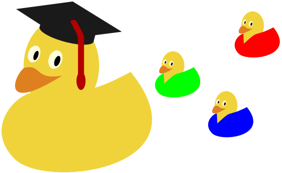
23. predavanje: Redovi potencija

Franka Miriam Brückler



Redovi funkcija

Primjer

Usporedite:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \quad \text{i} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^n}.$$

Redovi funkcija

Primjer

Usporedite:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \quad \text{i} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^n}.$$

Red funkcija je

Redovi funkcija

Primjer

Usporedite:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \quad \text{i} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^n}.$$

Red funkcija je red čiji svi opći članovi su funkcije iste nezavisne varijable. Područje konvergencije reda funkcija je

Redovi funkcija

Primjer

Usporedite:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \quad \text{i} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^n}.$$

Red funkcija je red čiji svi opći članovi su funkcije iste nezavisne varijable. Područje konvergencije reda funkcija je skup (podskup od $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) svih vrijednosti te nezavisne varijable za koje red funkcija konvergira.

Primjer

Red funkcija $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^n}$ *ima područje konvergencije* $\langle 0, \frac{1}{e}\rangle \cup \langle e, +\infty\rangle$.

Redovi potencija

Red potencija oko točke c je red oblika

$$\sum_n b_n(x-c)^n.$$

Redovi potencija

Red potencija oko točke c je red oblika

$$\sum_n b_n(x-c)^n.$$

Područje konvergencije reda potencija je interval oblika $\langle c-R, c+R\rangle$, $\langle c-R, c+R]$, $[c-r, c+r\rangle$ ili $[c-r, c+R]$, gdje je

$$R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|b_n|}} = \lim_n \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|.$$

Redovi potencija

Red potencija oko točke c je red oblika

$$\sum_n b_n (x-c)^n.$$

Područje konvergencije reda potencija je interval oblika $\langle c-R, c+R\rangle$, $\langle c-R, c+R]$, $[c-r, c+r\rangle$ ili $[c-r, c+R]$, gdje je

$$R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|b_n|}} = \lim_n \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|.$$

Parcijalne sume redova potencija su

Redovi potencija

Red potencija oko točke c je red oblika

$$\sum_n b_n(x-c)^n.$$

Područje konvergencije reda potencija je interval oblika $\langle c-R, c+R\rangle$, $\langle c-R, c+R]$, $[c-r, c+r\rangle$ ili $[c-r, c+R]$, gdje je

$$R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|b_n|}} = \lim_n \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|.$$

Parcijalne sume redova potencija su polinomi, koji (za x iz područja konvergencije) aproksimiraju sumu reda potencija.

Redovi potencija

Red potencija oko točke c je red oblika

$$\sum_n b_n (x-c)^n.$$

Područje konvergencije reda potencija je interval oblika $\langle c-R, c+R\rangle$, $\langle c-R, c+R]$, $[c-r, c+r\rangle$ ili $[c-r, c+R]$, gdje je

$$R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|b_n|}} = \lim_n \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|.$$

Parcijalne sume redova potencija su polinomi, koji (za x iz područja konvergencije) aproksimiraju sumu reda potencija.

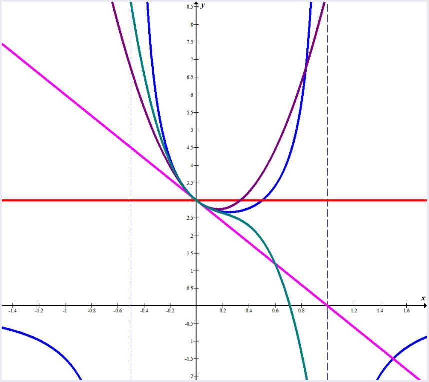
Zadatak

Odredite interval konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 3^n \cdot \ln(n+1)}.$$

Primjer

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + (-1)^{n+1} 2^{n+1}\right) x^n, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$



Razvoj funkcije u red potencija

Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ i c unutar I, može li se f blizu c aproksimirati polinomom $p_n(x)$ stupnja n? Ako da, koji polinom stupnja n je najbolji?

Razvoj funkcije u red potencija

Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ i c unutar I, može li se f blizu c aproksimirati polinomom $p_n(x)$ stupnja n? Ako da, koji polinom stupnja n je najbolji? Koji je odgovor za $n = 1$?

Razvoj funkcije u red potencija

Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ i c unutar I, može li se f blizu c aproksimirati polinomom $p_n(x)$ stupnja n? Ako da, koji polinom stupnja n je najbolji? Koji je odgovor za $n = 1$?

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \ldots + b_n(x-c)^n$$

Primjer

$f : \langle -1, \rangle + \infty \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$, $c = 0$:

n	uvjet	
0	$f(c) = p_0(c) = b_0$	0

Razvoj funkcije u red potencija

Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ i c unutar I, može li se f blizu c aproksimirati polinomom $p_n(x)$ stupnja n? Ako da, koji polinom stupnja n je najbolji? Koji je odgovor za $n = 1$?

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + \ldots + b_n(x - c)^n$$

Primjer

$f : \langle -1, \rangle + \infty \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x)$, $c = 0$:

n	uvjet	
0	$f(c) = p_0(c) = b_0$	0
1	$f'(c) = p_1'(c) = b_1$	x

Razvoj funkcije u red potencija

Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ i c unutar I, može li se f blizu c aproksimirati polinomom $p_n(x)$ stupnja n? Ako da, koji polinom stupnja n je najbolji? Koji je odgovor za $n = 1$?

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + \ldots + b_n(x - c)^n$$

Primjer

$f : \langle -1, \rangle + \infty \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x)$, $c = 0$:

n	uvjet	
0	$f(c) = p_0(c) = b_0$	0
1	$f'(c) = p_1'(c) = b_1$	x
2	$f''(c) = p_2''(c) = 2b_2$	$x - \frac{1}{2}x^2$

Razvoj funkcije u red potencija

Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ i c unutar I, može li se f blizu c aproksimirati polinomom $p_n(x)$ stupnja n? Ako da, koji polinom stupnja n je najbolji? Koji je odgovor za $n = 1$?

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \ldots + b_n(x-c)^n$$

Primjer

$f : \langle -1, \rangle + \infty \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$, $c = 0$:

n	uvjet	
0	$f(c) = p_0(c) = b_0$	0
1	$f'(c) = p_1'(c) = b_1$	x
2	$f''(c) = p_2''(c) = 2b_2$	$x - \frac{1}{2}x^2$
3	$f'''(c) = p_3'''(c) = 3!b_3$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

Taylorovi polinomi i redovi

Za danu n puta derivabilnu $f : I \to \mathbb{R}$ i c unutar I polinom stupnja n koji najbolje aproksimira f u blizini c zove se Taylorov polinom funkcije f (stupnja n, oko c):

$$T_n(x) = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + \ldots + b_n(x - c)^n,$$

$$b_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}.$$

Taylorovi polinomi i redovi

Za danu n puta derivabilnu $f : I \to \mathbb{R}$ i c unutar I polinom stupnja n koji najbolje aproksimira f u blizini c zove se Taylorov polinom funkcije f (stupnja n, oko c):

$$T_n(x) = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + \ldots + b_n(x - c)^n,$$

$$b_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}.$$

Ako je f beskonačno puta derivabilna, definiran je Taylorov red funkcije f oko c

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Taylorovi polinomi i redovi

Za danu n puta derivabilnu $f : I \to \mathbb{R}$ i c unutar I polinom stupnja n koji najbolje aproksimira f u blizini c zove se Taylorov polinom funkcije f (stupnja n, oko c):

$$T_n(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \ldots + b_n(x-c)^n,$$

$$b_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}.$$

Ako je f beskonačno puta derivabilna, definiran je Taylorov red funkcije f oko c

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Ako je $I' \subseteq I$ pripadni interval konvergencije, $f(x)$ za $x \in I'$ može i ne mora biti jednaka sumi Taylorovog reda. No, ako uopće postoji red potencija tako da je za sve x iz nekog intervala oko c sumar reda jednaka $f(x)$, onda je to Taylorov red funkcije f i kažemo da smo f razvili u red potencija (Taylorov red) oko c.

Važni Maclaurinovi redovi

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in \langle -1, 1\rangle;$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad x \in \langle -1, 1].$$

Zadatak

Odredite Maclaurinove redove i njihove intervale konvergencije za sljedeće funkcije:

- $\sin^2 x$
- $\frac{1}{(9-x)^2}$
- $\arcsin x$

Zadatak

Odredite Maclaurinove redove i njihove intervale konvergencije za sljedeće funkcije:

- $\sin^2 x$
- $\frac{1}{(9-x)^2}$
- $\arcsin x$

Zadatak

Izračunajte sumu reda $1 - \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{2e^2} - \dfrac{1}{6e^3} + \dfrac{1}{24e^4} + \dots$.

Zadatak

Odredite Maclaurinove redove i njihove intervale konvergencije za sljedeće funkcije:

- $\sin^2 x$
- $\frac{1}{(9-x)^2}$
- $\arcsin x$

Zadatak

Izračunajte sumu reda $1 - \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{2e^2} - \dfrac{1}{6e^3} + \dfrac{1}{24e^4} + \dots$.

Zadatak

Izračunajte $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Greška aproksimacije Taylorovim polinomom

$$R_n(x) = |f(x) - T_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-c|^{n+1},$$

gdje je M neka gornja međa za $|f^{(n+1)}(t)|$ za t-ove između x i c.

Greška aproksimacije Taylorovim polinomom

$$R_n(x) = |f(x) - T_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - c|^{n+1},$$

gdje je M neka gornja međa za $|f^{(n+1)}(t)|$ za t-ove između x i c.

Zadatak

Kojeg reda veličine je greška aproksimacije od $\sqrt[3]{x}$ kvadratnim polinomom oko $c = 8$ za $x = 11$?

Greška aproksimacije Taylorovim polinomom

$$R_n(x) = |f(x) - T_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - c|^{n+1},$$

gdje je M neka gornja međa za $|f^{(n+1)}(t)|$ za t-ove između x i c.

Zadatak

Kojeg reda veličine je greška aproksimacije od $\sqrt[3]{x}$ *kvadratnim polinomom oko* $c = 8$ *za* $x = 11$*?*

Zadatak

Ako želimo broj e izračunati na pet decimala točno, koji Maclaurinov polinom funkcije $\exp(x)$ *trebamo uzeti?*

Zadatak

Prema Planckovom zakonu za zračenje crnog tijela, spektralna gustoća energije zračenja valne duljine λ *je*

$$\rho(\lambda) == \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right)}.$$

Prije Plancka Rayleigh i Jeans predložili su jednostavniju formulu

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4},$$

no kako bi iz te formule slijedilo da ρ *jako raste kako se valne duljine približavaju nuli, i to pri svim temperaturama, slijedilo bi da sva tijela emitiraju kratkovalno i ultraljubičasto zračenje (ultraljubičasta katastrofa). Pokažite da je za velike valne duljine Rayley-Jeansova formula dobra aproksimacija Planckovog zakona!*

Zadatak

Rezultati pismenih ispita iz Matematike 2 su normalno distribuirani su očekivanjem $\mu = 50$ i standardnom devijacijom $\sigma = 20$, tj. opisani su funkcijom gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Na četiri decimale točno izračunajte vjerojatnost da nasumično odabrani student na pismenom ispitu iz Matematike 2 dobije ocjenu dovoljan, tj. ostvari između 45 i 60 bodova.

Zadatak

Rezultati pismenih ispita iz Matematike 2 *su normalno distribuirani su očekivanjem* $\mu = 50$ *i standardnom devijacijom* $\sigma = 20$, *tj. opisani su funkcijom gustoće vjerojatnosti*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Na četiri decimale točno izračunajte vjerojatnost da nasumično odabrani student na pismenom ispitu iz Matematike 2 *dobije ocjenu dovoljan, tj. ostvari između* 45 *i* 60 *bodova.*

$$p = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\,\mathrm{d}z$$