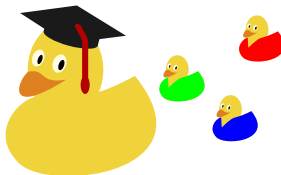


22. predavanje: Nizovi i redovi

Franka Miriam Brückler



Motivacijski primjeri

Primjer

Arhimed iz Sirakuze je u 3. st. pr. Kr. dokazao da je površina segmenta parabole jednaka $\frac{4}{3}$ površine T trokuta kojemu je jedna stranica tetiva tog segmenta, a treći vrh je točka parabole u kojoj je tangenta paralelna s tom tetivom. Kako?

Budući da se ucrtavanjem takvog trokuta dobiju dva nova segmenta parabole u koje se po istom principu mogu ucrtati novi trokut, Arhimed je prvo dokazao da je površina prvog trokuta točno četverostruki zbroj površina novih dvaju trokuta.

Motivacijski primjeri

Primjer

Arhimed iz Sirakuze je u 3. st. pr. Kr. dokazao da je površina segmenta parabole jednaka $\frac{4}{3}$ površine T trokuta kojemu je jedna stranica tetiva tog segmenta, a treći vrh je točka parabole u kojoj je tangenta paralelna s tom tetivom. Kako?

Budući da se ucrtavanjem takvog trokuta dobiju dva nova segmenta parabole u koje se po istom principu mogu ucrtati novi trokut, Arhimed je prvo dokazao da je površina prvog trokuta točno četverostruki zbroj površina novih dvaju trokuta.

Ponavljanjem postupka slijedi da je površina segmenta parabole jednaka

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{16}T + \dots = ?$$

Motivacijski primjeri

Primjer

Arhimed iz Sirakuze je u 3. st. pr. Kr. dokazao da je površina segmenta parabole jednaka $\frac{4}{3}$ površine T trokuta kojemu je jedna stranica tetiva tog segmenta, a treći vrh je točka parabole u kojoj je tangenta paralelna s tom tetivom. Kako?

Budući da se ucrtavanjem takvog trokuta dobiju dva nova segmenta parabole u koje se po istom principu mogu ucrtati novi trokut, Arhimed je prvo dokazao da je površina prvog trokuta točno četverostruki zbroj površina novih dvaju trokuta.

Ponavljanjem postupka slijedi da je površina segmenta parabole jednaka $T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{16}T + \dots = ?$.

Primjer

$$\sqrt{2} \neq 1,41421356237, \quad \sqrt{2} \approx 1,41421356237$$

Što je niz, a što je red?

- **Niz** je funkcija s domenom $\mathbb{N}$ (ili $\mathbb{N}_0$).
- **Red** je uređeni par niza i pripadnog niza parcijalnih suma, tj. niza čiji članovi su zbrojevi prvih n članova prvospomenutog niza.

Što je niz, a što je red?

- **Niz** je funkcija s domenom $\mathbb{N}$ (ili $\mathbb{N}_0$).
- **Red** je uređeni par niza i pripadnog niza parcijalnih suma, tj. niza čiji članovi su zbrojevi prvih n članova prvospomenutog niza.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow ((a_n), (S_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Zadatak

Formalno zapišite prva dva primjera!

Što je niz, a što je red?

- **Niz** je funkcija s domenom $\mathbb{N}$ (ili $\mathbb{N}_0$).
- **Red** je uređeni par niza i pripadnog niza parcijalnih suma, tj. niza čiji članovi su zbrojevi prvih n članova prvospomenutog niza.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow ((a_n), (S_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Zadatak

Formalno zapišite prva dva primjera!

Kako se definiraju aritmetički niz? Geometrijski niz?

Što je niz, a što je red?

- **Niz** je funkcija s domenom $\mathbb{N}$ (ili $\mathbb{N}_0$).
- **Red** je uređeni par niza i pripadnog niza parcijalnih suma, tj. niza čiji članovi su zbrojevi prvih n članova prvospomenutog niza.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow ((a_n), (S_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Zadatak

Formalno zapišite prva dva primjera!

Kako se definiraju aritmetički niz? Geometrijski niz? Koja je razlika između zadavanja općeg člana niza i zadavanja niza rekurzivno?

Osnovna svojstva realnih i kompleksnih nizova

- Vizualizacija?

Osnovna svojstva realnih i kompleksnih nizova

- Vizualizacija?
- Rastući i padajući nizovi.

Osnovna svojstva realnih i kompleksnih nizova

- Vizualizacija?
- Rastući i padajući nizovi.
- Ograničeni nizovi.

Osnovna svojstva realnih i kompleksnih nizova

- Vizualizacija?
- Rastući i padajući nizovi.
- Ograničeni nizovi.
- Konvergentni i divergentni nizovi.

Osnovna svojstva realnih i kompleksnih nizova

- Vizualizacija?
- Rastući i padajući nizovi.
- Ograničeni nizovi.
- Konvergentni i divergentni nizovi.

Zadatak

Ovisno o diferenciji aritmetičkog niza odnosno kvocijentu geometrijskog niza odredite njihove limese. U kojim slučajevima imamo rastuće, padajuće, ograničene nizove?

Osnovna svojstva realnih i kompleksnih nizova

- Vizualizacija?
- Rastući i padajući nizovi.
- Ograničeni nizovi.
- Konvergentni i divergentni nizovi.

Zadatak

Ovisno o diferenciji aritmetičkog niza odnosno kvocijentu geometrijskog niza odredite njihove limese. U kojim slučajevima imamo rastuće, padajuće, ograničene nizove?

Teorem

Ako je realni niz ograničen i rastući ili padajući, onda je konvergentan.

Limesi nizova

Kako glasi Heineova karakterizacija neprekidnosti funkcije?

Limesi nizova

Kako glasi Heineova karakterizacija neprekidnosti funkcije? Koja su glavna svojstva limesa nizova?

Limesi nizova

Kako glasi Heineova karakterizacija neprekidnosti funkcije? Koja su glavna svojstva limesa nizova?

Zadatak

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 2^n}{1 - 3n^3} = ?$$

Limesi nizova

Kako glasi Heineova karakterizacija neprekidnosti funkcije? Koja su glavna svojstva limesa nizova?

Zadatak

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 2^n}{1 - 3n^3} = ?$$

Zadatak

U nekom nizu svaki sljedeći član je petina zbroja prethodnog člana i od tog člana dvostrukog recipročnog broja. Prvi član niza je negativan. Zapišite formulom to pravilo. Znajući da taj niz konvergira, odredite mu limes!

Limesi nizova

Kako glasi Heineova karakterizacija neprekidnosti funkcije? Koja su glavna svojstva limesa nizova?

Zadatak

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 2^n}{1 - 3n^3} = ?$$

Zadatak

U nekom nizu svaki sljedeći član je petina zbroja prethodnog člana i od tog člana dvostrukog recipročnog broja. Prvi član niza je negativan. Zapišite formulom to pravilo. Znajući da taj niz konvergira, odredite mu limes!

Zadatak

Izračunajte limese niza i pripadnog niza parcijalnih suma ako je $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$ i ako je $a_n = \frac{1}{n}$.

Konvergencija reda

Kakav je niz parcijalnih suma u prvom i u prethodnom primjeru?

Konvergencija reda

Kakav je niz parcijalnih suma u prvom i u prethodnom primjeru?

Red konvergira ako konvergira njegov niz parcijalnih suma:

$$\sum_n a_n = \lim_n S_n.$$

Zadatak

Uz koje uvjete konvergira geometrijski red? A aritmetički?

Konvergencija reda

Kakav je niz parcijalnih suma u prvom i u prethodnom primjeru?

Red konvergira ako konvergira njegov niz parcijalnih suma:

$$\sum_n a_n = \lim_n S_n.$$

Zadatak

Uz koje uvjete konvergira geometrijski red? A aritmetički?

Zadatak

Molekulska particijska funkcija za male vibracije dvoatomnih molekula u približenju harmoničkog oscilatora je

$$z = \sum_j \exp \left(-\frac{h\nu j + \frac{1}{2}h\nu}{k_B T} \right).$$

Izvedite „zatvorenu“ formulu za z .

Kriteriji konvergencije redova

Kriterij uspoređivanja

Ako je $0 \leq a_n \leq b_n$ za sve n (počevši od nekog mjesta) te ako znamo da $\sum_n b_n$ konvergira, onda konvergira i $\sum_n a_n$. Ako je $0 \leq a_n \leq b_n$ za sve n (počevši od nekog mjesta) te ako znamo da $\sum_n a_n$ divergira, onda divergira i $\sum_n b_n$.

Zadatak

Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_n \frac{\ln n}{n}.$$

D'Alembertov kriterij

Ako $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, onda red $\sum_n a_n$ (apsolutno)^a konvergira, a ako je $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, onda red divergira. U slučaju da je $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ ovaj kriterij ne daje odluku.

^aRed $\sum_n a_n$ s realnim ili kompleksnim članovima apsolutno konvergira ako konvergira red $\sum_n |a_n|$. Svaki apsolutno konvergentan red je konvergentan.

Zadatak

Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_n \frac{2^n}{n!}.$$

Cauchyjev kriterij

Ako $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, onda red $\sum_n a_n$ (apsolutno) konvergira, a ako je $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, onda red divergira. U slučaju da je $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ ovaj kriterij ne daje odluku.

Zadatak

Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_n \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n.$$

Leibnizov kriterij

Ako je niz (a_n) padajući pozitivan niz realnih brojeva koji konvergira u nulu, onda konvergira red $\sum_n (-1)^n a_n$.

Zadatak

Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_n (-1)^n \frac{n}{2^n}.$$

Integralni kriterij

Ako su svi a_n pozitivni i ako je $f(x)$ definirana tako da u formuli za opći član a_n znak n zamijenimo s x , te ako je tako definirana f neprekidna za $x \geq 1$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, onda red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i integral $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Zadatak

Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_n \frac{1}{n^2}.$$

Nužni uvjet konvergencije reda

Zadatak

Usporedite konvergenciju niza i pripadnog reda za sve prethodne slučajeve.

Nužni uvjet konvergencije reda

Zadatak

Usporedite konvergenciju niza i pripadnog reda za sve prethodne slučajeve.

Može li red $\sum a_n$ konvergirati ako (a_n) divergira?

Nužni uvjet konvergencije reda

Zadatak

Usporedite konvergenciju niza i pripadnog reda za sve prethodne slučajeve.

Može li red $\sum a_n$ konvergirati ako (a_n) divergira? Konvergira?

Nužni uvjet konvergencije reda

Zadatak

Usporedite konvergenciju niza i pripadnog reda za sve prethodne slučajeve.

Može li red $\sum a_n$ konvergirati ako (a_n) divergira? Konvergira?
Konvergira u 0?

Nužni uvjet konvergencije reda

Zadatak

Usporedite konvergenciju niza i pripadnog reda za sve prethodne slučajeve.

Može li red $\sum a_n$ konvergirati ako (a_n) divergira? Konvergira?
Konvergira u 0?

Mora li red $\sum a_n$ konvergirati ako (a_n) divergira?

Nužni uvjet konvergencije reda

Zadatak

Usporedite konvergenciju niza i pripadnog reda za sve prethodne slučajeve.

Može li red $\sum a_n$ konvergirati ako (a_n) divergira? Konvergira?
Konvergira u 0?

Mora li red $\sum a_n$ konvergirati ako (a_n) divergira? Konvergira?

Nužni uvjet konvergencije reda

Zadatak

Usporedite konvergenciju niza i pripadnog reda za sve prethodne slučajeve.

Može li red $\sum a_n$ konvergirati ako (a_n) divergira? Konvergira?
Konvergira u 0?

Mora li red $\sum a_n$ konvergirati ako (a_n) divergira? Konvergira?
Konvergira u 0?

Nužni uvjet konvergencije reda

Zadatak

Usporedite konvergenciju niza i pripadnog reda za sve prethodne slučajeve.

Može li red $\sum a_n$ konvergirati ako (a_n) divergira? Konvergira?
Konvergira u 0?

Mora li red $\sum a_n$ konvergirati ako (a_n) divergira? Konvergira?
Konvergira u 0?

Iskažite **nužni uvjet konvergencije reda**.

Zadatak

Redovi $\sum_n (1 - \frac{1}{n})$ i $\sum_n \cos n$ divergiraju — zašto?