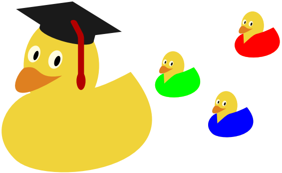
24. predavanje: Trigonometrijski redovi

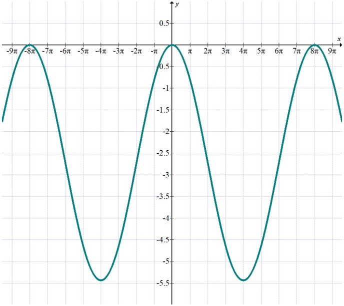
Franka Miriam Brückler



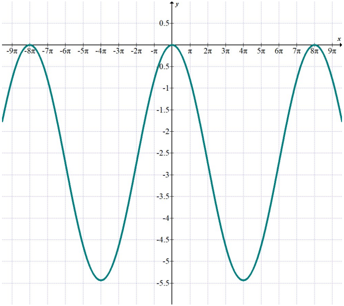
- Kako se definiraju periodične realne funkcije?

- Kako se definiraju periodične realne funkcije? Što je period? Temeljni period?

- Kako se definiraju periodične realne funkcije? Što je period? Temeljni period?
- Skicirajte graf funkcije $f(x) = 2\sin(-\pi x) + 3$.
- Koja je formula funkcije čiji graf je na slici dolje?

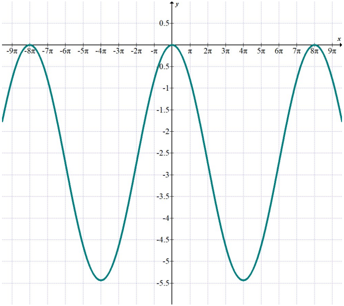


- Kako se definiraju periodične realne funkcije? Što je period? Temeljni period?
- Skicirajte graf funkcije $f(x) = 2\sin(-\pi x) + 3$.
- Koja je formula funkcije čiji graf je na slici dolje?



- Skicirajte graf neke neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kojoj je period 10 i koja ima bar jednu točku u kojoj nije derivabilna.

- Kako se definiraju periodične realne funkcije? Što je period? Temeljni period?
- Skicirajte graf funkcije $f(x) = 2\sin(-\pi x) + 3$.
- Koja je formula funkcije čiji graf je na slici dolje?



- Skicirajte graf neke neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kojoj je period 10 i koja ima bar jednu točku u kojoj nije derivabilna. Objasnite zašto je dovoljno zadati tu funkciju na $[-5, 5]$.

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = |x|$. Skicirajte njezin graf.

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = |x|$. Skicirajte njezin graf. Proširite ju do periodične funkcije s domenom $\mathbb{R}$.

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = |x|$. Skicirajte njezin graf. Proširite ju do periodične funkcije s domenom $\mathbb{R}$. Koji joj je temeljni period T?

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = |x|$. Skicirajte njezin graf. Proširite ju do periodične funkcije s domenom $\mathbb{R}$. Koji joj je temeljni period T? Koje funkcije tipa $\cos(\omega\, x)$, $\sin(\omega\, x)$ također imaju period T?

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = |x|$. Skicirajte njezin graf. Proširite ju do periodične funkcije s domenom $\mathbb{R}$. Koji joj je temeljni period T? Koje funkcije tipa $\cos(\omega\, x)$, $\sin(\omega\, x)$ također imaju period T?

Ako je temeljni period razmatrane periodične funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jednak T, uvodimo oznake

$$L = \frac{T}{2},\ \omega_n = \frac{n\,\pi}{L},\ c_n(x) = \cos(\omega_n\, x),\ s_n(x) = \sin(\omega_n\, x) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

i funkciju f gledamo kao funkciju s domenom $[-L, L]$.

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = |x|$. Skicirajte njezin graf. Proširite ju do periodične funkcije s domenom $\mathbb{R}$. Koji joj je temeljni period T? Koje funkcije tipa $\cos(\omega\, x)$, $\sin(\omega\, x)$ također imaju period T?

Ako je temeljni period razmatrane periodične funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jednak T, uvodimo oznake

$$L = \frac{T}{2},\ \omega_n = \frac{n\,\pi}{L},\ c_n(x) = \cos(\omega_n\, x),\ s_n(x) = \sin(\omega_n\, x) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

i funkciju f gledamo kao funkciju s domenom $[-L, L]$.

Što je bila svrha Taylorovog reda funkcije f?

Primjer, prvi dio

Zadana je funkcija $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = |x|$. Skicirajte njezin graf. Proširite ju do periodične funkcije s domenom $\mathbb{R}$. Koji joj je temeljni period T? Koje funkcije tipa $\cos(\omega\, x)$, $\sin(\omega\, x)$ također imaju period T?

Ako je temeljni period razmatrane periodične funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jednak T, uvodimo oznake

$$L = \frac{T}{2},\ \omega_n = \frac{n\,\pi}{L},\ c_n(x) = \cos(\omega_n\, x),\ s_n(x) = \sin(\omega_n\, x) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

i funkciju f gledamo kao funkciju s domenom $[-L, L]$.
Što je bila svrha Taylorovog reda funkcije f? Ovdje želimo periodičnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aproksimirati linearnom kombinacijom sinusa i kosinusa istog perioda.

Trigonometrijski red (perioda T) je red oblika

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \, c_n(x) + B_n \, s_n(x)).$$

Trigonometrijski red (perioda T) je red oblika

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \, c_n(x) + B_n \, s_n(x)).$$

Želimo postići da neki trigonometrijski red (njega ćemo zvati Fourierovim redom funkcije f) do na eventualno konačno mnogo $x \in [-L, L]$ vrijedi da je jednak $f(x)$.

Trigonometrijski red (perioda T) je red oblika

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\, c_n(x) + B_n\, s_n(x)).$$

Želimo postići da neki trigonometrijski red (njega ćemo zvati Fourierovim redom funkcije f) do na eventualno konačno mnogo $x \in [-L, L]$ vrijedi da je jednak $f(x)$.
Prema Dirichletovom teoremu, to je moguće postići uz sljedeće pretpostavke na funkciju $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$:

1. po dijelovima neprekidna

Trigonometrijski red (perioda T) je red oblika

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\, c_n(x) + B_n\, s_n(x)).$$

Želimo postići da neki trigonometrijski red (njega ćemo zvati Fourierovim redom funkcije f) do na eventualno konačno mnogo $x \in [-L, L]$ vrijedi da je jednak $f(x)$.
Prema Dirichletovom teoremu, to je moguće postići uz sljedeće pretpostavke na funkciju $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$:

1. po dijelovima neprekidna i svi prekidi, ako ih ima, su skokovi.

Trigonometrijski red (perioda T) je red oblika

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\, c_n(x) + B_n\, s_n(x)).$$

Želimo postići da neki trigonometrijski red (njega ćemo zvati Fourierovim redom funkcije f) do na eventualno konačno mnogo $x \in [-L, L]$ vrijedi da je jednak $f(x)$.
Prema Dirichletovom teoremu, to je moguće postići uz sljedeće pretpostavke na funkciju $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$:

1. po dijelovima neprekidna i svi prekidi, ako ih ima, su skokovi.
2. $[-L, L]$ se može podijeliti na konačno mnogo intervala tako da je f na svakom od njih ili rastuća ili padajuća.

Trigonometrijski red (perioda T) je red oblika

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\, c_n(x) + B_n\, s_n(x)).$$

Želimo postići da neki trigonometrijski red (njega ćemo zvati Fourierovim redom funkcije f) do na eventualno konačno mnogo $x \in [-L, L]$ vrijedi da je jednak $f(x)$.
Prema Dirichletovom teoremu, to je moguće postići uz sljedeće pretpostavke na funkciju $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$:

1. po dijelovima neprekidna i svi prekidi, ako ih ima, su skokovi.
2. $[-L, L]$ se može podijeliti na konačno mnogo intervala tako da je f na svakom od njih ili rastuća ili padajuća.

Primjer, drugi dio

Zadovoljava li F Dirichletove uvjete?

- Argumentirajte zašto sve funkcije koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete čine (beskonačnodimenzionalan) realan unitarni prostor!

- Argumentirajte zašto sve funkcije koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete čine (beskonačnodimenzionalan) realan unitarni prostor!
- Dokažite da su svake dvije različite funkcije iz niza funkcija $c_0, s_1, c_1, s_2, c_2, \ldots$ međusobno ortogonalne.

- Argumentirajte zašto sve funkcije koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete čine (beskonačnodimenzionalan) realan unitarni prostor!
- Dokažite da su svake dvije različite funkcije iz niza funkcija $c_0, s_1, c_1, s_2, c_2, \ldots$ međusobno ortogonalne.
- Ako je $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\, c_n(x) + B_n\, s_n(x))$ razvoj funkcije f u Fourierov red, izvedite formule za Fourierove koeficijente

$$A_n = \frac{1}{L}\langle f, c_n\rangle, \quad B_n = \frac{1}{L}\langle f, s_n\rangle.$$

- Argumentirajte zašto sve funkcije koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete čine (beskonačnodimenzionalan) realan unitarni prostor!
- Dokažite da su svake dvije različite funkcije iz niza funkcija $c_0, s_1, c_1, s_2, c_2, \ldots$ međusobno ortogonalne.
- Ako je $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\, c_n(x) + B_n\, s_n(x))$ razvoj funkcije f u Fourierov red, izvedite formule za Fourierove koeficijente

$$A_n = \frac{1}{L}\langle f, c_n\rangle, \quad B_n = \frac{1}{L}\langle f, s_n\rangle.$$

- Zašto se u Fourierovom redu parne funkcije pojavljuju samo kosinusi, a u Fourierovom redu neparne funkcije samo sinusi?

- Argumentirajte zašto sve funkcije koje zadovoljavaju Dirichletove uvjete čine (beskonačnodimenzionalan) realan unitarni prostor!
- Dokažite da su svake dvije različite funkcije iz niza funkcija $c_0, s_1, c_1, s_2, c_2, \ldots$ međusobno ortogonalne.
- Ako je $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\, c_n(x) + B_n\, s_n(x))$ razvoj funkcije f u Fourierov red, izvedite formule za Fourierove koeficijente

$$A_n = \frac{1}{L}\langle f, c_n\rangle, \quad B_n = \frac{1}{L}\langle f, s_n\rangle.$$

- Zašto se u Fourierovom redu parne funkcije pojavljuju samo kosinusi, a u Fourierovom redu neparne funkcije samo sinusi?

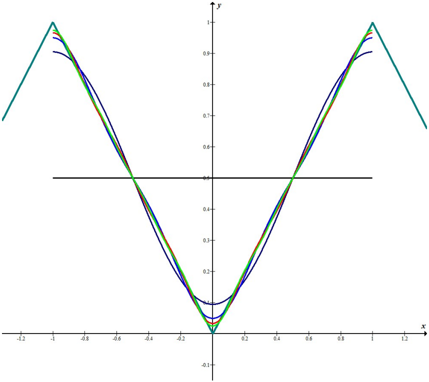
Primjer, treći dio

Razvijte F u Fourierov red!

Primjer, treći dio

Razvijte F u Fourierov red!

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x) - \frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi x) - \frac{4}{25\pi^2}\cos(5\pi x) - \frac{4}{49\pi^2}\cos(7\pi x) - \dots$$



- Kako glasi Eulerova formula za kompleksne brojeve?

- Kako glasi Eulerova formula za kompleksne brojeve? Iz nje izvedite kako se sinus i kosinus mogu zapisati preko kompleksne eksponencijalne funkcije!

- Kako glasi Eulerova formula za kompleksne brojeve? Iz nje izvedite kako se sinus i kosinus mogu zapisati preko kompleksne eksponencijalne funkcije!
- Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$A_n c_n(x) + B_n s_n(x) = c_{-n} \exp(-i\omega_n x) + c_n \exp(i\omega_n x),$$

pri čemu je $c_{-n} = \overline{c_n}$.

- Kako glasi Eulerova formula za kompleksne brojeve? Iz nje izvedite kako se sinus i kosinus mogu zapisati preko kompleksne eksponencijalne funkcije!
- Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$A_n c_n(x) + B_n s_n(x) = c_{-n} \exp(-i\omega_n x) + c_n \exp(i\omega_n x),$$

  pri čemu je $c_{-n} = \overline{c_n}$.
- Kompleksni oblik Fourierovog reda funkcije f je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n x),$$

$$c_{\pm n} = \frac{A_n \mp iB_n}{2}, \quad c_0 = \frac{A_0}{2}.$$

- Kakvi su kompleksni Fourierovi koeficijenti za parne odnosno neparne funkcije?

Primjer, četvrti dio

Odredite kompleksni oblik Fourierovog reda funkcije F!

Primjer, četvrti dio

Odredite kompleksni oblik Fourierovog reda funkcije F!

- Što su apsolutna vrijednost i argument kompleksnog broja?

Primjer, četvrti dio

Odredite kompleksni oblik Fourierovog reda funkcije F!

- Što su apsolutna vrijednost i argument kompleksnog broja? Kakvi su argumenti kompleksnih Fourierovih koeficijenata za parne odnosno neparne funkcije?

Primjer, četvrti dio

Odredite kompleksni oblik Fourierovog reda funkcije F!

- Što su apsolutna vrijednost i argument kompleksnog broja? Kakvi su argumenti kompleksnih Fourierovih koeficijenata za parne odnosno neparne funkcije?
- $(c_n)\ldots((|c_n|),(\varphi_n))$.
- c odnosno $|c|$ i φ možemo umjesto kao funkcije od n gledati kao funkcije od ω_n.

Primjer, četvrti dio

Odredite kompleksni oblik Fourierovog reda funkcije F!

- Što su apsolutna vrijednost i argument kompleksnog broja? Kakvi su argumenti kompleksnih Fourierovih koeficijenata za parne odnosno neparne funkcije?
- $(c_n) \ldots ((|c_n|), (\varphi_n))$.
- c odnosno $|c|$ i φ možemo umjesto kao funkcije od n gledati kao funkcije od ω_n.
- Spektar amplituda je ovisnost $|c|$ o ω_n, a fazni spektar je ovisnost φ o ω_n. Kakvi su ti spektri za realne funkcije? Parne? Neparne?

Primjer, peti dio

Odredite i skicirajte spektar amplituda i fazni spektar funkcije F!

Zadatak

Odredite pet članova Fourierovog reda koji najbolje aproksimiraju $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$.

Zadatak

Odredite pet članova Fourierovog reda koji najbolje aproksimiraju $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$.

Zadatak

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *formulom* $f(x) = \dfrac{1}{4 + x^2}$. *Skicirajte spektar amplituda za polinom stupnja* 3 *koji ju najbolje aproksimira oko* 0, *restringiran na* $[-1, 1]$.

Zadatak

Odredite pet članova Fourierovog reda koji najbolje aproksimiraju $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$.

Zadatak

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *formulom* $f(x) = \dfrac{1}{4 + x^2}$. *Skicirajte spektar amplituda za polinom stupnja* 3 *koji ju najbolje aproksimira oko* 0, *restringiran na* $[-1, 1]$.

Zadatak

Spektar amplituda neke realne parne funkcije temeljnog perioda 1 *zadan je formulom* $|c_n| = \omega_n^{-1}$ *za* $n \neq 0$ *i* $c_0 = 1/\pi$. *Odredite najbolju polinomijalnu aproksimaciju stupnja* 2 *koji oko* 0 *najbolje aproksimira tri najznačajnija člana (realnog) Fourierovog reda te funkcije.*

Zadatak

Odredite pet članova Fourierovog reda koji najbolje aproksimiraju $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$.

Zadatak

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *formulom* $f(x) = \dfrac{1}{4 + x^2}$. *Skicirajte spektar amplituda za polinom stupnja* 3 *koji ju najbolje aproksimira oko* 0, *restringiran na* $[-1, 1]$.

Zadatak

Spektar amplituda neke realne parne funkcije temeljnog perioda 1 *zadan je formulom* $|c_n| = \omega_n^{-1}$ *za* $n \neq 0$ *i* $c_0 = 1/\pi$. *Odredite najbolju polinomijalnu aproksimaciju stupnja* 2 *koji oko* 0 *najbolje aproksimira tri najznačajnija člana (realnog) Fourierovog reda te funkcije.*