojstvo termodinamičkog sustava: $Y : \Omega \to \mathbb{R}$
- obično nije poznata eksplicitna formula, nego samo diferencijal ω takav da za sve procese vrijedi

$$\Delta Y = \int_\gamma \omega$$

- ako je ω egzaktan, onda je Y funkcija stanja

Prvi i drugi glavni stavak termodinamike

1. $\mathrm{d}U = \mathrm{d}w + \mathrm{d}q$.
2. $\mathrm{d}S = \dfrac{\mathrm{d}q}{T}$.

Volumni rad je definiran neegzaktnim diferencijalom $\mathrm{d}w = -p\,\mathrm{d}V$.

Volumni rad je definiran neegzaktnim diferencijalom $\mathrm{d}w = -p\,\mathrm{d}V$. Ako je jedini mogući rad u nekom sustavu volumni te ako se odvija reverzibilni proces:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}w + \mathrm{d}q = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S.$$

Koje su ovdje zavisne, a koje nezavisne varijable?

Volumni rad je definiran neegzaktnim diferencijalom $\mathrm{d}w = -p\,\mathrm{d}V$. Ako je jedini mogući rad u nekom sustavu volumni te ako se odvija reverzibilni proces:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}w + \mathrm{d}q = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S.$$

Koje su ovdje zavisne, a koje nezavisne varijable?

Zadatak

Gibbsova energija je definirana s $G = H - T\,S = U + p\,V - T\,S$. Argumentirajte zašto je ona funkcija stanja.

Volumni rad je definiran neegzaktnim diferencijalom $\mathrm{d}w = -p\,\mathrm{d}V$. Ako je jedini mogući rad u nekom sustavu volumni te ako se odvija reverzibilni proces:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}w + \mathrm{d}q = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S.$$

Koje su ovdje zavisne, a koje nezavisne varijable?

Zadatak

Gibbsova energija je definirana s $G = H - T\,S = U + p\,V - T\,S$. Argumentirajte zašto je ona funkcija stanja. Raspišite diferencijale Gibbsove energije za reverzibilne procese u kojima je jedini mogući rad volumni.

Volumni rad je definiran neegzaktnim diferencijalom $\mathrm{d}w = -p\,\mathrm{d}V$. Ako je jedini mogući rad u nekom sustavu volumni te ako se odvija reverzibilni proces:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}w + \mathrm{d}q = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S.$$

Koje su ovdje zavisne, a koje nezavisne varijable?

Zadatak

Gibbsova energija je definirana s $G = H - TS = U + pV - TS$. Argumentirajte zašto je ona funkcija stanja. Raspišite diferencijale Gibbsove energije za reverzibilne procese u kojima je jedini mogući rad volumni. Koje su nezavisne varijable Gibbsove energije?

Volumni rad je definiran neegzaktnim diferencijalom $\mathrm{d}w = -p\,\mathrm{d}V$. Ako je jedini mogući rad u nekom sustavu volumni te ako se odvija reverzibilni proces:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}w + \mathrm{d}q = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S.$$

Koje su ovdje zavisne, a koje nezavisne varijable?

Zadatak

Gibbsova energija je definirana s $G = H - TS = U + pV - TS$. Argumentirajte zašto je ona funkcija stanja. Raspišite diferencijale Gibbsove energije za reverzibilne procese u kojima je jedini mogući rad volumni. Koje su nezavisne varijable Gibbsove energije?

Opće lančano pravilo

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_Z = \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)_{x_2,x_3,\ldots} \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial X}\right)_Z + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)_{x_1,x_3,\ldots} \cdot \left(\frac{\partial x_2}{\partial X}\right)_Z + \ldots.$$

Zadatak

Koliko za idealni plin iznosi

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p ?$$

Zadatak

Koliko za idealni plin iznosi

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p ?$$

Zadatak

Izvedite drugu Gibbs-Helmholtzovu relaciju

$$H = G - T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$$

i jednu od termodinamičkih Maxwellowih formula

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T .$$

Zadatak

Termodinamički sustav konstantnog sastava možemo gledati kao skup parova (T, p). *Ako je jedini mogući rad volumni, izobarni toplinski kapacitet može zadati kao*

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \approx a\,n + b\,n\,T + \frac{c\,n}{T^2}.$$

Jedan mol idealnog plina početnog tlaka $p_1 = 1000\,\mathrm{Pa}$ *i početne temperature* $T_1 = 200\,\mathrm{K}$ *se komprimira duž pravca* $\frac{p}{\mathrm{Pa}} = 2000 - 5\frac{T}{\mathrm{K}}$ *do temperature* $300\,\mathrm{K}$. *Izračunajte promjenu entropije tog plina tijekom opisanog procesa ako je idealni plin kojeg razmatramo* $\mathrm{Cl_2}$ *za kojeg je* $a = 37{,}03\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$, $b = 0{,}0067\,\mathrm{J\,K^{-2}\,mol^{-1}}$ *i* $c = -2{,}85 \cdot 10^5\,\mathrm{J\,K\,mol^{-1}}$ *!*