

# Matematika 1 i 2 za kemičare

Franka Miriam Brueckler

7. svibnja 2025.

# Sadržaj

|          |                                                                            |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Uvod</b>                                                                | <b>7</b>  |
| 1.1      | Varijable i konstante . . . . .                                            | 7         |
| 1.2      | Brojevi i mjerne jedinice . . . . .                                        | 8         |
| 1.3      | Kartezijev i opći pravokutni koordinatni sustav u ravnini . . .            | 14        |
| 1.4      | Kompleksni brojevi . . . . .                                               | 17        |
| 1.4.1    | Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva . . . . .                       | 19        |
| 1.4.2    | Apsolutna vrijednost kompleksnog broja i kompleksno konjugiranje . . . . . | 20        |
| 1.4.3    | Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva . . . . .                        | 24        |
| 1.4.4    | Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja . . . . .                        | 25        |
| 1.4.5    | Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva . . . . .                  | 27        |
| 1.4.6    | Eulerova formula . . . . .                                                 | 31        |
| <b>2</b> | <b>Realne funkcije jedne varijable</b>                                     | <b>35</b> |
| 2.1      | Pojam funkcije i grafa funkcije . . . . .                                  | 35        |
| 2.2      | Svojstva funkcija i njihovih grafova . . . . .                             | 39        |
| 2.3      | Transformacije grafova . . . . .                                           | 41        |
| 2.4      | Algebarske funkcije . . . . .                                              | 46        |
| 2.4.1    | Afine funkcije . . . . .                                                   | 46        |
| 2.4.2    | Kvadratne funkcije . . . . .                                               | 51        |
| 2.4.3    | Polinomi . . . . .                                                         | 53        |
| 2.4.4    | Racionalne funkcije . . . . .                                              | 56        |
| 2.4.5    | Korijeni . . . . .                                                         | 63        |
| 2.5      | Kompozicija funkcija i inverzne funkcije . . . . .                         | 65        |
| 2.6      | Transcendentne funkcije . . . . .                                          | 69        |
| 2.6.1    | Eksponencijalne funkcije . . . . .                                         | 70        |
| 2.6.2    | Hiperbolne funkcije . . . . .                                              | 73        |
| 2.6.3    | Logaritamske funkcije . . . . .                                            | 75        |
| 2.6.4    | Opća potencija . . . . .                                                   | 79        |
| 2.6.5    | Trigonometrijske i ciklotometrijske funkcije . . . . .                     | 79        |
| 2.7      | Neke neelementarne funkcije . . . . .                                      | 87        |

|          |                                                                                        |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.8      | Prikaz neafinih funkcija pomoću afinih . . . . .                                       | 89         |
| <b>3</b> | <b>Deriviranje</b>                                                                     | <b>93</b>  |
| 3.1      | Deriviranje funkcija . . . . .                                                         | 93         |
| 3.2      | Višestruke derivacije . . . . .                                                        | 98         |
| 3.3      | Kad derivacija ne postoji? . . . . .                                                   | 99         |
| 3.4      | Osnovna svojstva derivacija . . . . .                                                  | 101        |
| 3.5      | Uvod u diferencijalne jednačbe . . . . .                                               | 106        |
| 3.6      | Konveksnost i konkavnost . . . . .                                                     | 110        |
| 3.7      | Lokalni ekstremi realnih funkcija jedne varijable . . . . .                            | 114        |
| 3.8      | Globalni ekstremi realnih funkcija jedne varijable . . . . .                           | 120        |
| 3.8.1    | Neki problemi optimizacije u fizikalnoj kemiji . . . . .                               | 124        |
| 3.9      | Ispitivanje toka funkcije . . . . .                                                    | 127        |
| 3.10     | Implicitno zadane krivulje u ravnini . . . . .                                         | 130        |
| 3.11     | Parametarski zadane krivulje u ravnini . . . . .                                       | 133        |
| 3.12     | Polarne koordinate u ravnini . . . . .                                                 | 135        |
| <b>4</b> | <b>Limesi, asimptote i neprekidnost funkcija</b>                                       | <b>141</b> |
| 4.1      | Limesi funkcija . . . . .                                                              | 141        |
| 4.1.1    | Limes funkcije u točki . . . . .                                                       | 142        |
| 4.1.2    | Limes funkcije u beskonačnosti . . . . .                                               | 153        |
| 4.1.3    | Svojstva limesa funkcija . . . . .                                                     | 156        |
| 4.1.4    | Kose asimptote . . . . .                                                               | 159        |
| 4.1.5    | L'Hôpitalovo pravilo . . . . .                                                         | 161        |
| 4.2      | Neprekidnost funkcija . . . . .                                                        | 163        |
| <b>5</b> | <b>Integriranje</b>                                                                    | <b>169</b> |
| 5.1      | Neodređeni i određeni integrali . . . . .                                              | 169        |
| 5.2      | Newton-Leibnizova formula . . . . .                                                    | 183        |
| 5.3      | Osnovne metode integriranja . . . . .                                                  | 185        |
| 5.3.1    | Metoda parcijalne integracije . . . . .                                                | 185        |
| 5.3.2    | Metoda supstitucije . . . . .                                                          | 188        |
| 5.3.3    | Integriranje racionalnih funkcija . . . . .                                            | 190        |
| 5.4      | Nepravi integrali . . . . .                                                            | 194        |
| 5.5      | Primjene integrala u kemiji i fizici . . . . .                                         | 200        |
| <b>6</b> | <b>Osnove linearne algebre</b>                                                         | <b>213</b> |
| 6.1      | Klasična algebra vektora . . . . .                                                     | 213        |
| 6.1.1    | Množenje geometrijskih vektora skalarom i zbrajanje<br>geometrijskih vektora . . . . . | 216        |
| 6.1.2    | Baza i koordinate u $V^2$ , $V^2(O)$ , $V^3$ , $V^3(O)$ . . . . .                      | 220        |

|          |                                                                                                     |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.1.3    | Skalarni produkt geometrijskih vektora . . . . .                                                    | 223        |
| 6.1.4    | Vektorski i mješoviti produkt vektora . . . . .                                                     | 227        |
| 6.2      | Analitička geometrija trodimenzionalnog euklidskog prostora .                                       | 232        |
| 6.2.1    | Točke u prostoru . . . . .                                                                          | 233        |
| 6.2.2    | Ravnine u prostoru . . . . .                                                                        | 233        |
| 6.2.3    | Pravci u prostoru . . . . .                                                                         | 240        |
| 6.3      | Primjene klasične algebre vektora i analitičke geometrije pros-<br>tora u kristalografiji . . . . . | 245        |
| <b>7</b> | <b>Sustavi linearnih jednadžbi</b>                                                                  | <b>255</b> |
| 7.1      | Linearne jednadžbe . . . . .                                                                        | 255        |
| 7.2      | Sustavi linearnih jednadžbi . . . . .                                                               | 260        |
| 7.3      | Metoda supstitucije . . . . .                                                                       | 264        |
| 7.4      | Gaußova metoda eliminacija . . . . .                                                                | 266        |
| <b>8</b> | <b>Matrice, vektorski prostori i linearni operatori</b>                                             | <b>277</b> |
| 8.1      | Uvod u matrice . . . . .                                                                            | 277        |
| 8.2      | Vektorski i unitarni prostori . . . . .                                                             | 282        |
| 8.2.1    | Pojam vektorskog prostora . . . . .                                                                 | 282        |
| 8.2.2    | Baza i dimenzija vektorskog prostora . . . . .                                                      | 285        |
| 8.2.3    | Unitarni prostori . . . . .                                                                         | 294        |
| 8.3      | Linearni operatori . . . . .                                                                        | 299        |
| 8.3.1    | Pojam linearnog operatora . . . . .                                                                 | 299        |
| 8.3.2    | Matrica linearnog operatora . . . . .                                                               | 304        |
| 8.4      | Množenje matrica . . . . .                                                                          | 310        |
| 8.5      | Inverz matrice . . . . .                                                                            | 315        |
| 8.6      | Veza sustava linearnih jednadžbi s matricama . . . . .                                              | 319        |
| 8.7      | Determinante matrica . . . . .                                                                      | 322        |
| 8.8      | Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori . . . . .                                               | 332        |
| <b>9</b> | <b>Obične diferencijalne jednadžbe</b>                                                              | <b>347</b> |
| 9.1      | Osnovni pojmovi . . . . .                                                                           | 347        |
| 9.2      | Metoda separacije varijabli . . . . .                                                               | 352        |
| 9.2.1    | Homogene diferencijalne jednadžbe . . . . .                                                         | 353        |
| 9.2.2    | Jednadžbe sa separiranim varijablama u primjenama .                                                 | 354        |
| 9.3      | Linearne diferencijalne jednadžbe . . . . .                                                         | 358        |
| 9.3.1    | Linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda . . . . .                                                 | 358        |
| 9.3.2    | Linearne diferencijalne jednadžbe višeg reda . . . . .                                              | 362        |
| 9.4      | Sustavi diferencijalnih jednadžbi . . . . .                                                         | 377        |

|                                                                   |            |
|-------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>10 Funkcije više varijabli</b>                                 | <b>385</b> |
| 10.1 Skalarne funkcije više varijabli . . . . .                   | 385        |
| 10.1.1 Parcijalne derivacije . . . . .                            | 393        |
| 10.1.2 Gradijent, krivulje u ravnini i plohe u prostoru . . . . . | 400        |
| 10.2 Ekstremi skalarnih funkcija više varijabli . . . . .         | 405        |
| 10.2.1 Lokalni ekstremi skalarnih funkcija . . . . .              | 406        |
| 10.2.2 Uvjetni ekstremi . . . . .                                 | 408        |
| 10.2.3 Metoda najmanjih kvadrata . . . . .                        | 415        |
| 10.3 Osnove vektorske analize . . . . .                           | 422        |
| 10.4 Integralni račun funkcija više varijabli . . . . .           | 435        |
| 10.4.1 Višestruki integrali . . . . .                             | 435        |
| 10.4.2 Krivulje i krivuljni integrali . . . . .                   | 444        |
| 10.5 Diferencijali . . . . .                                      | 452        |
| <b>11 Nizovi i redovi</b>                                         | <b>461</b> |
| 11.1 Nizovi . . . . .                                             | 461        |
| 11.2 Redovi . . . . .                                             | 472        |
| 11.3 Redovi funkcija . . . . .                                    | 478        |
| 11.3.1 Redovi potencija . . . . .                                 | 479        |
| 11.3.2 Trigonometrijski redovi . . . . .                          | 493        |
| 11.3.3 Uvod u Fourierovu transformaciju . . . . .                 | 504        |
| <b>Bibliografija</b>                                              | <b>509</b> |

# Predgovor

Zašto bi kemičar trebao znati dosta sadržaja iz matematike? To je pitanje koje si sigurno, možda ne u baš toj formulaciji, postavlja mnogo studenata kemije – a vjerojatno i dosta „gotovih” kemičara. Odgovor na to pitanje nije i ne može biti kratak.

Zasigurno nije nužno za dobrog kemičara da bude dobar, pa čak ni da bude slab matematičar. Načelno, nužna je samo sigurnost u aritmetici racionalnih brojeva i korištenju pojma funkcije i njenog grafa. No, ne samo da su neka područja kemije matematički zahtjevnija, primjerice fizikalna kemija, nego se i u mnogim drugim područjima može uz (razumno!) korištenje matematičkog jezika efikasnije uočiti zakonitosti. Ipak, osobno je mišljenje autora ovog udžbenika da je najvažniji razlog zašto student kemije mora učiti matematiku bitno jednostavniji: Znati matematiku znači znati jasno i precizno formulirati svoje tvrdnje, argumentirati te uočavati bitne sličnosti i razlike među pojmovima, konceptima i stvarnim objektima. A te sposobnosti su nužne za svakog prirodoslovca, dakle i kemičara.

Nažalost, da bi se savladao matematički jezik i stekao odgovarajući način razmišljanja potrebno je ponešto strpljenja. Matematika se uči prije svega redovnom vježbom i navikavanjem, ali kad se jednom nauči omogućava stvaranje novih svjetova i olakšava razumijevanje postojećih.

U tom smislu, preporučam svakom kemičaru u nastajanju (a i svakom drugom koji uzme ovaj tekst u ruke) da se koncentrira na pamćenje samo definicija, a zatim dopusti da njegov ili njezin mozak prati – bez opterećenja memoriranjem – kako se iz malog broja zapamćenih stvari može zaključiti neusporedivo puno više nego što je zapamćeno. A za onoga tko je naučio pravilno zaključivati, možemo reći da je i savladao osnove matematike.

Struktura teksta prilagođena je programu kolegija Matematika 1 i 2 kako se predaju na Kemijskom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. U prva dva poglavlja ponavlja se srednjoškolsko gradivo o brojevima i realnim funkcijama jedne varijable, s naglaskom na crtanje i interpretaciju njihovih grafova. Treće, četvrto i peto poglavlje posvećeno su standardnim sadržajima infinitezimalnog računa funkcija jedne varijable. Pritom se, za matematički

tekst nestandardno, deriviranje obrađuje prije limesa i neprekidnosti, na intuitivan način, kako bi studenti (koji paralelno slušaju i kolegije iz Fizike u kojima se intenzivno koristi deriviranje i integriranje) čim ranije mogli pratiti i to gradivo. Šesto, sedmo i osmo poglavlje bave se linearnom algebrom. U šestom poglavlju (koje je još uključeno u sadržaj Matematike 1) obrađuje se klasična algebra s geometrijskim vektorima te analitička geometrija prostora. Sedmo i osmo poglavlje, s kojima započinje gradivo Matematike 2, obrađuju sustave linearnih jednadžbi te opću teoriju matrica i vektorskih prostora. U devetom poglavlju obrađeni su osnovni tipovi običnih diferencijalnih jednadžbi. Deseto se poglavlje bavi infinitezimalnim računom skalarnih i vektorskih funkcija više varijabli, a u posljednjem, jedanaestom poglavlju se bavimo nizovima i redovima, s naglaskom na Taylorove i Fourierove redove i njihovu primjenu na aproksimaciju funkcija.

U Zagrebu, 2025.

F. M. B.

P. S. Matematika nisu formule. Formule u ovoj knjizi služe isključivo uvježbavanju standardne notacije i kao vrsta stenografije. Stoga svakom tko se priprema za ispit iz matematike preporučam da razmisli o smislu formula i pokuša ih izraziti riječima te za svaku definiciju ili formulu proba naći i poneki vlastiti primjer ili kontraprimjer.

# Poglavlje 1

## Uvod

### 1.1 Varijable i konstante

U primijenjenoj, a i u teorijskoj, matematici formule koje povezuju promatrane veličine često sadrže više oznaka nepreciziranog ili neistaknutog iznosa. Primjerice, jednačba stanja idealnog plina glasi

$$pV = nRT,$$

gdje je  $n$  množina,  $R$  je opća plinska konstanta,  $T$  je temperatura, a  $V$  volumen. Svakom fizičaru i kemičaru bit će jasno da je  $R$  „prava“ konstanta, tj. da uvijek ima istu vrijednost (i znat će njezinu vrijednost napamet ili naći ju u tablicama). No, ostale oznake ( $p$ ,  $V$ ,  $n$ ,  $T$ ) načelno ne predstavljaju konstantne veličine.

Razlikovanje konstanti (nepromjenjivih veličina) i varijabli (veličina promjenjivog iznosa) u pravilu imaju smisla tek u konkretnom kontekstu. Tako se recimo u jednoj situaciji mogu kao konstante uzeti  $n$  i  $T$ , dok će se ovisno o tlaku volumen mijenjati pa su  $p$  i  $V$  u tom kontekstu varijable. U nekom drugom slučaju ne mijenjaju se tlak i temperatura pa su  $p$  i  $T$  tada konstante, dok su onda  $n$  i  $V$  varijable.

Možemo reći da je u zadanom matematičkom modelu **konstanta** svaka veličina koja se u toku razmatranja tog modela neće mijenjati, dok je **varijabla** svaka veličina koju tokom razmatranja modela smatramo promjenjivom (to ne znači da se ona nužno i mijenja — bitna je načelna mogućnost njene promjene). Pritom razlikujemo **nezavisne i zavisne varijable**: Nezavisnim varijablama smatramo one koje su temeljne, čiji iznos ne ovisi o iznosu ikoje druge varijable, odnosno to su one koje načelno proizvoljno biramo unutar nekog raspona, a zavisnima one čiji iznos se mijenja uslijed promjene neke od nezavisnih varijabli — zavisne varijable ovise o nezavisnim.



**Primjer 1.** U jednažbi stanja idealnog plina možemo primjerice  $n$ ,  $T$  i  $V$  smatrati nezavisnim varijablama (mijenjat ćemo ih po želji), a  $p$  o njima ovisećom zavisnom varijablom (za svaki iznos  $n$ ,  $T$  i  $V$ , pripadni iznos  $p$  je jednoznačno određen).

Varijable se mogu dijeliti i po jednom drugom principu na **diskretne i kontinuirane varijable**: Ako varijabla, bar načelno, može poprimiti bilo koju realnu vrijednost unutar nekog raspona, zovemo ju kontinuiranom, a ako pak može poprimiti samo konačno mnogo vrijednosti ili pak samo vrijednosti koje možemo numerirati cijelim brojevima naziva se diskretnom.<sup>1</sup> Diskretne se varijable obično pojavljuju kad se radi o nabrajanju nekih vrijednosti, dok se mjerljive fizikalne veličine (jedan važni izuzetak je brojnost) obično uzimaju kao kontinuirane varijable.

**Primjer 2.** Tlak idealnog plina je kontinuirana varijabla: njegove vrijednosti načelno mogu biti svi pozitivni realni brojevi.

Kvantni energijski nivoi pak čine diskretnu varijablu jer se mogu numerirati prirodnim brojevima.



**Ponovimo bitno...** Matematičke i fizikalne veličine se u konkretnom kontekstu dijele na nepromjenjive (konstante) i promjenjive (varijable). Varijable mogu biti nezavisne i (o njima) zavisne. Varijable se također obzirom na raspon mogućih vrijednosti dijele na diskretne i kontinuirane. 🦆🦆🦆

## 1.2 Brojevi i mjerne jedinice

Kemičari i drugi prirodosnanstvenici brojeve koriste ponajviše za izražavanje rezultata mjerenja, tj. za navođenje iznosa fizikalnih veličina. Iznosi fizikalnih veličina *uvijek* su umnošci po jednog broja i mjerne jedinice. Primjerice, nije dovoljno reći da je koncentracija nečega 1,01; to je besmislen iznos ako se ne navede radi li se o, recimo, 1,01 mol L<sup>-1</sup> ili pak 1,01 mmol L<sup>-1</sup>. Ponekad se pojavljuju i „čisti” brojevi, poput logaritama kvocijenata nekih veličina (primjerice  $\ln \frac{c}{c^\ominus}$ ), no ako se dogovorimo da je njima mjerna jedinica jednaka **1** (što god to značilo), onda i njih možemo shvatiti kao umnožak broja i jedinice. Matematički gledano, mjerne jedinice možemo smatrati konstantama s kojima je dozvoljeno množenje i dijeljenje. Dok se oznake konstanti i varijabli pišu kurzivno, oznake jedinica pišu se uspravno. Primjerice,  $m$  je oznaka varijable (npr. mase), a  $m$  je oznaka jedinice (metar).

<sup>1</sup>Možda nematematičaru nevjerovatno, ali istinito: Ako varijabla može poprimiti bilo koju racionalnu vrijednost unutar nekog raspona, ona je diskretna jer racionalnih brojeva ima jednako mnogo kao cijelih.

Važno je zapamtiti: Dva iznosa ne mogu biti jednaka ako se ne podudaraju u fizikalnoj dimenziji. Drugim riječima, jednakost  $a = b$  povlači da se veličine  $a$  i  $b$  mogu izraziti u istoj mjernoj jedinici. Varijable i konstante koje nemaju istu fizikalnu dimenziju ne mogu se zbrajati ni oduzimati.

**Primjer 3.** Za čestice idealnog plina molarne mase  $M$  pri temperaturi  $T$  definira se srednja kvadratna brzina

$$v_{\text{srk}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Primijetimo da se stvarno radi o brzini: mjerna jedinica od  $R$  je  $\text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$  pa je jedinica od  $3RT$   $\text{J/mol}$ . Slijedi da je jedinica od  $3RT/M$  jednaka  $\text{J/kg}$ . Budući da je  $1 \text{ J}$  isto što i  $1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ , slijedi da je jedinica od  $3RT/M$  jednaka  $\text{m}^2/\text{s}^2$ , dakle je jedinica od  $v_{\text{srk}}$   $\text{m/s}$ .

Brojevi su matematički organizirani u skupove. **Skup** je jedan od temeljnih pojmova suvremene matematike. Pojam skupa se ne definira. Skup prepoznavamo po njegovim elementima, preciznije: dva skupa su jednaka točno ako<sup>2</sup> imaju iste elemente. Uobičajene oznake za skupove su velika slova engleske abecede, a za njihove elemente mala slova. Za neke česte izjave vezane za skupove postoje kratki simbolički zapisi. Tako se za „objekt  $x$  je element skupa  $S$ ” ( $x$  je u  $S$ ) kratko piše

$$x \in S,$$

a za „objekt  $x$  nije element skupa  $S$ ” ( $x$  nije u  $S$ ) pišemo

$$x \notin S.$$

Želimo li pak reći da se skup  $S$  sastoji od svih objekata  $x$  koji imaju neko svojstvo  $\heartsuit$  pišemo

$$S = \{x : \heartsuit\}.$$

Najčešće spominjani skupovi brojeva u matematici i njenim primjenama imaju istaknute oznake. To su redom:

1. **Skup prirodnih brojeva**  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ;

---

<sup>2</sup>Matematički izraz „točno ako” (alternativno: „ako i samo ako”) znači da dvije tvrdnje koje taj izraz povezuje mogu biti samo istovremeno istinite ili istovremeno lažne. Primjerice, „Student je položio Matematiku 1 ako i samo ako je iz nje dobio ocjenu dovoljan ili više”. Za razliku od toga, „ako” znači samo implikaciju: „Ako je student položio ispit iz Matematike 1, onda je položio pismeni dio ispita iz Matematike 1” (no, ako je položio pismeni dio ispita, ne znači da je položio i cijeli ispit, jer postoji i usmeni dio ispita).

2. **Skup prirodnih brojeva s nulom**  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ;
3. **Skup cijelih brojeva** je skup svih rezultata oduzimanja prirodnih brojeva:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ;
4. **Skup racionalnih brojeva** je skup svih rezultata dijeljenja cijelih brojeva, tj. skup svih brojeva koji se mogu zapisati kao razlomci:  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ ;
5. **Skup realnih brojeva**  $\mathbb{R}$  uz racionalne brojeve sadrži sve iracionalne brojeve i možemo ga shvatiti kao skup svih mogućih duljina dužina i njihovih suprotnih iznosa (ukoliko je zadana jedinična duljina);
6. **Skup kompleksnih brojeva**  $\mathbb{C}$ , o kojima ćemo više reći u odjeljku 1.4.

Osnovne računske operacije s brojevima su zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, potenciranje i korjenovanje. U svakom od gore navedenih skupova možemo zbrajati i množiti (zbrojimo li odnosno pomnožimo dva elementa skupa, rezultat je element *istog* skupa). Pritom nije bitan redoslijed (kaže se: zbrajanje i množenje su komutativne operacije) i, dok se držimo samo zbrajanja ili samo množenja, zagrade nemaju utjecaja (kaže se: zbrajanje i množenje su asocijativne operacije). Formalno: Operacija  $\diamond$  na skupu  $S$  je **komutativna** ako je  $x \diamond y = y \diamond x$  za sve  $x, y \in S$ , a **asocijativna** je ako  $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$  za sve  $x, y, z \in S$ .

Zbrajanje i množenje u svim gore navedenim skupovima (osim zbrajanja u  $\mathbb{N}$  jer on ne sadrži nulu) imaju još jedno lijepo svojstvo — imaju **neutralni element**:  $x + 0 = 0 + x = x$  i  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$  za sve brojeve  $x$ . Općenito, neutralni element  $\mathfrak{h}$  obzirom na neku operaciju  $\diamond$  je onaj za koji, kad tu operaciju primijenimo na njega i bilo koji element promatranog skupa  $S$ , ne mijenja taj element:  $x \diamond \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \diamond x = x$  za sve  $x \in S$ .

Oduzimanje možemo shvatiti kao suprotnu operaciju od zbrajanja, a dijeljenje od množenja. Oduzimanje dva broja daje element istog skupa u svim gornjim slučajevima osim prva dva skupa ( $5 - 7 = -2$  je rezultat oduzimanja dva prirodna broja, ali nije prirodan broj). Dijeljenje dva broja daje rezultat istog skupa samo u skupovima  $\mathbb{Q}$  bez nule i  $\mathbb{R}$  bez nule. Dijeljenje s nulom nije dozvoljeno (znate li zašto?).

Potenciranje se konstruira iz množenja i dijeljenja: Za prirodan broj  $n$  i bilo koji broj  $x$  je

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_n$$

( $x$  pomnožen sam sa sobom  $n - 1$  puta), a za  $x \neq 0$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Ako je  $x^n = y$ , kažemo da je  $x$   $n$ -ti korijen iz  $y$  i pišemo  $x = \sqrt[n]{y}$  ili

$$x = y^{\frac{1}{n}}.$$

Korjenovanje se dakle može shvatiti kao proširenje potenciranja na racionalne eksponente:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Ako želimo realan broj kao rezultat, ne može se računati paran korijen od negativnog broja (jer je umnožak bilo kojeg realnog broja sa samim sobom nenegativan broj).

Svaki realan broj može se zapisati u **decimalnom zapisu**, tj. zapisu u kojem su pojedine znamenke broja svojom pozicijom vezane za tu poziciju odgovarajuću potenciju broja 10 (vidi i primjer 483 u posljednjem poglavlju).

**Primjer 4.** Kad govorimo o broju 725 mislimo na to da je on jednak  $7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$  odnosno

$$725 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Kad pišemo 2,14 mislimo na

$$2,14 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}.$$

Vidimo: Decimalni zapis broja  $x$  kao

$$x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

znači da je

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + b_3 \cdot 10^{-3} + \dots$$

Neki realni brojevi, poput  $\frac{1}{16}$ , imaju konačan<sup>3</sup> decimalni zapis (0,0625) te je on potpuno egzaktni. Drugi brojevi, poput  $\frac{1}{3}$  ili  $\sqrt{2}$ , nemaju konačan decimalni zapis te svaki njihov zapis s konačno mnogo znamenki nužno sadrži i grešku:  $\frac{1}{3} \neq 0,3333$ ,  $\sqrt{2} \neq 1,41$ . Greška u takvom zapisu je reda veličine  $10^{-m-1}$  (odgovarajuće mjerne jedinice) gdje je  $m$  broj znamenki iza decimalnog zareza u odabranoj aproksimaciji. Tako je greška zapisa  $\frac{1}{3}$  mm kao 0,3333 mm reda veličine  $10^{-5}$  mm, a greška zapisa  $\sqrt{2}$  m s<sup>-1</sup> kao 1,41 m s<sup>-1</sup> je reda veličine  $10^{-3}$  m s<sup>-1</sup>. Ipak, svaki se realan broj  $x$  može proizvoljno

---

<sup>3</sup>Zapravo se i konačan decimalni zapis može shvatiti kao beskonačan, s beskonačno mnogo nula iza zadnje nenul znamenke:  $0,5 = 0,500000\dots = 0,5\bar{0}$ .

točno aproksimirati racionalnim: Za svaku zadanu maksimalnu grešku  $\varepsilon > 0$  postoji racionalan broj  $r$  takav da je  $|x - r| < \varepsilon$ .<sup>4</sup>

Ovdje svakako treba istaknuti da bi pod decimalnim zapisom broja trebalo podrazumijevati zapis sa *svim* znamenkama; tako shvaćen decimalni zapis uvijek je egzaktno jednak zapisanom broju. Čim na kraju odbacimo jednu ili više znamenaka, dobili smo aproksimaciju promatranog broja — broj koji nije jednak tom broju, ali mu je više ili manje blizu. Jednostavnosti radi ćemo pod konačnim decimalnim zapisom podrazumijevati svaki s konačno mnogo znamenki iza decimalnog zareza, bez obzira radi li se o egzaktnom broju (npr.  $0,5 = 1/2$ ) ili aproksimaciji ( $0,67 \approx 2/3$ ).

Kako rezultati mjerenja fizičkih veličina uvijek u sebi sadrže grešku (nije moguće mjerenjem dobiti egzaktni iznos), razumno je koristiti konačan decimalni zapis za brojevni dio njihove vrijednosti. Recimo, ako ste izmjerili duljinu nekog predmeta kao 387,8 mm i znate da je greška uređaja za mjerenje najviše 0,5 mm, možete pisati da je duljina tog predmeta  $387,8 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$ . No, greška mjerenja nije isto što i greška uzimanja kraćeg decimalnog zapisa!

Budući da je precizna greška mjerenja nepoznata, treba ju razumno procijeniti kako bi se izbjeglo navođenje znamenki koje su vjerojatno krive. Recimo, ako je pri nekom mjerenju duljine vjerojatno da rezultat 388,1 mm ne sadrži grešku veću od 1 mm, obzirom na izmjereni iznos, vjerojatnije je da je rezultat 388 mm, nego 389 mm. Možemo reći da je izmjerena duljina 388 mm i to na tri **značajne znamenke**. Da smo ju usprkos nesigurnosti u iznosu od 1 mm ipak zapisali kao 388,1 mm, rekli bismo da je u tom zapisu zadnja znamenka neznčajna. Neznčajne, tj. vjerojatno krive, znamenke se ne navode u rezultatima mjerenja i ne računa se s njima.

Kad vidimo zapisani rezultat mjerenja, kao značajne znamenke se broje sve nenul znamenke, nule između nenul znamenki te nule iza decimalnog zareza. Nule na početku nikad nisu značajne. Nule koje služe samo za specifikaciju mjesta decimalnog zareza ne broje se u značajne znamenke. Npr. broj 0,0000345 ima tri značajne znamenke, broj 0,003045 ih ima četiri, a 0,000034500 ih ima pet (kako zadnje dvije nule nisu nužne za položaj decimalnog zareza, one moraju biti značajne). Ako se radi o egzaktnom broju, smatramo da ima beskonačno mnogo značajnih znamenki.

Kako bi se izbjegle nedoumice, uobičajeno je koristiti **znanstvenu notaciju**: to je zapis realnog broja  $x$  u obliku

$$x = m \cdot 10^n$$

---

<sup>4</sup>Primijetimo da je za realne — a isto tako i kompleksne — brojeve apsolutna vrijednost njihove razlike jednaka njihovoj udaljenosti (razmaku) na brojevnom pravcu (odnosno u kompleksnoj ravnini). Apsolutna vrijednost broja je njegova udaljenost do nule.

gdje je broj  $m \in [1, 10)$  tzv. mantisa (zapisana sa svim značajnim znamenkama), a  $n \in \mathbb{Z}$  je eksponent (ili: karakteristika). Broj značajnih znamenki broja  $x$  jednak je broju značajnih znamenki mantise. Zahtjev da mantisa bude broj između 1 i 10 čini takav zapis jedinstvenim.

**Primjer 5.** Avogadrova konstanta iznosi  $60221400000000000000000 \text{ mol}^{-1}$ , što je na šest značajnih znamenki jednako

$$N_A = 6,02214 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Naboj elektrona iznosi  $0,000000000000000000000000160217 \text{ C}$ , što je

$$e = 1,60217 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Red veličine je eksponent broja 10 u znanostvenom zapisu. Primjerice, broj  $2,1 \cdot 10^{-5}$  je za 8 redova veličine manji od broja  $5,345 \cdot 10^3$  jer je  $10^3/10^{-5} = 10^8$ .

Kod računanja vrijede sljedeća pravila: Rezultat zbrajanja i oduzimanja treba imati isti broj znamenki iza decimalnog zareza kao najmanje točan početni podatak. Recimo,  $12,11 + 18,0 + 1,013 = 31,123$  se u rezultatu navodi kao 31,1. Kod množenja i dijeljenja ne broje se mjesta iza decimalnog zareza, nego broj značajnih znamenaka: broj značajnih znamenaka rezultata treba biti jednak broju značajnih znamenaka najmanje preciznog početnog podatka. Primjerice,  $4,56 \cdot 1,4 = 6,38$  se u rezultatu navodi kao 6,4. Pritom se, kako bi se izbjeglo pojavljivanje greške zbog samog računa, račun treba provoditi s više znamenki i tek konačni rezultat zaokružiti u skladu s gornjim pravilima.

Zaokruživanje brojeva se može provoditi na više načina. Standardni način je sljedeći: Ako želimo odbaciti nekoliko zadnjih znamenki i one počinju s 5,6,7,8 ili 9, zaokružujemo na gore (zadnja znamenka ispred njih se pri odbacivanju povećava za 1: 3,7898 na tri decimale zaokruženo je 3,790), a ako počinju s drugim znamenkama nadolje. Ako pak odbacujemo niz znamenaka 500...0, ponekad se koristi sljedeće pravilo: parna znamenka ispred se ne mijenja, neparna ide nagore (7,85 na 7,8, a 7,15 na 7,2).



**Ponovimo bitno...** Fizička veličina  $X$  ima neki stvarni iznos  $x$  jed. (gdje je jed. odabrana jedinica). Taj iznos u pravilu nije točno mjerljiv. Zato umjesto točnog (ali nepoznatog) broja  $x$  zapisujemo broj  $\tilde{x}$  koji je konačan decimalan broj koji sadrži samo značajne znamenke broja  $x$  u decimalnom zapisu. Broj  $\tilde{x}$  je aproksimacija broja  $x$ . Primjerice, dijagonala kvadrata stranice 1 cm ima točnu duljinu

$$d = \sqrt{2} \text{ cm} =$$

$$= 1,41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\,71875 \dots \text{ cm}$$

(tj.  $x = \sqrt{2} = 1,41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\,71875 \dots$  i tu se radi o egzaktnim jednakostima). Ravnalom možemo mjeriti točno do na 0,1 cm pa je  $\tilde{x} = 1,4$  odnosno<sup>5</sup>  $d = 1,4$  cm (s dvije značajne znamenke).



### 1.3 Kartezijev i opći pravokutni koordinatni sustav u ravnini

Često je korisno imati način prikazivanja uređenih parova brojeva, npr. parova podataka. **Uređeni par** dva (ne nužno različita) broja čine ta dva broja uz specifikaciju koji je prvi, a koji je drugi. Npr.  $(1, 2)$  je uređeni par različit od  $(2, 1)$ . Najlakši i najpregledniji način prikazivanja uređenih parova realnih brojeva je u pravokutnom koordinatnom sustavu koji se sastoji od dva brojeva, međusobno okomita, pravca koje nazivamo **koordinatnim osima**.

Brojevi pravci (osi) imaju označene pozicije za brojeve 0 i 1 (čime je određeno mjerilo na svakoj od osi), a osi se sijeku u zajedničkoj nuli (**ishodištu** koordinatnog sustava). Udaljenost između oznaka za 0 i 1 ćemo zvati jediničnom duljinom<sup>6</sup> za pojedinu os. Pritom jedinične duljine na osima ne moraju biti jednakog iznosa, a ako jesu, sustav zovemo **Kartezijevim koordinatnim sustavom**.

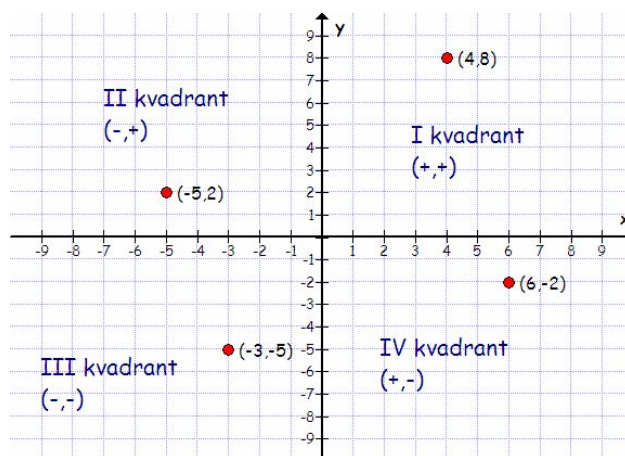
Kad unosimo par brojeva  $(x, y)$  u pravokutni koordinatni sustav, jedan broj (prvi broj  $x$  u paru) nanosi se na horizontalnu os koju zovemo os apscisa, a drugi ( $y$ ) na vertikalnu os koju zovemo os ordinata. Par  $(x, y)$  je onda prikazan točkom koja je sjecište okomica povučenih na obje osi u točkama koje odgovaraju nanesenim podacima. Brojevi  $x$  i  $y$  zovu se **koordinatama** točke  $(x, y)$  (apsisa i ordinata). Ukoliko u koordinatni sustav unosimo točke koje prikazuju parove vrijednosti nezavisne i pripadne joj vrijednosti zavisne varijable, standard je da se iznosi nezavisne varijable nanose kao apscise, a iznosi zavisne kao ordinate. Ishodište koordinatnog sustava po definiciji ima obje koordinate jednake 0. Točke na osi apscisa imaju ordinatu 0, a točke na osi ordinata imaju apscisu 0. Koordinatni sustav dijeli ravninu na četiri **kvadranta**; u prvom su točke kojima su obje koordinate pozitivne, u drugom one s negativnom apscisom i pozitivnom ordinatom, u trećem one kojima su obje koordinate negativne, a u četvrtom one s pozitivnom apscisom i negativnom ordinatom (vidi sliku 1.1).

<sup>5</sup>Ovdje bi korektnije bilo pisati  $d \approx 1,4$  cm, no to nije uobičajeno.

<sup>6</sup>Dužina je matematički objekt, skup točaka između dvije rubne točke. Duljina je fizikalna veličina, sa SI jedinicom metar (m).



### 1.3. KARTEZIJEV I OPĆI PRAVOKUTNI KOORDINATNI SUSTAV U RAVNINI 15



Slika 1.1: Pravokutni koordinatni sustav (slika izrađena programom Graph).

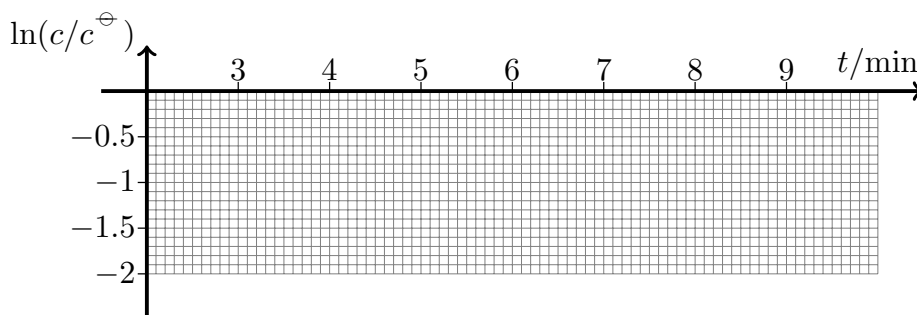
Svaka os se označava oznakom koja nam govori što brojevi na toj osi predstavljaju. U pravokutni koordinatni sustav u ravnini unose se isključivo parovi *brojeva*; dakle, ako u pravokutnom koordinatnom sustavu prikazujemo parove rezultata nekih mjerenja, na osima su iznosi tih mjerenja u odabranoj jedinici. Kako su dakle brojevi na osima čisti brojevi, oznake osi su uvijek oznake fizikalnih veličina (vrste podataka) podijeljene s odabranom mjernom jedinicom. Apstraktne oznake osi su  $x$  odnosno  $y$ , koje u konkretnim situacijama zamjenjujemo upravo opisanim konkretnim oznakama.

**Primjer 6.** *Ako na os apscisa nanosimo vrijeme u sekundama, oznaka osi je  $t/s$  jer su apscise  $x$  u tom slučaju jednake  $t/s$ .*

U praksi nacrtano sjecište osi često nije točka kojoj su obje koordinate 0, tj. nije ishodište koordinatnog sustava (obično su koordinate nacrtanog sjecišta malo manje od, za konkretnu situaciju, najmanje potrebne apscise odnosno ordinate). Stoga oprez: Ishodište je zajednička nula, dok nacrtano sjecište osi ne mora biti ishodište (odnosno, jedan ili oba nacrtana brojeva pravca zapravo nisu koordinatne osi).

**Napomena 1.** *Želite li dobro planirati prostor papira za skiciranje podataka, potrebno je prvo odrediti raspon  $[a, b]$  iznosa podataka koje nanosimo na apscisu i raspon  $[c, d]$  iznosa podataka koje nanosimo na ordinatu. Sjecište osi obično se, ali ne nužno, crta dolje lijevo. Za njega se uzima točka s koordinatama  $(a, c)$ , a najdesnija točka ima apscisu  $b$  i najgornja ordinatu  $d$  (te se tome prilagode jedinične dužine osi). Ukoliko je  $a < 0 < b$ , sjecište koordinatnih osi se stavlja u 0 na apscisi, odnosno ako je  $c < 0 < d$  u 0 na ordinati, umjesto da se crta u donjem lijevom kutu papira.*





Slika 1.2: Odabir raspona na koordinatnim osima (primjer 7).

**Primjer 7.** Recimo da želimo prikazivati vremena iz raspona  $2 \text{ min} \leq t \leq 10 \text{ min}$  i prirodne logaritme izmjerenih koncentracija reaktanta (podijeljenih sa standardnom koncentracijom  $c^{\oplus} = 1 \text{ mol L}^{-1}$ ) koji se nalaze u rasponu  $-2 \leq \ln \frac{c}{c^{\oplus}} \leq -0,5$ . Prikladan raspon apscisa bio bi malo veći od 2 do 10, a raspon ordinata malo veći od od  $-2$  do  $-0,5$ . Odgovarajuća oznaka osi apscisa je  $t/\text{s}$ , a osi ordinata  $\ln(c/c^{\oplus})$ . Takav koordinatni sustav prikazan je slikom 1.2. Primijetimo da ovdje nacrtano sjecište osi nije ishodište, nego točka  $(0, 2)$ .

**Zadatak 1.** Pri nekom eksperimentu dobivene su sljedeće vrijednosti tlaka para etanola pri različitim temperaturama:

| $t/^{\circ}\text{C}$ | $p/\text{torr}$ |
|----------------------|-----------------|
| 25                   | 55,900          |
| 30                   | 70,000          |
| 35                   | 93,800          |
| 40                   | 117,50          |
| 45                   | 154,10          |
| 50                   | 190,70          |
| 55                   | 241,90          |
| 60                   | 304,15          |
| 65                   | 377,90          |

Skicirajte podatke u pravokutnom koordinatnom sustavu tako da na apscisi budu temperature u kelvinima, a na ordinati tlak u torrima, te tako da prostor crtanja bude što bolje iskorišten, tj. tako da sadrži sve potrebne točke i što manje onih koje nisu relevantne.



**Ponovimo bitno...** Pravokutni koordinatni sustav se sastoji od dvije

međusobno okomite koordinatne osi (osi apscisa i osi ordinata) i služi za prikazivanje uređenih parova brojeva. U fizikalnom kontekstu brojevi na osima su iznosi fizikalnih veličina, te broj  $z$  na osi označenoj sa  $Z$ /jed. označava vrijednost  $z$  jed. fizikalne veličine  $Z$ . 

## 1.4 Kompleksni brojevi

Imaginarni brojevi prvi put su se pojavili u 16. stoljeću vezano za problem rješavanja kubne jednadžbe. Njihova upotreba raširila se tokom 19. stoljeća, nakon što je otkrivena njihova geometrijska interpretacija, što je omogućilo i prve primjene tih brojeva. Danas su najpoznatije primjene kompleksnih brojeva vezane za teoriju elektriciteta i magnetizma (koju bitno pojednostavljuju) te za kvantnu teoriju.

Kao matematička motivacija za uvođenje imaginarnih brojeva obično se uzimaju kvadratne jednadžbe s realnim koeficijentima. Poznato je da kvadratna jednadžba  $ax^2 + bx + c = 0$  nema realnih rješenja ako je njezina diskriminanta  $D = b^2 - 4ac$  negativna. Najjednostavniji primjer takve jednadžbe je

$$x^2 + 1 = 0.$$

Po dogovoru, jednadžba  $x^2 + 1 = 0$  (koja nema realnih rješenja jer bi to bio realan  $x$  koji kvadriran daje negativan broj  $-1$ ) ima dva rješenja u kompleksnim brojevima. Kao što su  $1$  i  $-1$  rješenja kvadratne jednadžbe  $x^2 - 1 = 0$ , definira se da su rješenja kvadratne jednadžbe  $x^2 + 1 = 0$  brojevi<sup>7</sup>  $i$  i  $-i$ . Broj  $i$  zove se **imaginarna jedinica**, ona je dakle jedan od dva moguća broja koji kvadrirani daju  $-1$ :

$$i^2 = -1.$$

Isto svojstvo ima i broj  $-i$ :  $(-i)^2 = (-i)(-i) = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$ .

**Definicija 1 (Kompleksni brojevi).** *Kompleksni brojevi su brojevi oblika*

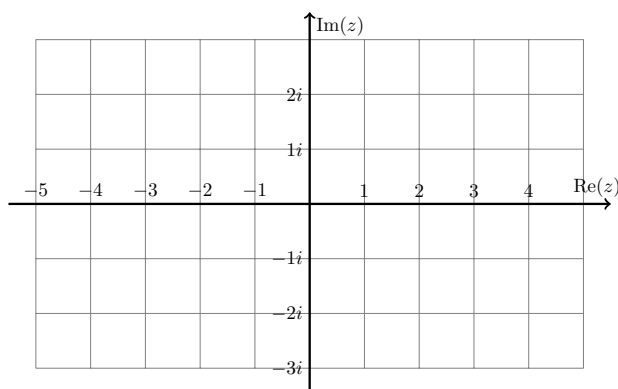
$$z = x + yi$$

s  $x, y \in \mathbb{R}$ . Broj  $x$  se zove **realnim dijelom**, a broj  $y$  **imaginarnim dijelom** kompleksnog broja  $z$  (dakle:  $i$  realni i imaginarni dio kompleksnog broja su realni brojevi).

Skup svih kompleksnih brojeva označavamo s  $\mathbb{C}$ . Skup  $\mathbb{R}$  je podskup od  $\mathbb{C}$  jer svaki realni broj  $x$  možemo shvatiti kao kompleksni broj  $x + 0 \cdot i$ . Brojeve kojima je realni dio nula zovemo čisto imaginarnima.

---

<sup>7</sup>Oznaka  $i$  za imaginarnu jedinicu potječe iz 18. stoljeća, kad ju je uveo švicarski matematičar Leonhard Euler.



Slika 1.3: Kompleksna ravnina.

**Napomena 2.** Ako je diskriminanta  $D = b^2 - 4ac$  kvadratne jednadžbe  $ax^2 + bx + c = 0$  negativna, realni dio njenih kompleksnih rješenja je  $-\frac{b}{2a}$ , a imaginarni je  $\pm \frac{\sqrt{-D}}{2a}$ . Primjerice, rješenja kvadratne jednadžbe  $x^2 - 4x + 5 = 0$  su  $x_{1,2} = 2 \pm i$ .

**Primjer 8.** Odredimo rješenja jednadžbi  $4x^2 + 12x + 25 = 0$  i  $z^2 + 36 = 0$  u skupu kompleksnih brojeva:

Za prvu jednadžbu imamo

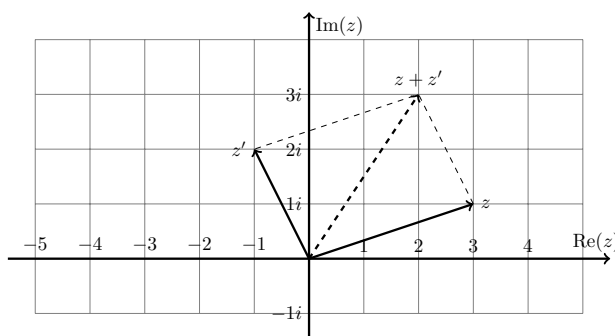
$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 400}}{8} = \frac{-12 \pm \sqrt{-1 \cdot 256}}{8} = \\ &= \frac{-12 \pm i\sqrt{256}}{8} = \frac{-12 \pm 16i}{8} = -\frac{3}{2} \pm 2i. \end{aligned}$$

Druga je pak oblika  $z^2 = -36$  pa su joj rješenja  $\pm 6i$ .

Svaki kompleksan broj  $z = x + yi$  možemo poistovjetiti s točkom  $(x, y)$  u koordinatnoj ravnini (i obrnuto: svakoj točki u koordinatnoj ravnini odgovara kompleksan broj), uz pravokutni (u pravilu Kartezijev) koordinatni sustav. Pritom uzimamo da apscise predstavljaju realne, a ordinate imaginarnu dijelove pa se koordinatne osi u ovom slučaju zovu **realna i imaginarna os**. Na realnoj osi se nalaze svi realni brojevi (dakle, kompleksni brojevi kojima je imaginarni dio 0), a na imaginarnoj svi čisto imaginarni (tj. kompleksni brojevi kojima je realni dio 0). Prikaz kompleksne ravnine vidljiv je na slici 1.3.



**Ponovimo bitno...** Kompleksni brojevi su brojevi oblika  $z = x + yi$ , gdje su  $x$  i  $y$  realni brojevi (realni i imaginarni dio kompleksnog broja



Slika 1.4: Zbrajanje kompleksnih brojeva.

$z$ ), a  $i$  je imaginarna jedinica, tj. jedan od dva broja sa svojstvom  $i^2 = -1$ . Kompleksan broj  $x + yi$  prikazujemo kao točku  $(x, y)$  u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. 🐤🐤🐤

### 1.4.1 Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva

Dva kompleksna broja zbrajamo (oduzimamo) tako da im zbrojimo (oduzmemo) realne odnosno imaginarne dijelove:

$$(x + yi) \pm (x' + y'i) = (x \pm x') + (y \pm y')i.$$

#### Primjer 9.

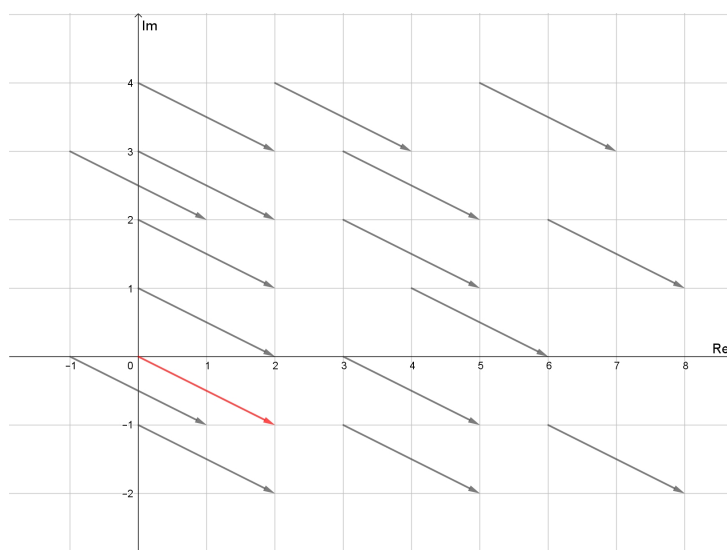
$$(3 + i) + (2i - 1) = 2 + 3i.$$

Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva imaju sva uobičajena svojstva tih operacija (komutativnost, asocijativnost, broj nula kao neutralni element, ...). U kompleksnoj ravnini zbroj odnosno razlika dva kompleksna broja  $z$  i  $z'$  nalazi se na kraju radij-vektora<sup>8</sup> koji se dobije zbrajanjem odnosno oduzimanjem radij-vektora koji pripadaju brojevima  $z$  i  $z'$ : Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva geometrijski se interpretiraju kao zbrajanje i oduzimanje radij-vektora u kompleksnoj ravnini (usporedi odjeljak 6.1).

Pribrajanje fiksiranog broja  $z_0$  svim kompleksnim brojevima, dakle kompleksnu funkciju<sup>9</sup> zadanu s  $f(z) = z + z_0$ , možemo shvatiti kao translaciju ravnine za radij-vektor od  $z_0$  (vidi sliku 1.5).

<sup>8</sup>Radij-vektor je orijentirana dužina koja spaja ishodište s promatranom točkom.

<sup>9</sup>Kompleksne funkcije imaju mnoga „čudna” svojstva u odnosu na realne, no za osnovno baratanje s njima kakvo je potrebno primjerice u temeljnim kolegijima iz fizikalne kemije dovoljno je razumijevanje da se radi o funkcijama koje nekim objektima, recimo točkama prostora, pridružuju kompleksne brojeve.



Slika 1.5: Pribrajanje kompleksnog broja kao translacija ravnine (krajevi orijentiranih dužina predstavljaju rezultate pribrajanja broja  $z = 2 - i$  kompleksnim brojevima koji su njihovi početci, slika izrađena programom Geogebra).

**Suprotni broj** od  $z = x + yi$  je  $-z = -x - yi$ . Određivanje suprotnog broja, dakle kompleksna funkcija  $f(z) = -z$ , u tom je kontekstu (vidi sliku 1.6) centralna simetrija s obzirom na ishodište (tj., budući da se radi o preslikavanju ravnine, rotacija reda 2, tj. rotacija za  $180^\circ$  oko ishodišta).

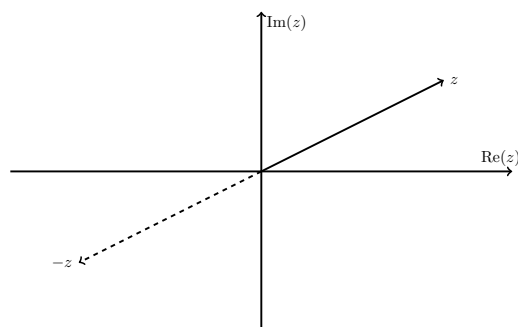


**Ponovimo bitno...** Kompleksne brojeve zbrajamo tako da im zbrojimo realne odnosno kompleksne dijelove. U kompleksnoj ravnini zbrajanje dva kompleksna broja je zbrajanje njihovih radij-vektora po pravilu paralelograma. Funkcija  $f(z) = z + z_0$  koja svim kompleksnim brojevima dodaje isti kompleksan broj  $z_0$  može se interpretirati kao translacija kompleksne ravnine za radij-vektor od  $z_0$ , a funkcija  $f(z) = -z$  koja svakom kompleksnom broju pridružuje njemu suprotni je centralna simetrija odnosno rotacija reda 2 obzirom na ishodište. 🦆🦆🦆

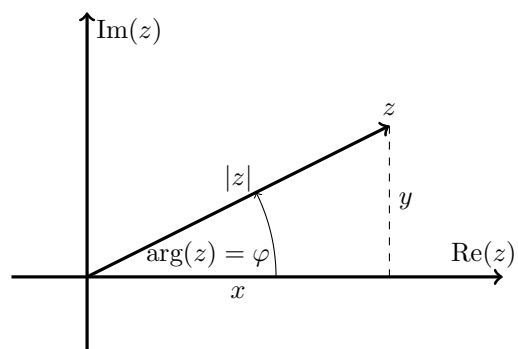
### 1.4.2 Apsolutna vrijednost kompleksnog broja i kompleksno konjugiranje

**Apsolutna vrijednost** kompleksnog broja  $z$  definira se kao udaljenost točke koja predstavlja broj  $z$  do ishodišta (slika 1.7). Ako je  $z = x + iy$ , onda je

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Slika 1.6: Suprotni broj kao centralna simetrija ravnine (rotacija reda 2).



Slika 1.7: Apsolutna vrijednost i argument kompleksnog broja.

(biramo nenegativni kvadratni korijen) Kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti 1 nalaze se na jediničnoj kružnici oko ishodišta, tj. u kompleksnoj ravnini jedinična kružnica oko ishodišta ima jednadžbu  $|z| = 1$ .

**Primjer 10.** Ako je  $z = 3 + 4i$ , onda je  $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .

**Napomena 3.** Za zbrajanje kompleksnih brojeva vrijedi tzv. *nejednakost trokuta*:

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

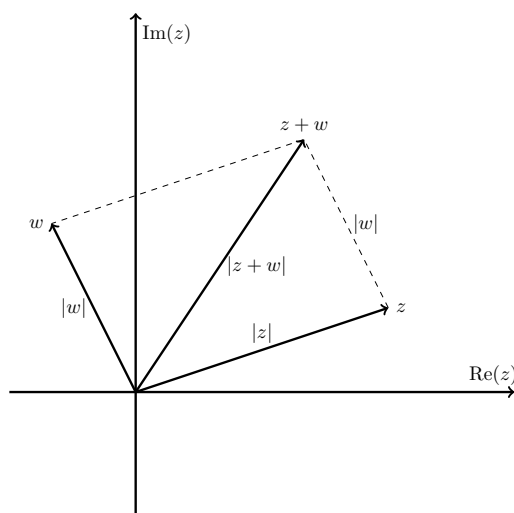
Nju je lako dokazati pomoću slike 1.8.

Svakom kompleksnom broju  $z = x + iy$  pridružen je njegov **kompleksno konjugirani broj**

$$\bar{z} = x - iy$$

(dakle, promijeni se predznak imaginarnog dijela). Vrijedi

$$\overline{\bar{z}} = z.$$



Slika 1.8: Nejednakost trokuta.

Par kompleksnih rješenja kvadratne jednadžbe je uvijek par kompleksno konjugiranih brojeva (vidi primjer 2). U kompleksnoj ravnini kompleksno konjugirani broj od  $z$  je njegova osno simetrična slika obzirom na realnu os, odnosno kompleksna funkcija  $f(z) = \bar{z}$  predstavlja zrcaljenje (osnu simetriju) kompleksne ravnine s obzirom na realnu os (vidi sliku 1.9).

**Primjer 11.** Ako je  $z = 5 - 9i$ , onda je  $\bar{z} = 5 + 9i$ .

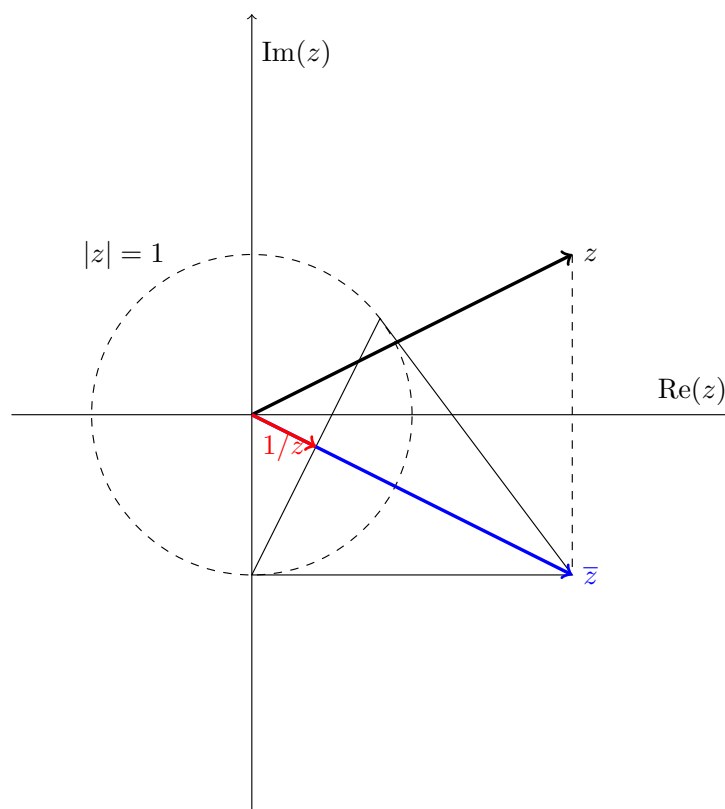
Česta oznaka za  $\bar{z}$  je i  $z^*$ , iako se oznaka sa zvjezdicom više koristi u kontekstu kompleksnih funkcija: Ako je dana kompleksna funkcija  $\psi : D \rightarrow \mathbb{C}$ , onda se s  $\psi^*$  označava kompleksna funkcija definirana s  $\psi^*(z) = \overline{\psi(z)}$ .

**Primjer 12.** Ako je  $\psi(z) = \bar{z}$ , onda je  $\psi^*(z) = \overline{\psi(z)} = \bar{\bar{z}} = z$ .



**Ponovimo bitno...** Apsolutna vrijednost kompleksnog broja je njegova udaljenost do ishodišta u kompleksnoj ravnini, tj. pozitivni kvadratni korijen zbroja kvadrata realnog i imaginarnog dijela broja. Kompleksno konjugirani broj danog kompleksnog broja dobije se promjenom predznaka njegova imaginarnog dijela i on je osno simetričan polaznom broju s obzirom na realnu os.





Slika 1.9: Kompleksno konjugiranje i recipročni kompleksan broj.



### 1.4.3 Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva

Množenje dva kompleksna broja  $z = x + yi$  i  $z' = x' + y'i$  definirano je kao množenje binoma, što se svodi na formulu

$$zz' = (xx' - yy') + (xy' + yx')i.$$

#### Primjer 13.

$$(2 + 3i) \cdot (6 - i) = 2 \cdot 6 + 3i \cdot 6 - 2i - 3 \cdot i^2 = 12 + 18i - 2i + 3 = 15 + 16i.$$

Vrijedi sljedeća korisna jednakost:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Dokažimo ju: Ako je  $z = x + yi$ , onda je  $z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + xyi - xyi - y^2i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ .

Posebno,  $\psi^*\psi$  je za kompleksne funkcije isto što i  $|\psi|^2$ , što objašnjava korištenja izraza „kvadrat valne funkcije”<sup>10</sup> kad govorimo o funkciji oblika  $\psi^*\psi$  u kvantnoj fizici i kemiji.

**Primjer 14.** *Budući je  $-1 = i^2$ , dijeljenjem s  $-i$  dobivamo  $\frac{1}{i} = -i$ .*

**Recipročni broj** broja  $z$  je broj

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Točka koja predstavlja  $\frac{1}{z}$  u kompleksnoj ravni nalazi se na spojnici ishodišta i  $\bar{z}$ , zato što je  $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$  isto što i  $\bar{z}$  pomnožen s pozitivnim realnim brojem  $\frac{1}{|z|^2}$ , što je ilustrirano na slici 1.9.<sup>11</sup>

**Primjer 15.** *Za  $z = 3 - 4i$  imamo*

$$\frac{1}{z} = \frac{3 + 4i}{3^2 + 4^2} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva je definirano kao množenje s recipročnim brojem:

$$\frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'} = \frac{z \cdot \bar{z'}}{|z'|^2}.$$

<sup>10</sup>Naravno, pravilnije bi bilo reći: kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije.

<sup>11</sup>Konstruktivski,  $\frac{1}{z}$  je sjecište radij-vektora od  $\bar{z}$  s okomicom povučenom na njega iz ishodišta tangente povučene iz  $\bar{z}$  na jediničnu kružnicu.

**Primjer 16.**

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{1-1+i+i}{2} = i.$$



**Ponovimo bitno...** Dva kompleksna broja množimo kao što množimo bilo koja dva dvočlana algebarska izraza, uzimajući u obzir da je  $i^2 = -1$ . Produkt kompleksnog broja  $z$  i njemu konjugiranog je kvadrat apsolutne vrijednosti od  $z$ . Dva kompleksna broja dijelimo tako da odgovarajući razlomak proširimo kompleksno konjugiranim nazivnikom. 🦆🦆🦆

**1.4.4 Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja**

**Argument kompleksnog broja**  $z$  je kut  $\phi = \arg(z)$  u rasponu  $\langle -\pi, \pi \rangle$  (alternativno u rasponu  $[0, 2\pi)$ ) kojeg radij-vektor od  $z$  zatvara s pozitivnim dijelom realnom osi (slika 1.9).

**Primjer 17.** Argument svakog pozitivnog realnog broja je 0, argument svakog negativnog realnog broja je  $\pi$ , argument svakog čisto imaginarnog broja s pozitivnim imaginarnim dijelom je  $\frac{\pi}{2}$ , a argument čisto imaginarnog broja s negativnim imaginarnim dijelom je  $-\frac{\pi}{2}$  (alternativno  $\frac{3\pi}{2}$ ). Nula nema jednoznačno definiran argument.

Sa slike 1.9 lako vidimo da je  $x = |z| \cos \phi$  i  $y = |z| \sin \phi$ , odnosno da se  $\phi$  može odrediti kao jedan od dva moguća kuta u rasponu  $\langle -\pi, \pi \rangle$  (alternativno u rasponu  $[0, 2\pi)$ ) takva da je  $\tan \phi = \frac{y}{x}$ . Uočimo: Za svaki argument  $\phi$  je  $|\cos \phi + i \sin \phi| = 1$ . Trigonometrijski oblik kompleksnog broja je prikaz broja  $z = x + yi$  u obliku

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi).$$

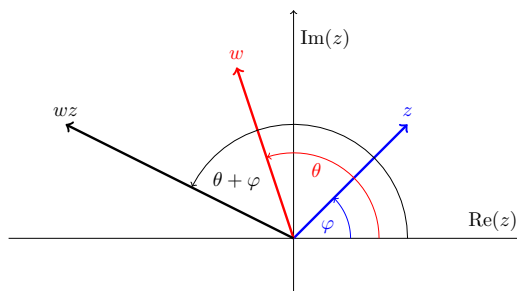
**Primjer 18.** Ako je  $z = -2 + 7i$ , onda je  $|z| = \sqrt{53}$  i  $\theta = \pi - \arctg \frac{7}{2}$  (zašto ne  $\arctg \frac{7}{2}$ ?), te je  $z = \sqrt{53} \cdot (-\cos \arctg \frac{7}{2} + i \sin \arctg \frac{7}{2})$ .

$$S \text{ druge strane, } z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

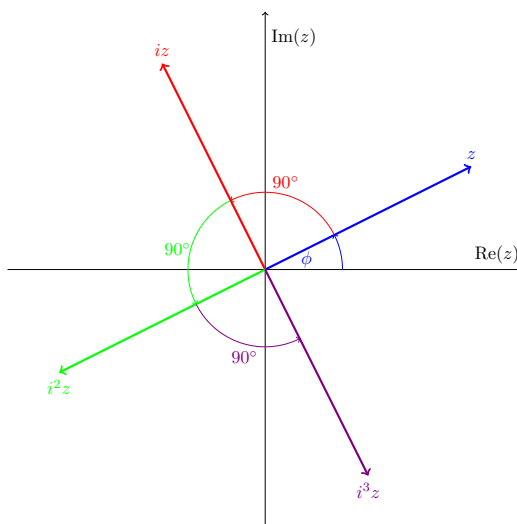
Trigonometrijski prikaz bitno olakšava množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva. Korištenjem adicijskih formula za sinus i kosinus lako je provjeriti da za  $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$  i  $w = |w|(\cos \theta + i \sin \theta)$  vrijede formule

$$zw = |z||w|(\cos(\phi + \theta) + i \sin(\phi + \theta)),$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\phi - \theta) + i \sin(\phi - \theta)),$$



Slika 1.10: Množenje kompleksnih brojeva.

Slika 1.11: Množenje s  $i$  je rotacija za pravi kut.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos \phi - i \sin \phi).$$

Iz posljednje formule se vidi da je argument recipročnog broja  $\frac{1}{z}$  suprotan argumentu od  $z$  (odnosno, jednak je njegovoj razlici do  $2\pi$ ), kao što je i argument od  $\bar{z}$ . To je objašnjenje zašto su  $1/z$  i  $\bar{z}$  na istom pravcu kroz  $O$  (slika 1.9).

### Primjer 19.

$$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}.$$

Sad se vidi da se množenje, geometrijski gledano, svodi na kombinaciju zbrajanja argumenata (slika 1.10) i množenja apsolutnih vrijednosti kompleksnih brojeva: Radij-vektor koji predstavlja produkt je po smjeru zarotirani radij-vektor jednog broja za kut jednak argumentu drugog, a po duljini je jednak produktu apsolutnih vrijednosti množenih brojeva. Specijalno, množenje kompleksnog broja s nekim brojem kojem je apsolutna vrijednost jednaka 1 (funkcija  $f(z) = z_0 z$  gdje je  $|z_0| = 1$ ) interpretira se kao rotacija ravnine oko ishodišta za argument tog drugog broja  $z_0$  (slika 1.11).



**Ponovimo bitno...** Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja je njegov prikaz u obliku  $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$ , gdje je  $\phi$  argument broja  $z$  tj. kut kojeg radij-vektor od  $z$  zatvara s pozitivnim dijelom realne osi. Trigonometrijski prikaz olakšava množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva: umnožak odnosno kvocijent dva kompleksna broja dana svojim trigonometrijskim prikazima je kompleksan broj čija apsolutna vrijednost je umnožak odnosno kvocijent apsolutnih vrijednosti brojeva koje množimo odnosno dijelimo, a čiji argument je zbroj odnosno razlika argumenata brojeva koje množimo odnosno dijelimo. Funkcija definirana s  $f(z) = z_0 z$  gdje je  $|z_0| = 1$ , je rotacija ravnine za  $\arg z_0$ . 

### 1.4.5 Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva

Promotrimo potencije broja  $i$ . Imamo:

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1,$$

$$i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1, \dots$$

Dakle, potenciranje broja  $i$  na višekratnik od 4 daje 1 i potencije se ciklički ponavljaju nakon svakog višekratnika od 4. Nadalje, sve potencije od  $i$  nalaze se na jediničnoj kružnici raspoređene kao vrhovi kvadrata (slika 1.12).

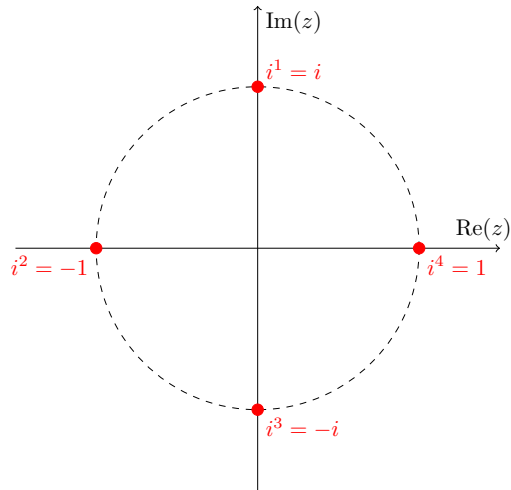
Za potenciranje kompleksnih brojeva na cjelobrojne potencije  $n$  se koristi **de Moivre-ova formula**

$$z^n = |z|^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)).$$

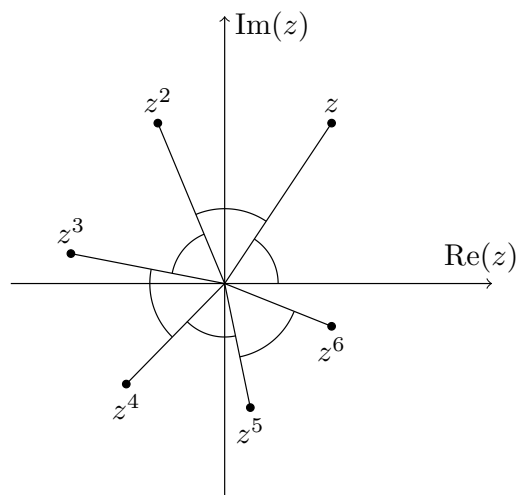
Potencije od  $z$  se prema toj formuli dobivaju tako da potenciramo njegovu apsolutnu vrijednost, odnosno uvišerostručujemo njegov argument, što je ilustrirano slikom 1.13.

#### Primjer 20.

$$(1 + i)^4 = (\sqrt{2})^4 \left( \cos \left( 4 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( 4 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) = 4(\cos \pi + i \sin \pi) = -4.$$



Slika 1.12: Potencije broja  $i$  su  $\pm 1$  i  $\pm i$ .



Slika 1.13: Potencije kompleksnog broja (kojem je apsolutna vrijednost manja od 1).

Korjenovanje kompleksnih brojeva je kompliciranije jer svaki kompleksan broj  $z$  ima  $n$   $n$ -tih korijena. U to je lako uvjeriti se krenemo li od sljedeće definicije:

**Definicija 2** ( *$n$ -ti korijen kompleksnog broja*). Za dani kompleksan broj  $z$ , njegov  $n$ -ti korijen je svaki kompleksan broj  $w$  sa svojstvom  $w^n = z$ .

**Napomena 4.** Zamjenom riječi „kompleksan” s „realan” u gornjoj definiciji dobijemo definiciju korijena realnih brojeva. Primjerice, realan broj je kvadratni (drugi) korijen realnog broja 4 ako kvadriran daje 4. Kako samo 2 i  $-2$  kvadrirani daju 4, slijedi da su 2 i  $-2$  (svi) realni kvadratni korijeni od 4. Uočite važnost promatranog „ambijenta”: u kontekstu realnih brojeva, kao korijeni nas zanimaju samo realni brojevi, a u kontekstu kompleksnih kompleksni.

**Primjer 21.** Budući da kompleksni brojevi 1,  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$  na četvrtu potenciju svi daju 1, vidimo da su svi oni kompleksni četvrti korijeni broja 1 (odnosno, slika 1.12 prikazuje sva četiri kompleksna  $\sqrt[4]{1}$ ).

**Primjer 22.** Uzmimo  $z = 8 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ . Recimo da nas zanima(ju) njegov(i) treći korijen(i), tj. kompleksni brojevi  $w = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  sa svojstvom  $w^3 = z$ . De Moivreova formula povlači da mora biti zadovoljen uvjet

$$w^3 = |w|^3(\cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi)) = 8 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = z.$$

Budući da su apsolutne vrijednosti kompleksnih brojeva u zagradama jednake 1, prvo zaključujemo da mora vrijediti  $|w|^3 = 8$ , gdje  $|w|$  mora biti nenegativan realan broj. On je stoga jednoznažno određen:  $|w| = 2$ .

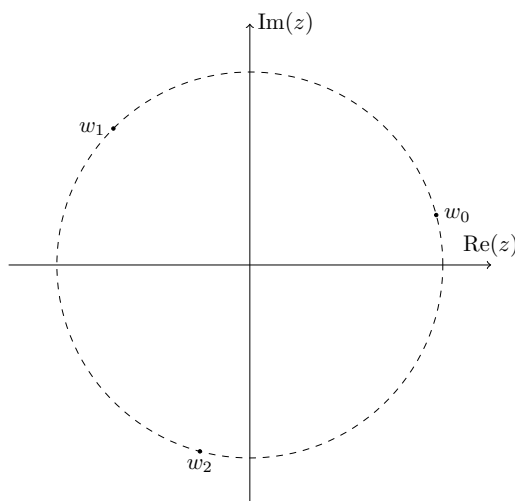
Dalje mora vrijediti  $\cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi) = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ . Jedan kut  $\varphi$  koji tu jednakost sigurno zadovoljava je  $\varphi = \frac{\pi}{12}$ . No, kosinus i sinus su periodične funkcije temeljnog perioda  $2\pi$ , te stoga svaki kut koji zadovoljava  $3\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , zadovoljava traženi uvjet. Slijedi da svi argumenti

$$\varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{1+8k}{12}\pi$$

zadovoljavaju tražene uvjete, tj. svi kompleksni brojevi oblika

$$w_k = 2 \left( \cos \left( \frac{1+8k}{12}\pi \right) + i \sin \left( \frac{1+8k}{12}\pi \right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

su treći korijeni od  $z$ .



Slika 1.14: Treći korijeni od  $z = 8 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ .

Na kraju, opet iz periodičnosti sinusa i kosinusa vidimo da su samo tri od beskonačno mnogo brojeva  $w_k$  različita, a to su  $w_0$ ,  $w_1$  i  $w_2$ . Stoga  $z$  ima tri kompleksna treća korijena:

$$\begin{aligned} w_0 &= 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) \right), \\ w_1 &= 2 \left( \cos \left( \frac{9\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{9\pi}{12} \right) \right), \\ w_2 &= 2 \left( \cos \left( \frac{17\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{17\pi}{12} \right) \right). \end{aligned}$$

Predočavanjem tih triju brojeva u kompleksnoj ravnini (odnosno zato jer je razlika argumenata između po dva susjedna jednaka  $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ ), vidimo da se radi o vrhovima pravilnog trokuta na kružnici polumjera 2 oko  $O$  (slika 1.14).

Provođenjem slijeda zaključivanja kao u gornjem primjeru, ali za proizvoljne  $z \in \mathbb{C}$  i  $n \in \mathbb{N}$ , zaključujemo: Svaki kompleksan broj  $z \neq 0$  ima  $n$  kompleksnih  $n$ -tih korijena određenih formulom

$$\sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right),$$

za  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Geometrijski, ti se korijeni nalaze u vrhovima pravilnog  $n$ -terokuta na kružnici radijusa  $\sqrt[n]{|z|}$  (tu gledamo nenegativni korijen u

smislu njegovog značenja u realnim brojevima) kojoj je središte u ishodištu, s tim da prvi od njih ima argument  $\frac{\phi}{n}$ , a svaki sljedeći za  $\frac{2\pi}{n}$  veći (sve dok se ne prijeđe jedan puni krug).

**Primjer 23.** Treći korijeni iz  $i$  imaju apsolutnu vrijednost  $\sqrt[3]{1} = 1$ , a prvi po redu ima argument  $\frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}$ . Svaki sljedeći ima argument veći za  $\frac{2\pi}{3}$  te su treći korijeni od  $i$  redom

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\ \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\ \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} &= -i.\end{aligned}$$



**Ponovimo bitno...** Potencije  $z^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) kompleksnog broja  $z$  računaju se po de Moivreovoj formuli: apsolutna vrijednost od  $z^n$  je  $n$ -ta potencija apsolutne vrijednosti od  $z$ , a argument od  $z^n$  je  $n$ -terostruki argument od  $z$ . Svaki kompleksan broj  $z$  ima  $n$   $n$ -tih korijena: to su kompleksni brojevi kojima je apsolutna vrijednost  $\sqrt[n]{|z|}$ , a argumenti su im redom  $\frac{\phi+2k\pi}{n}$  za  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , gdje je  $\phi$  argument od  $z$  (tj. to su vrhovi pravilnog  $n$ -terokuta upisanog u kružnicu polumjera  $\sqrt[n]{|z|}$ , od kojih prvi vrh ima argument  $\frac{\phi}{n}$ ). 



### 1.4.6 Eulerova formula

**Eulerova formula** daje vezu trigonometrijskih funkcija (vidi odjeljak 2.6.5) s eksponencijalnim (vidi odjeljak 2.6.1):

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Stoga je svaki kompleksan broj  $z$  moguće zapisati u eksponencijalnom obliku kao

$$z = |z|e^{i\phi}.$$

Eksponencijalna funkcija u Eulerovoj formuli je eksponencijalna funkcija s bazom  $e$  proširena na kompleksne brojeve. Ona ima mnoga specijalna svojstva, no osnovne formule za baratanje eksponencijalnim izrazima vrijede kao



u realnom slučaju. Iz Eulerove formule vidimo da je kompleksna eksponencijalna funkcija periodična s temeljnim periodom  $2\pi$ :

$$e^{i(\phi+2\pi)} = e^{i\phi+2\pi i} = e^{i\phi} \cdot e^{2\pi i} = e^{i\phi}(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^{i\phi}.$$

Specijalno, vrijedi

$$e^{i\pi} = -1,$$

$$e^{i\pi/2} = i.$$

**Primjer 24.** Zapišimo kompleksne brojeve  $4 + 4i$  te  $-1$  u eksponencijalnom obliku.

Prikažemo li  $4 + 4i$  u kompleksnoj ravnini kao točku s koordinatama  $(4, 4)$ , očigledno je da je argument tog broja jednak  $\frac{\pi}{4}$ , a apsolutna vrijednost je  $|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$ , dakle je  $4 + 4i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ .

Slično, broju  $-1$  odgovara točka s koordinatama  $(-1, 0)$ , koja je očigledno od ishodišta udaljena za  $|z| = 1$ , a kut u odnosu na pozitivni smjer realne osi je  $\pi$ , te je  $-1 = e^{i\pi}$ .

**Primjer 25.** Zapišimo kompleksne brojeve  $3e^{i\pi/2}$  i  $\pi e^{i\pi/3}$  u obliku  $x + yi$ .

Prvi broj ima argument  $\frac{\pi}{2}$ , dakle je čisto imaginaran s pozitivnim imaginarnim dijelom. Budući da mu je apsolutna vrijednost 3, slijedi da je to  $3i$ .

Drugi broj je najbolje prikazati točkom koja je na kružnici polumjera  $\pi$  oko ishodišta (jer mu je apsolutna vrijednost  $\pi$ ), a čija spojnica s ishodištem je pod kutem  $\frac{\pi}{3}$  u odnosu na pozitivni dio realne osi. Ucertavanjem okomica iz te točke na koordinatne osi dobivamo pravokutni trokut iz koga elementarnom trigonometrijom dobivamo  $x = \pi \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$  i  $y = \pi \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ , tj.  $\pi e^{i\pi/3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{2}i$ .

Općenito vrijedi:

$$\bar{z} = |z|e^{-i\phi}.$$

Naime, budući da kompleksno konjugiranje u kompleksnoj ravnini možemo shvatiti kao zrcaljenje s obzirom na realnu os, očigledno se ne mijenja apsolutna vrijednost broja, a argument postaje suprotan polaznom (alternativno, jednak  $2\pi$  minus polazni), te je

$$\overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi} = re^{i(2\pi-\varphi)}.$$

Iz Eulerove formule dobiju se još preglednija pravila računa s kompleksnim brojevima:

$$zw = |z||w|e^{i(\phi+\theta)},$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} e^{-i\phi},$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\phi-\theta)},$$

te de Moivreova formula

$$z^n = |z|^n e^{in\phi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Zbrojimo li i oduzmemo  $e^{i\phi}$  i  $e^{-i\phi}$  dobit ćemo i sljedeće dvije važne formule:

$$\operatorname{Re}(e^{i\phi}) = \cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2},$$

$$\operatorname{Im}(e^{i\phi}) = \sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}.$$

#### Primjer 26.

$$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2} \approx 0,208,$$

*tj.  $i^i$  je realan broj! Uočimo:  $e^{i\phi} = e^{i\phi+2k\pi}$ . Stoga je gore navedena samo jedna od beskonačno mnogo različitih vrijednosti za  $i^i$  (no i ostale su sve realne).*

#### Primjer 27. Gdje se u kompleksnoj ravnini nalaze peti korijeni broja

$$z = 32e^{i \cdot 3\pi/2}?$$

*Peti korijeni svakog kompleksnog broja svi leže na kružnici polumjera jednako (realnom) petom korijenu njegove apsolutne vrijednost, dakle u našem slučaju leže na kružnici polumjera  $\sqrt[5]{32} = 2$  oko ishodišta. Ti korijeni moraju biti raspoređeni kao vrhovi pravilnog peterokuta na toj kružnici zbog periodičnosti eksponencijalne funkcije s bazom  $e$  u kompleksnim brojevima (posljedica Eulerove formule). Prvi od pripadnih argumenata je  $\frac{1}{5}$  od  $\frac{3\pi}{2}$ , dakle  $\frac{3\pi}{10}$ , a svaki sljedeći je u odnosu na prethodni veći za  $\frac{2\pi}{5}$ , dakle se naši korijeni nalaze pod kutovima  $\frac{3\pi}{10}$ ,  $\frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}$ ,  $\frac{7\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{11\pi}{10}$ ,  $\frac{11\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{15\pi}{10} = \frac{3\pi}{2}$  i  $\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{5} = \frac{19\pi}{10}$ .*

#### Primjer 28. Izračunajmo $\sqrt{(-3-4i)^{12}}$ .

*Očito se traže oba kompleksna druga korijena od  $(-3-4i)^{12}$ . Za potenciranje (a i korjenovanje) je pogodniji eksponencijalni oblik. Prvo je  $-3-4i = 5e^{i\varphi}$ , gdje je  $\varphi$  onaj od dvaju mogućih kuteva između 0 i  $2\pi$  koji odgovara točki u trećem kvadrantu (jer su i realni i imaginarni dio broja  $-3-4i$  negativni), a to je  $\varphi = \pi + \arctg \frac{4}{3} \approx 4,06889 \approx 233^\circ 13'$ .*

Stoga je  $(-3 - 4i)^{12} = (5e^{i\varphi})^{12} = 5^{12}e^{12\varphi i}$ . Oba kvadratna korijena moraju imati istu apsolutnu vrijednost, koja je jednaka pozitivnom (realnom) kvadratnom korijenu apsolutne vrijednosti broja kojeg korjenujemo, dakle im je apsolutna vrijednost  $\sqrt{5^{12}} = 5^6 = 15625$ . Prvi od dva kvadratna korijena mora imati argument takav da udvostručen daje  $12\varphi$ , dakle prvi od dva kvadratna korijena od  $5^{12}e^{12\varphi i}$  ima argument  $6\varphi \approx 24,4133$ , dok drugi ima argument za pola kruga dalje, dakle  $\pi + 6\varphi \approx 27,5549$ . Zbog periodičnosti eksponencijalne funkcije s bazom  $e$ , s temeljnim periodom  $2\pi$ , od izračunatih argumenata možemo oduzimati višekratnike od  $2\pi$  dok ne dobijemo argumente između  $0$  i  $2\pi$ , bez da smo time promijenili naša dva kvadratna korijena. Kako je  $24,4133 - 6\pi = 5,56734 = \varphi_1 \in [0, 2\pi)$  i  $27,5549 - 8\pi = 2,42216 = \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ , zaključujemo da su dva tražena kompleksna korijena  $15625e^{i\varphi_1}$  i  $15625e^{i\varphi_2}$ .

**Primjer 29.** Kristalne strukture su periodične u tri nezavisna smjera. Tu periodičnost opisuje kristalna rešetka (vidi odjeljak 6.2). Funkcije koje opisuju periodične strukture poput kristala moraju i same biti periodične. Jednodimenzionalna se rešetka sastoji od  $u$  parovima jednako udaljenih točaka na pravcu. Ako im je razmak  $a$ , svaka funkcija  $f$  čija je periodičnost u skladu s periodičnošću rešetke mora imati svojstvo  $f(x + a) = f(x)$  za sve  $x$  iz domene. Najjednostavnije takve funkcije su  $\sin(2\pi x/a)$  i  $\cos(2\pi x/a)$ , koje se u kompleksnom kontekstu svode na samo jednu funkciju

$$f(x) = e^{2\pi xi/a}.$$

U trodimenzionalnom se kontekstu periodična funkcija s periodima  $a$ ,  $b$  i  $c$  (u tri nezavisna smjera) dobije množenjem takvih funkcija, tj. prototip takve funkcije je

$$f(x, y, z) = e^{2\pi xi/a} e^{2\pi yi/b} e^{2\pi zi/c}.$$



**Ponovimo bitno...** Eulerova formula  $\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}$  daje eksponencijalni zapis kompleksnog broja u obliku  $z = |z| e^{i\phi}$ . Za račun s kompleksnim brojevima prikazanim u eksponencijalnom obliku primjenjuju se uobičajena pravila za množenje, dijeljenje i potenciranje potencija, uz uzimanje u obzir periodičnosti kompleksne eksponencijalne funkcije. 



## Poglavlje 2

# Realne funkcije jedne varijable

### 2.1 Pojam funkcije i grafa funkcije

Pod funkcijom se obično — krivo — podrazumijeva pravilo kojim se nekim objektima pridružuju neki drugi objekti, tj. formula kojom se iz  $x$  izračuna  $f(x)$ . Što je krivo u tom shvaćanju? Svakako je pravilo pridruživanja bitan dio pojma funkcije, no nedostatak ovakve „definicije” je neisticanje skupa u kojem se nalaze elementi kojima pravilo nešto pridružuje (skupa nezavisnih varijabli) i skupa u kojem se nalaze rezultati pridruživanja (skupa zavisnih varijabli). Naime, isto pravilo se može odnositi na različite skupove objekata. Primjerice, masa su jednom kontekstu može pridruživati ljudima, a u drugom brašnu. Također, u „definiciji” da je funkcija samo pravilo pridruživanja nije istaknuto da ne smije biti višestrukog pridruživanja (pridruživanje više objekata jednom objektu). Pravilnija definicija je kako slijedi:

**Definicija 3 (Funkcija).** *Svaka **funkcija** se sastoji od tri komponente:*

1. **Domena:** *skup u kojem se nalaze objekti kojima se nešto pridružuje (skup svih nezavisnih varijabli).*
2. **Kodomena:** *skup u kojem se nalaze rezultati pridruživanja (zavisne varijable).*
3. **Pravilo** *kojim se svakom elementu domene pridružuje točno po jedan element kodomene.*

Uobičajene oznake su  $D$  za domenu,  $K$  za kodomenu i  $f$  za samo pravilo. Funkciju tada označavamo

$$f : D \rightarrow K$$

i kažemo „ $f$  sa  $D$  u  $K$ “. Ako funkcija  $f$  nezavisnoj varijabli  $x$  pridružuje zavisnu varijablu  $y$ , pišemo  $y = f(x)$ . Ukoliko ne želimo isticati oznaku zavisne varijable, koristi se ekvivalentan zapis  $x \mapsto f(x)$ .

**Napomena 5.** Oznaka  $f$  predstavlja „čitavu“ funkciju, dok je  $f(x)$  vrijednost funkcije za jedan element domene  $x$ , dakle  $f(x)$  je jedan element kodomene funkcije  $f$ . Također,  $f(x)$  u većini slučajeva možemo poistovjetiti s formulom, tj. pravilom djelovanja funkcije.

**Primjer 30.** Funkcija *identiteta* je funkcija  $id : A \rightarrow A$  (gdje je  $A$  bilo kakav skup) koja „ništa ne radi“, tj. svakom elementu pridružuje njega samog:  $id(x) = x$  za sve  $x \in A$ .

U ovom kolegiju će kodomena najčešće biti podskup skupa  $\mathbb{R}$ . Takve funkcije zovemo **realnim funkcijama**. U ovom i sljedeća dva poglavlja bavit ćemo se isključivo **realnim funkcijama jedne varijable**, tj. funkcijama kojima su i domena i kodomena podskupovi od  $\mathbb{R}$ . Možemo reći da su to funkcije koje (realnim) brojevima pridružuju (realne) brojeve.

Često se koristi i pojam **prirodne domene** neke funkcije. To je najveći skup koji za dano pravilo može biti domena, tj. skup *svih* matematičkih objekata na koje se pravilo može smisleno primijeniti. Primjerice, za pravilo  $f(x) = \frac{1}{x-5}$  prirodna domena skup  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$  jer se jedino za  $x = 5$  ne može izračunati  $\frac{1}{x-5}$ . Domena funkcije je uvijek podskup<sup>1</sup> prirodne domene koja odgovara pravilu kojim je opisano djelovanje funkcije. Ukoliko se funkcija zadaje samo formulom  $f(x)$  podrazumijeva se da joj je domena prirodna domena.

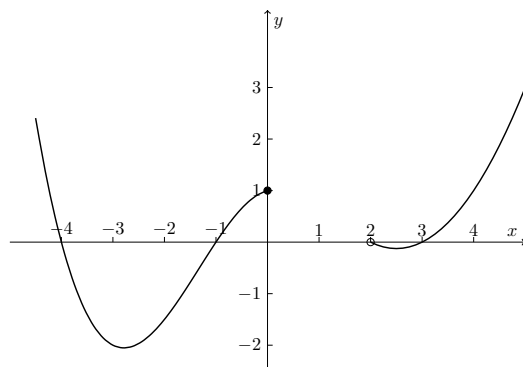
Realne funkcije jedne varijable možemo vizualizirati pomoću prikaza funkcijske ovisnosti u koordinatnom sustavu. **Graf funkcije**  $f$  čija varijabla je označena s  $x$ , a pridružena vrijednost s  $f(x)$ , je skup *svih*<sup>2</sup> uređenih parova

$$(x, f(x))$$

kad  $x$  prolazi domenom funkcije. Budući da uređene parove realnih brojeva možemo poistovjetiti s točkama u pravokutnom koordinatnom sustavu, graf realne funkcije jedne varijable možemo prikazati ucrtavanjem točaka s koordinatama  $(x, f(x))$  u pravokutni koordinatni sustav. Pritom se domena vizualizira kao skup svih apscisa točaka grafa (dakle kao podskup  $x$ -osi), a rezultati, tj. elementi kodomene, nanose se na  $y$ -os. S obzirom na standardnost

<sup>1</sup>Svaki skup je sam sebi podskup. Za skup  $B$  kažemo da je podskup skupa  $A$  ako je svaki element od  $B$  ujedno element od  $A$ . Primjerice, skup svih ljudi rođenih u 21. stoljeću je podskup skupa svih ljudi koji su ikad živjeli.

<sup>2</sup>Dakle, ne samo onih koje smo stvarno u stanju nacrtati.



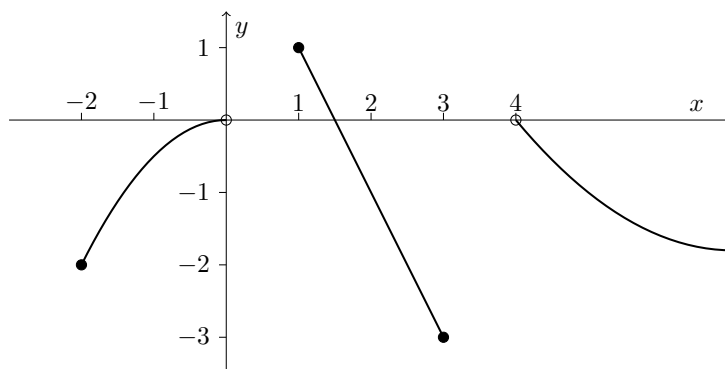
Slika 2.1: Određivanje nultočki i vrijednosti funkcije u nuli iz grafa.

takvog prikaza grafa funkcije, uobičajeno je i njega nazivati grafom funkcije. Pritom se podrazumijeva da se u okviru nacrtane slike mogu uočiti sve bitne karakteristike slike, a da se izvan okvira graf nastavlja s istim trendom koji je naznačen na slici (primjerice, na slici 2.1 podrazumijevamo da je funkcija definirana i za sve brojeve manje od  $-4$  odnosno veće od  $4$ , i da pritom pada „udubljeno”<sup>3</sup> za  $x < -4$ , a da raste „udubljeno” za  $x > 4$ ). Pune točke se koriste za naglašavanje kad je neka točka na grafu, bilo radi lakšeg očitavanja odgovarajućih iznosa nezavisne i zavisne varijable, bilo radi naglašavanja da se radi o početnoj ili krajnjoj točki nekog dijela grafa koja je i sama dio grafa. Prazne točke se pak koriste za naglašavanje pozicija točaka koje su bitne za graf, ali nisu njegov dio. Tako je primjerice na slici 2.1 točka  $(0, 1)$  označena puno da bi se istaknulo da je  $f(0) = 1$  i da funkcija nije definirana za brojeve veće od  $0$  (sve do  $2$ ), dok je točka  $(2, 0)$  označena prazno da se ne samo naglasi da  $f$  nije definirana u  $2$ , nego i da lijevo od te točke nemamo točaka grafa (sve do  $x = 0$ ), odnosno da  $f$  nije definirana za brojeve malo manje od  $2$ .

Graf funkcije nikako ne valja miješati sa slikom funkcije. **Slika funkcije** je podskup kodomene koji se sastoji od onih rezultata (zavisnih varijabli) koji stvarno imaju original (koje su stvarno pridružene nekoj nezavisnoj varijabli). Primjerice, slika funkcije  $f(x) = x^2$  je skup  $[0, +\infty)$  jer  $x^2$  ne može postići negativnu vrijednost, ali može postići sve nenegativne. Ako nam je dan crtež grafa u pravokutnom koordinatnom sustavu, lako je očitati domen i sliku funkcije: jednostavno projiciramo graf na os apscisa, odnosno na os ordinata.

**Zadatak 2.** Na slici 2.2 je graf funkcije čija domena je  $[-2, 0) \cup [1, 3] \cup \langle 4, +\infty)$ , dok je slika te funkcije  $\langle -\infty, 1]$  (desni dio grafa sugerira da funkcija

<sup>3</sup>Kasnije ćemo ovaj oblik grafa zvati konveksnim.



Slika 2.2: Određivanje domene i slike funkcija iz grafa.

*nastavlja padati u beskonačnost kad  $x$  raste).*

Neke bitne posljedice definicije funkcije i grafa na prikaz grafa realne funkcije jedne varijable u pravokutnom koordinatnom sustavu su sljedeće:

- Svaka vertikalna (paralela s osi ordinata) siječe graf funkcije najviše jednom (zašto?).
- Sjecište grafa s osi ordinata je, ako postoji, točka  $(0, f(0))$ , tj. njegova ordinata predstavlja vrijednost funkcije u nuli.
- Elementi domene kojima funkcija pridružuje nulu zovu se **nultočke funkcije**. Dakle, nultočke<sup>4</sup> funkcije  $f$  su rješenja jednadžbe  $f(x) = 0$ . Svako sjecište grafa s osi apscisa kao apscisu ima neki  $x \in D$ , a kao ordinatu  $0 = f(x)$ , pa apscise sjecišta grafa s osi apscisa predstavljaju nultočke funkcije.
- Funkcija je pozitivna/negativna (u smislu: vrijednosti  $f(x)$  su pozitivne/negativne) za one vrijednosti apscisa  $x$  za koje su pripadne točke grafa iznad/ispod  $x$ -osi.

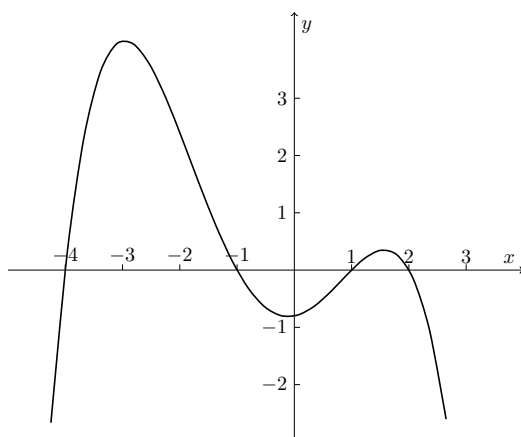
**Zadatak 3.** Što znamo o funkciji ako njen graf ne siječe os ordinata?

**Zadatak 4.** Može li graf funkcije sjeći neku horizontalu (paralelu s osi apscisa) više od jednom?

**Zadatak 5.** Ovisnost tlaka  $p$  o volumenu  $V$  idealnog plina, pri konstantnoj temperaturi  $T$  i množini  $n$ , dana je formulom:

$$p(V) = nRT \cdot \frac{1}{V}.$$

<sup>4</sup>Pod nultočkama ovdje podrazumijevamo *realne* nultočke.



Slika 2.3: Određivanje predznaka funkcije iz grafa.

Tako definirana funkcija  $p$  ima prirodnu domenu  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , no zbog konteksta kao domenu<sup>5</sup> uzimamo  $\langle 0, +\infty \rangle$ . Tlak pri pozitivnom volumenu je očigledno pozitivan, pa će se graf ove funkcije nalaziti u prvom kvadrantu. Skicirajte pet točaka pripadnog grafa i komentirajte (ne)postojanje sjecišta s koordinatnim osima!

**Zadatak 6.** Iz na slici 2.1 zadanog crteža grafa nepoznate funkcije  $f$ , odredite koja joj je vrijednost u  $x = 0$  i koje su joj nultočke. Na kojim intervalima ona poprima pozitivne vrijednosti?



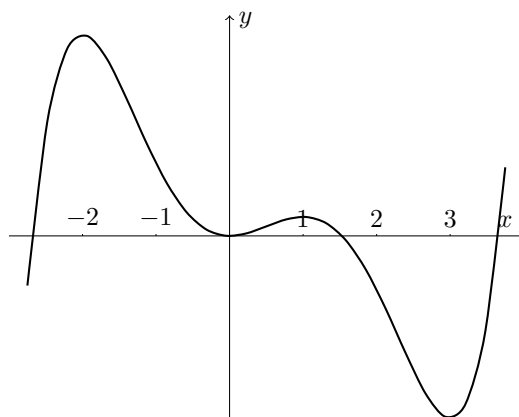
**Ponovimo bitno...** Funkcija se sastoji od domene, kodomene i pravila koje svakom elementu domene pridružuje po jedan element kodomene. Graf funkcije se sastoji od svih uređenih parova oblika (element domene, pridruženi element kodomene). Realne funkcije jedne varijable su funkcije kojima su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva. Za takve funkcije njihov graf je moguće vizualizirati crtanjem točaka koje su elementi grafa funkcije u Kartezijevom koordinatnom sustavu. 🦆🦆🦆

## 2.2 Svojstva funkcija i njihovih grafova

Funkcija može biti rastuća ili padajuća na cijeloj domeni ili nekom njenom podintervalu. Funkcija **raste** na intervalu  $I$  (koji je podskup domene) ako veće

<sup>5</sup>Primijetimo da iako ovdje, nepravilno, volumene poistovjećujemo s realnim brojevima bez da smo definirali jedinicu, izjava o prirodnoj domeni je točna jer je svejedno želimo li reći da volumen mora biti veći primjerice od 0 L ili od 0 m<sup>3</sup>.





Slika 2.4: Određivanje intervala rasta i pada iz grafa.

vrijednosti nezavisne varijable iz  $I$  daju i veće rezultate (zavisne varijable):

$$x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x') \quad (\text{za } x, x' \in I).$$

Funkcija **pada** na intervalu  $I$  (koji je podskup domene) ako veće vrijednosti nezavisne varijable iz  $I$  daju manje rezultate (zavisne varijable):

$$x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x') \quad (\text{za } x, x' \in I).$$

Rastuće i padajuće funkcije jednim imenom zovu se monotonim funkcijama. Ako su nejednakosti u gornjim definicijama stroge ( $<$  umjesto  $\leq$  odnosno  $>$  umjesto  $\geq$ ) govorimo o strogo rastućim odnosno padajućim funkcijama.

Budući da se veće vrijednosti ordinata u pravokutnom koordinatnom sustavu nalaze iznad manjih, vizualno rast odnosno pad funkcije na intervalu  $I$  vidimo tako da gledajući slijeva udesno (nad intervalom  $I$  na osi apscisa) graf funkcije ide prema gore odnosno dolje.

**Primjer 31.** Pogledajmo graf na slici 2.4. Funkcija čiji je to graf raste na intervalima  $\langle -\infty, -2 \rangle$ ,  $\langle 0, 1 \rangle$  i  $\langle 3, +\infty \rangle$ , a pada na intervalima  $\langle -2, 0 \rangle$  i  $\langle 1, 3 \rangle$ . Svaki od simbola  $\langle \cdot \rangle$  u prethodnoj rečenici može biti zamijenjen s  $[$  odnosno s  $]$ , osim ako je uz  $-\infty$  ili  $+\infty$ .

Drugo bitno svojstvo koje realna funkcija jedne varijable može imati je (ne)parnost. To svojstvo ima smisla provjeravati samo ako je domena funkcije simetrična s obzirom na nulu, npr. ako je domena  $\mathbb{R}$ ,  $[-5, 5]$  ili  $\langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$ . Funkcija  $f$  s takvom domenom je **parna funkcija** ako je svejedno uvrštavamo li u nju  $x$  ili  $-x$  (promjena predznaka originala ne utječe na predznak rezultata): za sve  $x$  iz domene je

$$f(-x) = f(x).$$

Primjer parne funkcije je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Grafovi parnih funkcija su simetrični s obzirom na os ordinata (objasnite zašto!).

Funkcija  $f$  sa simetričnom domenom je **neparna funkcija** ako uvrštavanje  $-x$  umjesto  $x$  promijeni predznak rezultata (promjena predznaka nezavisne varijable mijenja predznak njoj pridružene zavisne varijable): za sve  $x$  iz domene je

$$f(-x) = -f(x).$$

Primjer neparne funkcije je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ . Grafovi neparnih funkcija su simetrični obzirom na ishodište, odnosno posjeduju rotacijsku simetriju reda 2 oko ishodišta<sup>6</sup> (zašto?).

Na koncu, spomenimo i svojstva injektivnosti, surjektivnosti i bijektivnosti. Funkcija je **injekcija** ako različiti originali daju različite rezultate, tj. ako iz  $f(x) = f(x')$  nužno slijedi  $x = x'$ . Vizualno injektivnost realne funkcije jedne varijable vidimo po tome da sve horizontale graf funkcije sijeku najviše jednom. Funkcija je **surjekcija** ako svaki element kodomene ima svoj original u domeni, tj. ako za svaki  $y \in K$  možemo naći  $x \in D$  takav da je  $f(x) = y$ . Surjektivnost je u pravilu lako postići smanjivanjem kodomene: Ako stavimo da je slika funkcije njena kodomena, funkcija je automatski (štaviše, po definiciji) surjektivna.<sup>7</sup> Vizualno surjektivnost realne funkcije jedne varijable vidimo po tome da svaka horizontala kroz točke kodomene bar jednom siječe graf. Ako je funkcija injekcija i surjekcija kažemo da je **bijekcija**.



**Ponovimo bitno...** Osnovna svojstva koja mogu imati realne funkcije jedne varijable, a koja imaju značaj za njihove primjene, su rast i pad (na pojedinim intervalima), parnost i neparnost, injektivnost i surjektivnost.

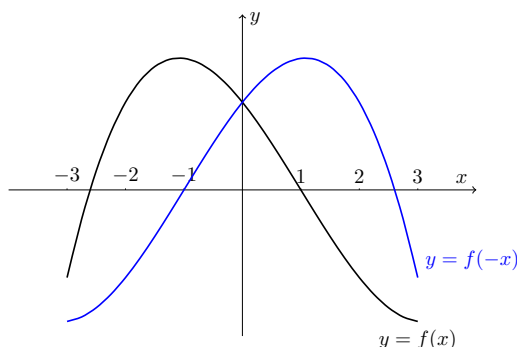


## 2.3 Transformacije grafova

Ako znamo kako u Kartezijevom koordinatnom sustavu izgleda graf neke realne funkcije jedne varijable  $y = f(x)$ , lako je skicirati grafove mnogih drugih iz nje izvedenih funkcija — svih onih koje se iz te funkcije mogu dobiti kombinacijom promjene predznaka nezavisne ili zavisne varijable, pribrajanjem ili oduzimanjem konstante nezavisnoj ili zavisnoj varijabli te skaliranjem zavisne ili nezavisne varijable pozitivnom konstantom.

<sup>6</sup>U ravnini su centralna simetrija i rotacijska simetrija reda 2, tj. rotacijska simetrija s kutom  $180^\circ$  jedno te isto.

<sup>7</sup>Formalno, promjena kodomene znači i promjenu funkcije, no kako ta promjena ne utječe na graf funkcije, nećemo to posebno isticati.



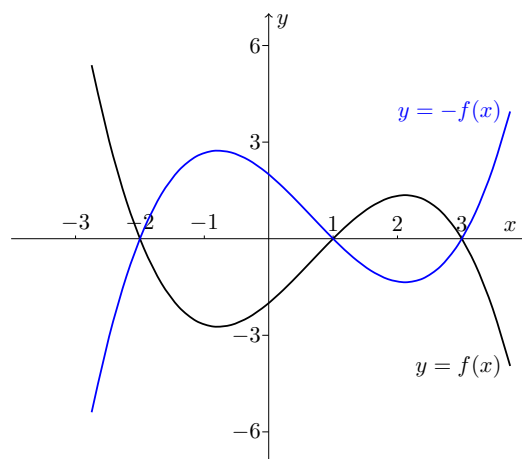
Slika 2.5: Promjena predznaka (nezavisne) varijable.

Prvi tip transformacije grafa je zrcaljenje (osna simetrija) s obzirom na jednu od koordinatnih osi uslijed promjene predznaka nezavisne ili zavisne varijable. Ako se promjena predznaka odnosi na domenu (zamjena nezavisne varijable  $x$  s  $-x$ ), zrcalimo s obzirom na os ordinata, a ako se odnosi na kodomeni (promjena predznaka zavisne varijable s  $f(x)$  na  $-f(x)$ ), onda zrcalimo s obzirom na os apscisa:

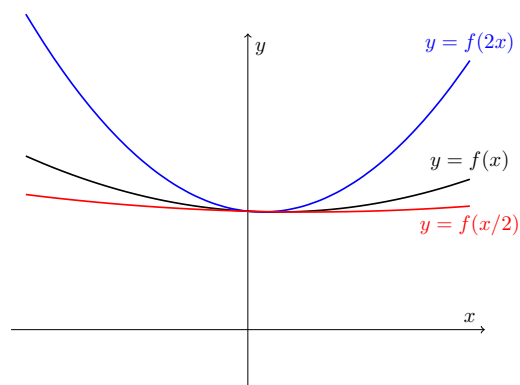
- Ako je  $g(x) = f(-x)$ , graf funkcije  $g$  dobije se zrcaljenjem grafa od  $f$  s obzirom na os ordinata; vidi sliku 2.5.
- Ako je  $g(x) = -f(x)$ , graf funkcije  $g$  dobije se zrcaljenjem grafa od  $f$  s obzirom na os apscisa; vidi sliku 2.6.

Drugi tip transformacije je skaliranje (rastezanje odnosno stezanje) grafa u horizontalnom ili vertikalnom smjeru uslijed skaliranja (nezavisne) varijable ( $x$  zamjenjujemo s  $Ax$  pa se skaliranje odnosi na domenu, odnosno graf se horizontalno rasteže ili stišće) ili vrijednosti funkcije (zavisna varijabla  $f(x)$  prelazi u  $Af(x)$  pa se skaliranje odnosi na kodomeni, odnosno graf se vertikalno rasteže ili stišće). S obzirom na to da smo već opisali efekt promjene predznaka funkcije na graf, ovdje je dovoljno razmatrati skaliranje pozitivnom konstantom  $A > 0$ :

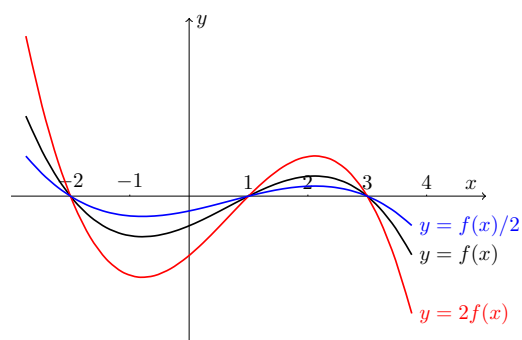
- Ako je  $g(x) = f(Ax)$ , graf funkcije  $g$  ima isti oblik kao graf funkcije  $f$  i isto sjecište s osi ordinata (ako ga uopće ima), ali je horizontalno rastegnut za  $A < 1$ , a za  $A > 1$  je stisnut (vidi sliku 2.7).
- Ako je  $g(x) = Af(x)$ , graf funkcije  $g$  ima isti oblik kao graf funkcije  $f$  i iste nultočke, ali je vertikalno rastegnut za  $A > 1$ , za  $A < 1$  graf je vertikalno spljošten (vidi sliku 2.8). Primijetimo da skaliranjem s obzirom na kodomeni ne mijenjamo domenu funkcije.



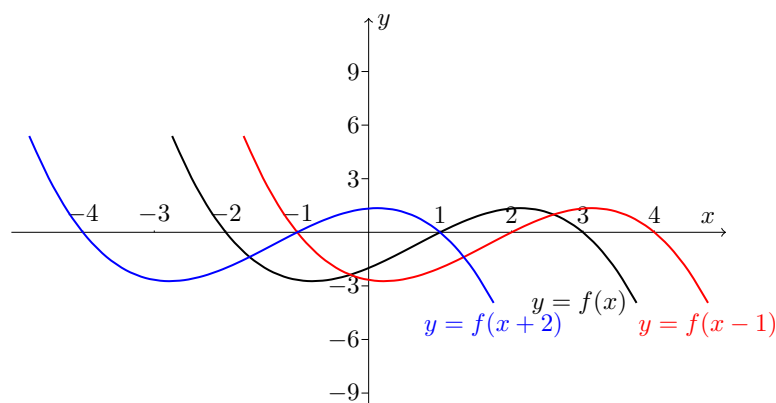
Slika 2.6: Promjena predznaka funkcije (zavisne varijable).



Slika 2.7: Skaliranje nezavisne varijable.



Slika 2.8: Skaliranje funkcije (zavisne varijable).



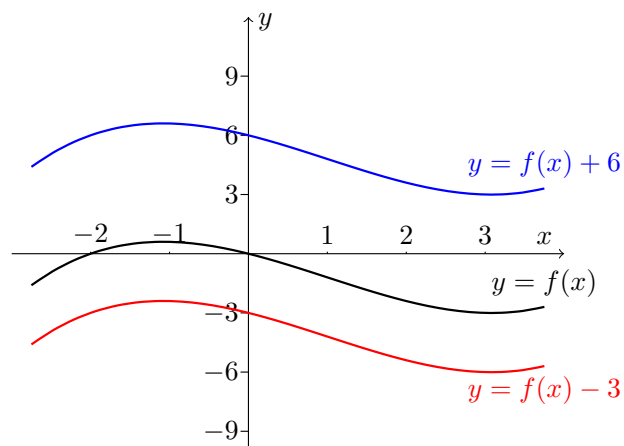
Slika 2.9: Horizontalna translacija grafa.

Treći tip transformacije grafa je translacija, koja može biti horizontalna ako se odnosi na domenu (zamjena varijable  $x$  s varijablom  $x+A$ ) ili vertikalna ako se odnosi na kodomenu (promjena vrijednosti funkcije s  $f(x)$  na  $f(x)+A$ ):

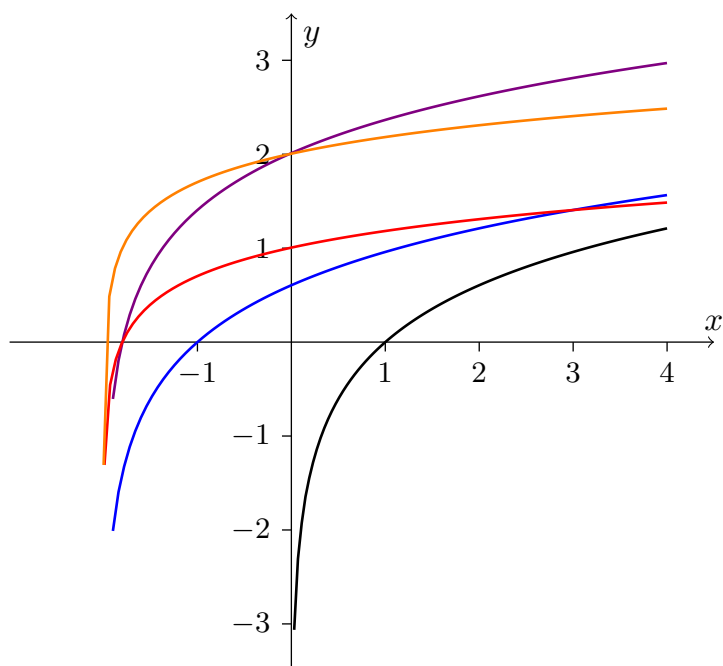
- Ako je  $g(x) = f(x+A)$ , graf funkcije  $g$  dobije se translacijom grafa od  $f$  za iznos  $A$  ulijevo (dakle, ako je  $A$  negativan, pomak je udesno), vidi sliku 2.9.
- Ako je  $g(x) = f(x) + A$ , graf funkcije  $g$  dobije se translacijom grafa od  $f$  za iznos  $A$  prema gore (dakle, ako je  $A$  negativan, pomak je nadolje), vidi sliku 2.10.

Pomoću upravo opisanih pravila se iz poznavanja malog broja grafova (grafova osnovnih elementarnih funkcija, koje ćemo ponoviti u sljedećim odjeljcima) mogu lako i dosta precizno nacrtati grafovi mnogih drugih funkcija. Primjerice, ako znamo nacrtati graf funkcije s formulom  $f(x) = e^x$ , temeljem gornjih pravila možemo nacrtati grafove funkcija s formulama  $e^{x+1}$ ,  $e^x - 2$ ,  $-e^x$  i  $3e^x$ . Primijetimo da translacije i skaliranja s pozitivnim konstantama ne mijenjaju osnovni oblik grafa, već samo njegovo pozicioniranje i veličinu u koordinatnom sustavu.

**Primjer 32.** Na slici 2.11 crno u crnom koordinatnom sustavu je nacrtan graf funkcije  $\log_\pi$  (logaritam s bazom  $\pi$ ). Nacrtajmo graf funkcije čije je pravilo  $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \log_\pi(10 + 5x)$ . Budući da nemamo promjenu predznaka ni u domeni ni u kodomeni, znamo da će graf funkcije  $f$  izgledati po obliku i orijentaciji jednako kao graf funkcije  $\log_\pi$ , ali će brojevi na osima i pozicije osi biti pomaknute jer imamo uključena sva četiri tipa transformacija koja na njih utječu.



Slika 2.10: Vertikalna translacija grafa.

Slika 2.11: Graf funkcije  $\log_\pi$  (crno) i njegova transformacija do grafa funkcije  $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \log_\pi(5 + 4x)$  (narančasto)

Kako bismo lakše pratili redoslijed transformacija, preoblikujmo formulu funkcije  $f$  u

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \log_{\pi}(5 \cdot (x + 2)) + 3.$$

Budući da množenje i dijeljenje imaju prednost pred zbrajanjem i oduzimanjem, te uzevši u obzir redoslijed uvrštavanja, imamo redom:

1. Prvo se  $x$  poveća za 2, dakle se graf translacija za 2 ulijevo (plavo na slici 2.11 je graf funkcije  $\log_{\pi}(x + 2)$ ). Nultočka je sad  $-1$  umjesto 1.
2. Zatim se  $x + 2$  skalira s faktorom 5, odnosno naš se graf horizontalno stegne 5 puta; s obzirom na oblik grafa, to znači strmiji rast (ljubičasto na slici 2.11 je graf od  $\log_{\pi}(5x + 10)$ ). Nultočka je sad  $-9/5$  umjesto  $-1$ .
3. Zatim imamo skaliranje s faktorom  $\frac{1}{2}$  u kodomeni, dakle se graf vertikalno dvostruko stisne (crveno na slici 2.11 je graf od  $\frac{1}{2} \log_{\pi}(5x + 10)$ , nultočka se nije promijenila).
4. Naposljetku imamo translaciju za 1 u kodomeni, tj. nagore – narančasti graf na slici 2.11 je graf funkcije  $f$ .



**Ponovimo bitno...** Transformacije grafova omogućuju da se iz poznavanja grafa neke funkcije dobiju grafovi funkcija kod kojih je promijenjen predznak (ne)zavisne varijable, kod kojih je (ne)zavisna varijabla skalirana pozitivnom konstatom ili kod kojih je (ne)zavisnoj varijabli pribrojena konstanta. 



U nastavku ćemo ukratko ponoviti **elementarne funkcije**. One se dijele na algebarske i transcendentne funkcije. To razlikovanje nije bitno samo za matematičare, nego i za prirodosnanstvenike: u algebarske funkcije mogu se uvrštavati fizikalne veličine (dakle, brojevi s jedinicama) i rezultat također ima jedinicu; u transcendentne funkcije mogu se uvrštavati samo brojevi i rezultat je čisti broj.

## 2.4 Algebarske funkcije

### 2.4.1 Afine funkcije

Afine funkcije (često nazivane i linearnim funkcijama) nezavisnu varijablu množe konstantom i tome pribraja još jednu konstantu. Formalnije:

**Definicija 4 (Afina funkcija).** *Afina funkcija je realna funkcija s prirodnou domenom  $\mathbb{R}$  kojoj je formula oblika*

$$f(x) = ax + b.$$

Graf afine funkcije je pravac: Sve točke oblika  $(x, ax + b)$  za zadane  $a$  i  $b$  leže na istom pravcu, kojemu je  $a$  **koeficijent smjera**, a  $b$  **slobodni član** (slika 2.12, desno). Kako je  $f(0) = a \cdot 0 + b = b$ , to je točka  $(0, b)$  na grafu, tj. odsječak grafa afine funkcije na osi ordinata jednak je slobodnom članu. Afina funkcija kojoj je slobodni član nula zove se **linearnom funkcijom** (u užem smislu). Graf svake linearne funkcije prolazi kroz ishodište (slika 2.12, sredina). Linearne funkcije opisuju proporcionalnost nezavisne i zavisne varijable: Par međuovisnih varijabilnih veličina zove se **proporcionalnim (razmjernim)** ako je omjer (konstanta proporcionalnosti) njihovih vrijednosti konstantan, tj. jednak za svaki par odgovarajućih vrijednosti.<sup>8</sup> Ako je koeficijent smjera afine funkcije jednak nuli, govorimo o **konstantnoj funkciji**. U tom slučaju slika funkcije je jednočlani skup  $\{b\}$ , jer takva funkcija svim vrijednostima varijable pridružuje istu vrijednost  $b$ . Konstantna funkcija nije injekcija. Graf konstantne funkcije je pravac paralelan s osi apscisa (slika 2.12, lijevo).

**Primjer 33.** *Identiteta  $id(x) = x$  je linearna funkcija.*

**Primjer 34.** *Površina kruga je razmjerna kvadratu njegova polumjera, ali ne i polumjeru.*

Ako koeficijent smjera afine funkcije nije nula, afina funkcija je bijekcija s  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{R}$  i ima točno jednu nultočku  $-\frac{b}{a}$ .

**Zadatak 7.** *Uz koji uvjet je afina funkcija parna (neparna)?*

Ovisno o predznaku koeficijenta smjera afina funkcija je rastuća, odnosno padajuća: za pozitivan koeficijent smjera ona raste, a za negativan pada.

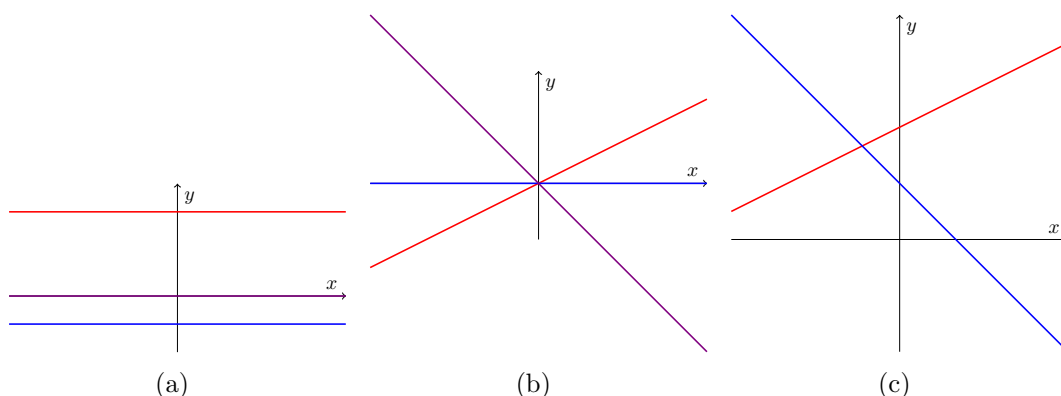
Afine funkcije su vrlo česte u primjenama, iako su prave afine zavisnosti rijetke. Naime, često se pomoću afine funkcije aproksimira kompliciranija međuovisnost ili se pak (vidi odjeljak 2.8) neafine ovisnosti supstitucijama svode na afine.

Također, važno je uočiti da je u slučaju afine ovisnosti jedinica slobodnog člana uvijek jednaka jedinici zavisne varijable, a jedinica koeficijenta smjera je kvocijent jedinica zavisne i nezavisne varijable (zašto?).

---

<sup>8</sup>Nulu smatramo proporcionalnom svakom broju.





Slika 2.12: Grafovi konstantnih (lijevo), linearnih (sredina) i općih afinih funkcija (desno).

**Primjer 35.** Ovisnost koncentracije  $c_A$  reaktanta A o vremenu  $t$  u reakciji nultog reda opisana je jednačbom

$$c_A = c_{A,0} - k_0 t.$$

Pritom je  $c_{A,0}$  početna koncentracija od A, a  $k_0 > 0$  je konstanta brzine reakcije. Očito bismo uz

$$x = t, \quad f(x) = c_A,$$

$$a = -k_0, \quad b = c_{A,0}$$

tu jednačbu mogli interpretirati kao jednačbu afine funkcije, s tim da joj domena ne bi bila cijeli skup  $\mathbb{R}$  jer nas ne zanimaju vremena prije reakcije i nakon što reakcija stane. Primijetimo da je ovisnost  $c_A$  o  $t$  padajuća. Stoga je domena ove funkcije segment oblika  $[0, T]$ , gdje je  $T$  trajanje reakcije, recimo u sekundama, a  $T$  je nultočka funkcije  $c_A$ .

Ovdje zapravo treba biti malo oprezan. Kad govorimo o domeni i kodomeni funkcije te iznosima koje nanosimo na koordinatne osi, govorimo o čistim brojčanim iznosima (vidi odjeljak 1.3). Kad na horizontalnu os nanosimo vrijeme te os označimo primjerice s  $t/s$ , znamo da apscise u tom koordinatnom sustavu predstavljaju broj sekundi; stoga je i domena neke funkcije vremena (ovdje koncentracije) u tom slučaju neki interval brojeva, a ne vremenski interval. Efektivno to znači da kad smo gore rekli  $x = t$  zapravo mislimo reći  $x = t/s$  i podrazumijevamo da su sve jedinice u svakom članu formule izdvojene.

Primjerice, ako imamo  $c_A = 0,100 \text{ mol L}^{-1} - 0,667 \text{ mol L}^{-1} \text{ s}^{-1} t$ , zapravo nije  $x = t$ ,  $f(x) = c_A$ ,  $a = -0,667 \text{ mol L}^{-1} \text{ s}^{-1}$  i  $b = 0,100 \text{ mol L}^{-1}$ , nego je

$$x = t \text{ s}^{-1},$$

$$f(x) = c_A \text{ mol}^{-1} \text{ L},$$

$$a = -0,667,$$

$$b = 0,100$$

(tj.  $a = -k_0 \text{ mol}^{-1} \text{ L s}$  i  $b = c_{A,0} \text{ mol}^{-1} \text{ L}$ ). Pritom će raspon nezavisne varijable biti od 0 (početak reakcije) do  $T \text{ s}^{-1} = 100/667$  (kraj reakcije).

**Primjer 36.** Tlak idealnog plina kao funkcija recipročne vrijednosti volumena ( $p = nRT \cdot \frac{1}{V}$ ) može se shvatiti kao

$$y = ax + b$$

uz  $y = p/\text{Pa}$ ,  $x = \frac{1}{V}/(1/\text{m}^3)$ ,  $a = nRT/\text{J}$  i  $b = 0$ . Možemo reći i: Tlak idealnog plina proporcionalan je recipročnoj vrijednosti volumena.

**Primjer 37.** Za kemijske reakcije prvog reda u jedanaestom poglavlju izvest ćemo sljedeću vezu ovisnosti koncentracije<sup>9</sup>  $[A]$  reaktanta A o vremenu:

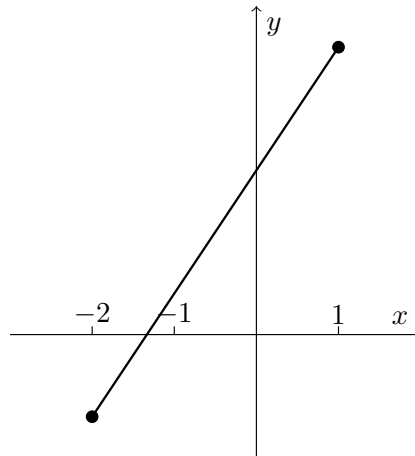
$$\ln \frac{[A]}{c^\ominus} = \ln \frac{[A]_0}{c^\ominus} - k_1 t.$$

Pritom je  $[A]_0$  početna koncentracija, a  $k_1$  konstanta (koeficijent brzine reakcije). Uz  $y = \ln \frac{[A]}{c^\ominus}$ ,  $x = t/s$ ,  $a = -k_1 \cdot s$  i  $b = \ln \frac{[A]_0}{c^\ominus}$  opet imamo prikaz neafine ovisnosti pomoću affine.

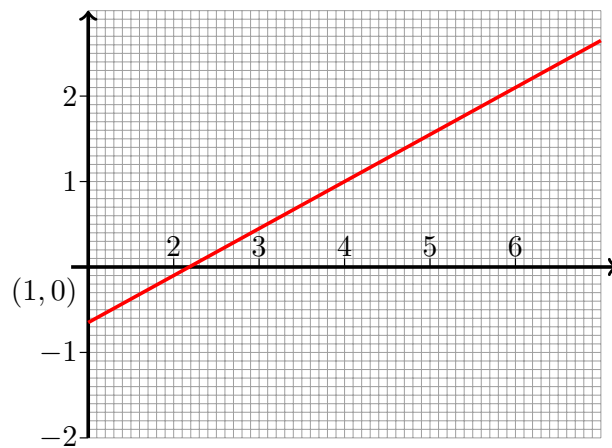
Kao u primjeru 35, u primjenama je često potrebno afinu funkciju promatrati tako da joj je domena samo neki segment, a ne cijeli skup realnih brojeva. Općenito, ako je domena neke funkcije segment  $[a, b]$ , onda odgovarajući graf sadrži samo točke s apscisama između  $a$  i  $b$ . Specijalno, graf affine funkcije kojoj je kao domena uzet segment  $[a, b]$  je dužina koja je dio pravca koji predstavlja graf te funkcije između točaka s apscisama  $a$  i  $b$ , vidi sliku 2.13.

**Zadatak 8.** Skicirajte grafove funkcija  $f(x) = 3$ ,  $f(x) = 2x$  i  $f(x) = 3 - 5x$ . Precizno odredite sva sjecišta s koordinatnim osima.

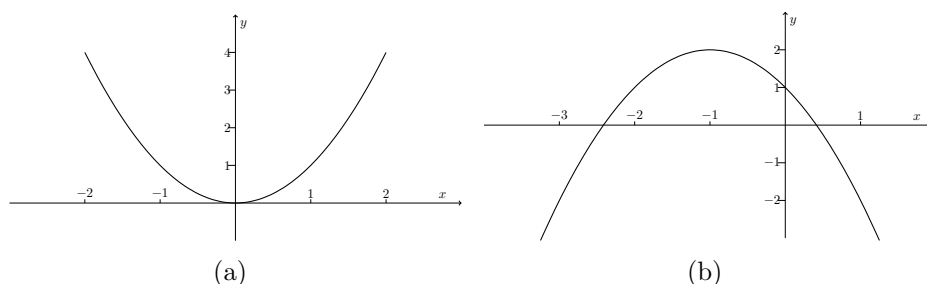
**Zadatak 9.** Što preciznije odredite koeficijent smjera i slobodni član pravca prikazanog na slici 2.14.



Slika 2.13: Graf funkcije  $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1,5x + 2$ .



Slika 2.14: Odredite koeficijent smjera i slobodni član!



Slika 2.15: Grafovi kvadratnih funkcija (lijevo:  $f(x) = x^2$ , desno:  $f(x) = -x^2 - 2x + 1 = -(x+1)^2 + 2$ ).



**Ponovimo bitno...** Afine funkcije su funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ . Graf svake afine funkcije je pravac koji os ordinata siječe u točki  $(0, b)$ . Ovisno o koeficijentu smjera  $a$  afine funkcije su rastuće ( $a > 0$ ), konstantne ( $a = 0$ ) ili padajuće ( $a < 0$ ). Ako je  $b = 0$ , govorimo o linearnoj funkciji (ili proporcionalnosti). 🦆🦆🦆

## 2.4.2 Kvadratne funkcije

**Definicija 5 (Kvadratna funkcija).** Opća kvadratna funkcija je realna funkcija s prirodnom domenom  $\mathbb{R}$ , koja je zadana formulom oblika

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdje su  $a, b, c$  zadane konstante (koeficijenti kvadratne funkcije). Koeficijent  $a \neq 0$  zove se **vodećim koeficijentom**, a  $c$  je **slobodnim članom**.

**Primjer 38.** Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana formulom

$$f(x) = x^2$$

je prototip kvadratne funkcije (s vodećim članom 1 i ostala dva koeficijenta jednaka nuli). Njen graf prikazan je slikom 2.15 (lijevo). Grafovi svih ostalih kvadratnih funkcija mogu se izvesti iz njega koristeći opisane transformacije grafova (odjeljak 2.3) i svođenje na potpun kvadrat (slika 2.15 desno).

Graf svake kvadratne funkcije ima oblik parabole, a predznak vodećeg koeficijenta određuje je li „otvorena prema gore” (za  $a > 0$ ) ili „prema dolje”

---

<sup>9</sup>U izrazima pod logaritmima koncentracije su dijeljene sa standardnom koncentracijom  $c^\ominus = 1 \text{ mol L}^{-1}$  jer se logaritmi mogu računati samo od čistih brojeva.

(za  $a < 0$ ). U prvom slučaju se najniža, a u drugom najviša točka grafa zove **tjeménom** parabole. Apscisa tjemena parabole  $y = ax^2 + bx + c$  je  $x_T = -\frac{b}{2a}$ . Kvadratna funkcija raste na  $\langle -\infty, x_T \rangle$  i pada na  $\langle x_T, +\infty \rangle$  ako je  $a < 0$ , odnosno pada do tjemena i raste od tjemena ako je  $a > 0$ . Graf kvadratne funkcije je uvijek simetričan s obzirom na paralelu s osi ordinata povučenu kroz tjeme. Kvadratna funkcija kao funkcija s  $\mathbb{R}$  u  $\mathbb{R}$  nikad nije ni injekcija ni surjekcija.

Kao i kod afinih funkcija, iz jednakosti  $f(0)$  i slobodnog člana, slijedi da sjecište grafa kvadratne funkcije s osi ordinata ima ordinatu jednaku slobodnom članu  $c$ .

Kao što smo rekli, nultočke svake funkcije (sjecišta s osi apscisa) su rješenja jednadžbe  $f(x) = 0$ , a ona je u ovom slučaju kvadratna jednadžba

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Njena rješenja su dana formulom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

gdje je  $D = b^2 - 4ac$  tzv. diskriminanta (kvadratne jednadžbe odnosno kvadratne funkcije). Vidimo da graf kvadratne funkcije ne siječe os apscisa ako je  $D < 0$ , siječe (dira) ju u samo jednoj točki (i to u tjemenu) ako je  $D = 0$ , a ima dva sjecišta s osi apscisa ako je  $D > 0$ .

**Zadatak 10.** Izvedite formulu za ordinatu tjemena i odredite sliku kvadratne funkcije.

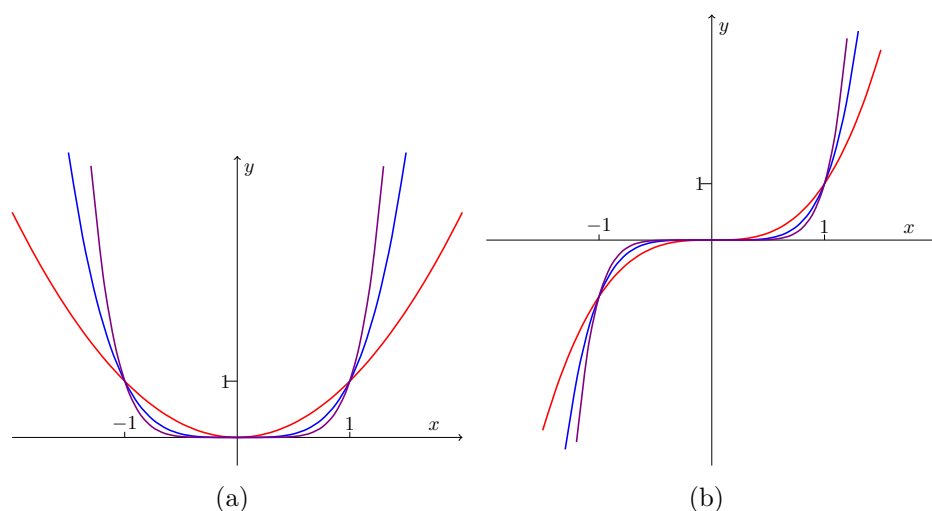
**Primjer 39.** Neka je kvadratna funkcija zadana formulom

$$f(x) = -x^2 - 2x + 1.$$

Tada je  $a < 0$  pa će odgovarajuća parabola biti otvorena prema dolje. Sjecište s osi ordinata je u ordinati 1. Nultočke funkcije  $f$  se dobiju rješavanjem jednadžbe  $-x^2 - 2x + 1 = 0$  i one su  $-1 \pm \sqrt{2}$  (to su apscise sjecišta grafa s osi apscisa). Tjeme ima apscisu  $-(-2)/(2 \cdot (-1)) = -1$  i ordinatu  $f(-1) = 2$ . Odgovarajući graf je prikazan slikom 2.15 (desno).

**Zadatak 11.** Skicirajte grafove funkcija  $f(x) = 4x^2 + 7$ ,  $f(x) = -x^2 + 3x - 2$  i  $f(x) = x^2 + 4x + 4$ , ali tako da je svakoj od njih domena segment  $[-1, 4]$ .

**Zadatak 12.** Ako je  $f(x) = ax^2 + bx + c$  i nezavisna varijabla  $x$  ima jedinicu  $\forall$ , a zavisna varijabla  $f(x)$  ima jedinicu  $\exists$ , koje su jedinice koeficijenata  $a$ ,  $b$  i  $c$ ?



Slika 2.16: Grafovi monoma parnog stupnja (lijevo) i neparnog stupnja (desno), za  $a = 1$ .



**Ponovimo bitno...** Kvadratne funkcije su funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Graf im je parabola, okrenuta prema gore ili dolje ovisno o predznaku vodećeg koeficijenta  $a$ . Sjecište s osi ordinata je u  $c$ , a sjecišta s osi apscisa su rješenja jednadžbe  $ax^2 + bx + c = 0$  (njih 0, 1 ili 2).



### 2.4.3 Polinomi

**Monom** stupnja  $n \in \mathbb{N}$  je funkcija  $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koja nezavisnoj varijabli pridružuje njenu  $n$ -tu potenciju (gdje je  $n$  prirodan broj) pomnoženu s nekom konstantom:<sup>10</sup>

$$m(x) = ax^n.$$

Ako je  $n$  paran i  $a > 0$ ,  $m$  ima svojstva i graf sličan funkciji  $f(x) = x^2$ . Ako je pak  $n$  neparan i  $a > 0$  radi se o strogo rastućoj funkciji čiji prototip je funkcija  $f(x) = x^3$ . Grafovi monoma parnih odnosno neparnih stupnjeva s vodećim koeficijentom  $a = 1$  prikazani su slikom 2.16.

**Polinom** je zbroj konačno mnogo monoma. Najveći od njihovih stupnjeva zove se **stupnjem polinoma**. Primjeri polinoma su  $f(x) = x^3 + 6x - 9$  (polinom stupnja 3) i  $g(t) = 4t^5 - 7t^6 + 3,2t - 1,45367$  (polinom stupnja 6).

<sup>10</sup>Strogo uzevši, monom je samo funkcija potenciranja, ali smo ovdje definiciju malo proširili.

Uočimo: Polinom stupnja 0 je konstantna funkcija, a polinom stupnja 1 je afina funkcija s koeficijentom smjera različitim od nule. Kvadratne funkcije su polinomi stupnja 2.

Preciznija definicija je sljedeća:

**Definicija 6 (Polinom).** *Polinom stupnja  $n$  je funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oblika*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdje je  $a_n \neq 0$ .

Brojevi  $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$  su unaprijed zadani (dakle, konstante) i zovu se **koeficijentima polinoma**  $f$ , pri čemu se koeficijent  $a_n$  zove **vodećim koeficijentom**. Koeficijent  $a_0$  zove se **slobodnim članom polinoma**  $f$  i predstavlja vrijednost  $f(0)$ , dakle sjecište pripadnog grafa s osi ordinata.

Broj  $\alpha$  je nultočka polinoma  $f(x)$  točno ako je  $f(x)$  djeljiv s  $(x - \alpha)$ , tj. ako je  $f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x)$ , gdje je  $g(x)$  polinom stupnja za 1 manjeg od stupnja polinoma  $f(x)$ . Ukoliko je polinom  $f(x)$  djeljiv s polinomom  $(x - \alpha)^m$  za neki realan broj  $\alpha$  i prirodan broj  $m$ , a pritom nije djeljiv s  $(x - \alpha)^{m+1}$ , kažemo da je  $\alpha$   **$m$ -struka nultočka** polinoma  $f$ ; pritom broj  $m$  zovemo kratnošću nultočke  $\alpha$ . Višestruke nultočke su one kojima je kratnost veća od 1. Zbroj svih kratnosti svih realnih nultočaka polinoma ne može biti veći od njegovog stupnja. Ako su  $x_1, \dots, x_k$  sve (realne) nultočke polinoma  $p$ , redom s kratnostima  $m_1, \dots, m_k$ , te ako je zbroj svih tih kratnosti jednak stupnju polinoma ( $m_1 + \cdots + m_k = n$ ), možemo  $p$  zapisati u faktoriziranom obliku

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{m_k}.$$

Ako je zbroj kratnosti svih realnih nultočaka manji od stupnja polinoma, znači da se u njemu pojavljuje bar još jedan kvadratni faktor bez realnih nultočaka. Općenito, polinom stupnja  $n$  ima najviše<sup>11</sup>  $n$  nultočaka.

**Primjer 40.** *Polinom zadan formulom  $p(x) = (x^2 + x + 1)(x - 3)(x + 4)$  ima dvije realne nultočke (obje jednostruke) – to su 3 i  $-4$ . Zbroj njihovih kratnosti je  $1 + 1 = 2$ , što je manje od stupnja polinoma (4). Faktor  $x^2 + 1$  nema realnih nultočki pa  $p$  ne možemo do kraja faktorizirati na faktore oblika  $(x - c)^m$ .*

<sup>11</sup>Da računamo u kompleksnim brojevima: Polinom stupnja  $n$  ima točno  $n$  nultočaka, s tim da neke mogu biti višestruke. U tom slučaju vrijedi: Ako su  $x_1, \dots, x_k$  sve (kompleksne) nultočke polinoma  $p$ , redom s kratnostima  $m_1, \dots, m_k$ , zbroj svih kratnosti jednak je stupnju polinoma ( $m_1 + \cdots + m_k = n$ ), i polinom se može zapisati u faktoriziranom obliku  $p(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{m_k}$ .

**Primjer 41.** Polinom zadan formulom

$$p(x) = 5x^8 - 5x^7 - 15x^6 + 25x^5 - 10x^4$$

je djeljiv s  $(x - 1)$ ,  $(x + 2) = (x - (-2))$  i s  $x = (x - 0)$ :

$$p(x) : (x - 1) = 10x^4 - 15x^5 + 5x^7,$$

$$p(x) : (x + 2) = -5x^4 + 15x^5 - 15x^6 + 5x^7,$$

$$p(x) : x = -10x^3 + 25x^4 - 15x^5 - 5x^6 + 5x^7.$$

Stoga su 1,  $-2$  i 0 njegove nultočke.

Polinom  $p(x)$  je osim s  $(x - 1)$  djeljiv i s  $(x - 1)^2$  i s  $(x - 1)^3$ , ali nije djeljiv s  $(x - 1)^4$ . Stoga je 1 njegova trostruka nultočka.

Polinom  $p$  nije djeljiv s nikojom višom potencijom od  $(x + 2)$  pa je  $-2$  njegova jednostruka nultočka.

Polinom  $p(x)$  osim s  $x$  djeljiv i s  $x^2$  i s  $x^3$  i s  $x^4$ , ali nije djeljiv s  $x^5$ . Stoga je 0 njegova četverostruka nultočka.

Budući da je stupanj od  $p(x)$  jednak 8, što je jednako zbroju kratnosti njegovih realnih nultočaka  $3 + 1 + 4$ , zaključujemo da se  $p(x)$  može zapisati u faktoriziranom obliku

$$p(x) = ax^4(x + 2)(x - 1)^3.$$

Iznos od  $a$  lako odredimo ako u polaznu i prethodnu formulu za  $p(x)$  uvrstimo bilo koji  $x$  koji mu nije nultočka, recimo uvrstimo  $-1$ . Po polaznoj je formuli  $p(-1) = -40$ , a po prethodnoj je  $p(-1) = -8a$ , dakle je  $-8a = -40$ , odnosno  $a = 5$ .

Ako polinom ima cjelobrojne koeficijente, njegove cjelobrojne nultočke su (ako ih ima) među djeljiteljima slobodnog člana.

**Primjer 42.** Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana s

$$f(x) = 0,1x^4 + 0,2x^3 - 1,3x^2 - 1,4x + 2,4.$$

Radi se o polinomu sa slobodnim članom 2,4 pa je sjecište s  $y$ -osi u 2,4.

Za određivanje sjecišta s osi apscisa treba riješiti jednadžbu

$$f(x) = 0,1(x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24) = 0.$$

Kako su djeljitelji od 24 brojevi  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$ , pokušavamo među njima naći nultočke. Lako vidimo da je  $f(1) = 0$  i  $f(-2) = 0$ , dakle smo našli dvije nultočke našeg polinoma.



Stoga je on djeljiv s  $0,1(x-1)(x+2)$ . Tim dijeljenjem ostaje  $x^2 + x - 12$ , odnosno  $f(x) = 0,1(x-1)(x+2)(x^2 + x - 12)$ . Polinom  $x^2 + x - 12$  pak ima nultočke 3 i  $-4$ , koje su onda naravno nultočke i od  $f(x)$ . Budući da broj realnih nultočaka polinoma ne može biti veći od njegova stupnja, zaključujemo da naš polinom ima 4 jednostruke nultočke i da njegov graf siječe  $x$ -os u  $-4$ ,  $-2$ , 1 i 3.

Graf polinoma je krivulja koja ima konačno mnogo prijevoja (promjena rasta u pad i obrnuto) – njih najviše  $n - 1$  – i konačno mnogo sjecišta s osi apscise – njih najviše  $n$ . Polinom neparnog stupnja uvijek ima bar jednu realnu nultocku tj. ako je stupanj polinoma neparan, graf mu ima bar jedno sjecište s  $x$ -osi, a ako je stupanj paran, sjecišta grafa polinoma s  $x$ -osi ne moraju postojati.

Ako je stupanj polinoma neparan i vodeći koeficijent pozitivan, onda lijevi kraj grafa ide prema dolje, desni prema gore (za jako male i za jako velike vrijednosti nezavisne varijable polinom raste); ako je stupanj paran i vodeći koeficijent pozitivan, onda i lijevi i desni kraj grafa idu prema gore (za jako male vrijednosti nezavisne varijable polinom pada, a za jako velike raste). Za negativne vodeće koeficijente pravila su obrnuta: Ako je stupanj neparan i vodeći koeficijent negativan, onda lijevi kraj grafa ide prema gore, desni prema dolje (za jako male i za jako velike vrijednosti nezavisne varijable polinom pada); ako je stupanj paran i vodeći koeficijent negativan, onda i lijevi i desni kraj grafa idu prema dolje (za jako male vrijednosti nezavisne varijable polinom raste, a za jako velike pada).

**Zadatak 13.** Sa slike 2.17 odredite koji grafovi prikazuju polinome parnog, a koji neparnog stupnja te predznake njihovih vodećih koeficijenata.

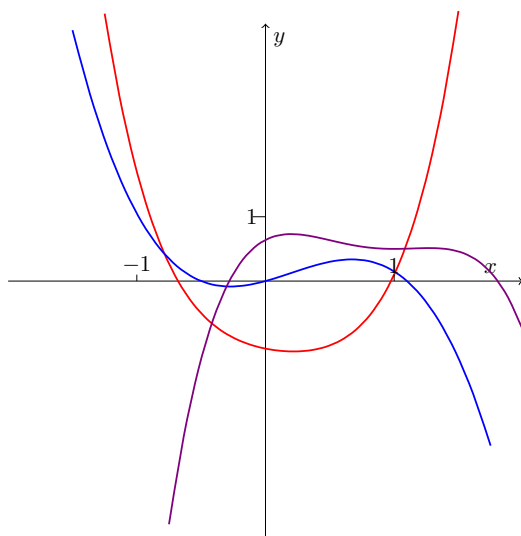


**Ponovimo bitno...** Polinomi su funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  čije formule su zbrojevi potencija varijable (s prirodnim eksponentima) pomnoženih s konstantama. Oni uključuju affine i kvadratne funkcije. Stupanj polinoma je najveći eksponent s kojim se varijabla pojavljuje u njemu. Polinomi imaju najviše onoliko nultočaka koliki im je stupanj. Graf polinoma os ordinata siječe u slobodnom članu (tj. konstantnom pribrojniku u polinomu). 



#### 2.4.4 Racionalne funkcije

Dvije veličine su **obrnuto proporcionalne** ako im je umnožak konstantan. Primjerice, tlak i volumen idealnog plina su obrnuto proporcionalni. Primitimo da kod obrnute proporcionalnosti ima smisla zahtijevati da te veličine



Slika 2.17: Grafovi nekih polinoma.

ne postižu vrijednost nula (ako bi jedna od njih bila nula, onda bi ona bila obrnuto proporcionalna svakoj vrijednosti druge veličine jer je 0 puta bilo koji broj jednako 0).

Ako su  $x$  i  $y$  obrnuto proporcionalne realne varijable i  $y$  shvatimo kao funkciju od  $x$ , radi se o ovisnosti tipa  $f(x) = \frac{a}{x}$ . Ona očigledno nije polinom jer nije definirana za  $x = 0$ . Ako malo bolje promotrimo, radi se o funkciji koja je kvocijent polinoma stupnja 0 i polinoma stupnja 1. Za razliku od zbroja, razlike i umnoška dvaju polinoma (koji ponovno daju polinom), kvocijent dvaju polinoma ne mora biti polinom.

**Definicija 7 (Racionalne funkcije).** *Racionalne funkcije su kvocijenti dvaju polinoma.*

Njihovu prirodnu domenu čine svi realni brojevi koji nisu nultočke nazivnika (dakle, ako nazivnik nema realnih nultočaka, prirodna domena im je cijeli skup  $\mathbb{R}$ ). Pritom treba pripaziti: Prirodnu domenu određujemo prije eventualnog skraćivanja.

**Primjer 43.** *Funkcija zadana s*

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

*nije isto što i polinom zadan s  $g(x) = x + 2$ . Naime, kraćenje razlomka je dijeljenje brojnika i nazivnika istim brojem (u našem primjeru s  $(x - 2)$ ), što*

smijemo činiti samo ako smo sigurni da taj broj nije nula. Stoga je potrebno prvo odrediti prirodnu domenu za dano pravilo. Za  $x$  iz te domene onda nazivnik neće biti nula i moći ćemo kratiti, ali za  $x$  koji nije u toj domeni, funkcija nije definirana.

Konkretno, prirodna domena funkcije  $f$  je skup  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Za  $x$  iz te domene je  $f(x) = x + 2$ , tj. graf joj je do na jednu točku jednak grafu afine funkcije zadane pravilom  $g(x) = x + 2$ . Funkcija  $f$  je stoga racionalna, a ne afina funkcija. Ta točka koja čini razliku između grafova funkcija  $f$  i  $g$  je točka  $(2, 3)$ , koja je na grafu funkcije  $g$ , ali nije na grafu funkcije  $f$  koji izgleda kao da smo „iščupali” točku  $(2, 3)$  iz grafa funkcije  $g$ , tj. kao graf od  $g$ , ali s praznom točkom na poziciji  $(2, 3)$ .

Najjednostavnije racionalne funkcije su funkcije zadane formulom oblika

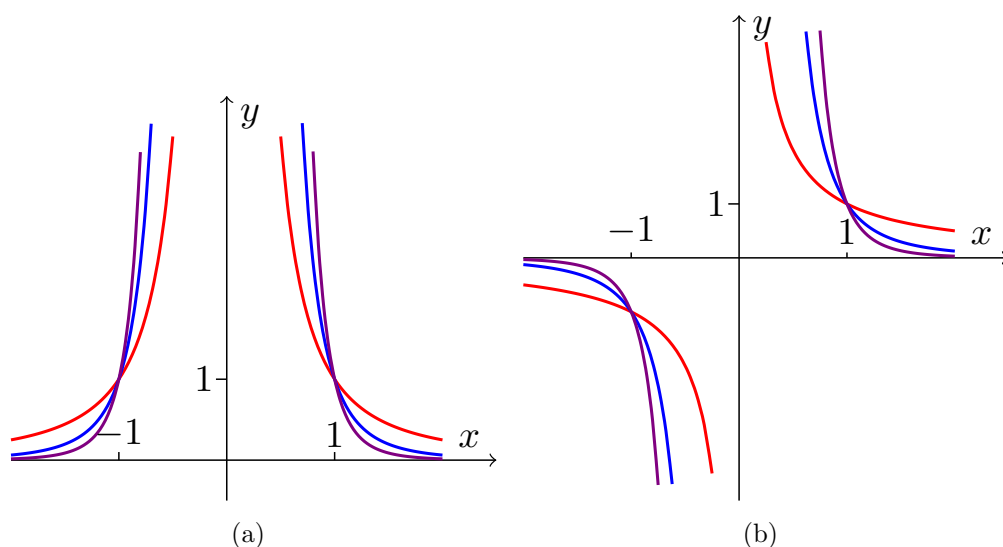
$$r_n(x) = \frac{1}{x^n}$$

gdje je  $n \in \mathbb{N}$ , dakle „monomi s negativnim cijelim eksponentima”. Njima je prirodna domena  $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$  te im grafovi ne sijeku os ordinata. Kako je razlomak jednak nuli točno ako mu je brojnik jednak nuli, a brojnik ovakve funkcije je 1, slijedi da ove funkcije nemaju nultočki pa im grafovi ne sijeku ni os apscisa. Iz formule je vidljivo da su za  $n$  neparan ove funkcije neparne i poprimaju pozitivne vrijednosti za pozitivne  $x$ , a negativne vrijednosti za negativne  $x$ , pa im je graf u I. i III. kvadrantu. Za paran  $n$  su ove funkcije parne i poprimaju samo pozitivne vrijednosti pa im je graf u I. i II. kvadrantu (vidi sliku 2.18).

Na slikama 2.18 vidljivo je da za funkcije  $r_n$  postoje po dva pravca u ravnini koji se ističu time da grafovi prilježu uz njih. Ti pravci su njihove asimptote. Općenito, **asimptota krivulje** je pravac koji ima svojstvo da su mu točke krivulje sve bliže što su dalje od ishodišta. Primijetimo da to ujedno znači i da je svaki pravac sam sebi asimptota. Vezano za grafove funkcija obično se ističu tri vrste asimptota: horizontalne, vertikalne i kose. Precizne definicije svih tih vrsta asimptota biti će dane u poglavlju 4.1, a ovdje ćemo se samo intuitivno upoznati s horizontalnim i vertikalnim asimptotama.

**Horizontalna asimptota** krivulje je horizontalni pravac  $y = L$  u pravokutnom koordinatnom sustavu koji ima svojstvo da je ta krivulja sve bliža tom pravcu što su joj točke više lijevo ili desno, tj. krivulja se približava horizontalnoj asimptoti s porastom i/ili padom vrijednosti apscise (ako je  $x$  jako velik ili jako mali,<sup>12</sup>  $f(x) \approx L$ ). Graf funkcije može imati najviše dvije različite horizontalne asimptote, jednu lijevu i jednu desnu (objasnite zašto!). Sve racionalne funkcije oblika  $r_n$  imaju svojstvo da je  $r_n(x) \approx 0$  za

<sup>12</sup>Jako mali broj ne znači da se radi o broju blizu nule, nego o „jako negativnom” broju.



Slika 2.18: Grafovi racionalnih funkcija  $r_n(x) = \frac{1}{x^n}$  za paran  $n$  (a) i za neparan  $n$  (b).

jako velike i jako male  $x$ , tj. pravac  $y = 0$  ( $x$ -os) je horizontalna asimptota njihovih grafova. Kod racionalnih funkcija se ili pojavljuje jedna obostrana horizontalna asimptota ili je uopće nema. Vrijede sljedeća pravila:

- Ako je nazivnik racionalne funkcije  $r$  strogo većeg stupnja od brojnika, pravac  $y = 0$  je obostrana horizontalna asimptota grafa od  $r$ .
- Ako su nazivnik i brojnik racionalne funkcije  $r$  jednakih stupnjeva, pravac  $y = L$  je obostrana horizontalna asimptota grafa od  $r$ , gdje je  $L$  kvocijent vodećeg koeficijenta brojnika i vodećeg koeficijenta nazivnika.
- Ako je nazivnik racionalne funkcije  $r$  manjeg stupnja od brojnika, graf od  $r$  nema horizontalnu asimptotu.

Također, grafovi funkcija  $r_n$  imaju  $y$ -os (pravac  $x = 0$ ) kao vertikalnu asimptotu. **Vertikalna asimptota** krivulje je vertikalni pravac  $x = c$  u pravokutnom koordinatnom sustavu koji ima svojstvo da je ta krivulja sve bliža tom pravcu što su joj točke više gore ili dolje, tj. krivulja se sve više približava vertikalnoj asimptoti što je apscisa točke krivulje bliža  $c$  (ako je  $x \approx c$ ,  $f(x)$  je jako velik ili jako mali). Vertikalnih asimptota graf funkcije može imati proizvoljno mnogo—koliko ih je, ovisi i o pravilu i o domeni. Općenito, vertikalne asimptote se najčešće (no ne uvijek) pojavljuju u tzv. „rupama

u domeni” (slučajevi kad samo jedan broj iz nekog intervala nije u domeni, recimo gore je 0 „rupa u domeni” svih funkcija  $r_n$ ) ili na (otvorenim) rubovima domene. Kod racionalnih funkcija vertikalne asimptote se pojavljuju kad nazivnik (nakon maksimalnog skraćivanja formule funkcije) ima realnih nultochki (tada su vertikalne asimptote točno pravci  $x = c$  gdje su  $c$  redom nultochke nazivnika).

**Primjer 44.** Funkcija  $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana s  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$  ima „rupu u domeni”, ali njen graf nema vertikalnu asimptotu  $x = 2$ . Uzrok anomalije, tj. nepojavljivanja vertikalne asimptote u nultochki nazivnika je u tome što se algebarski razlomak koji predstavlja formulu funkcije mogao skratiti tako da rezultat do na jednu točku ispadne polinom, kako smo vidjeli u primjeru 43.

**Primjer 45.** Racionalna funkcija zadana formulom

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 - 9x - 9} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-3)(x+3)(x+1)}$$

za prirodnu domenu ima skup  $\mathbb{R}$  bez brojeva  $-1$ ,  $3$  i  $3$ . Kako joj je nazivnik većeg stupnja nego brojnik, ona za horizontalnu asimptotu ima pravac  $y = 0$  ( $x$ -os). Nadalje, kako joj se formula može skratiti do oblika  $f(x) = \frac{x+2}{(x-3)(x+3)}$ , ona ima dvije vertikalne asimptote ( $x = 3$  i  $x = -3$ ). Graf ove funkcije prikazan je na slici 2.19.

**Primjer 46.** Ovisnost tlaka o volumenu idealnog plina, pri konstantnoj temperaturi i množini, opisana je s

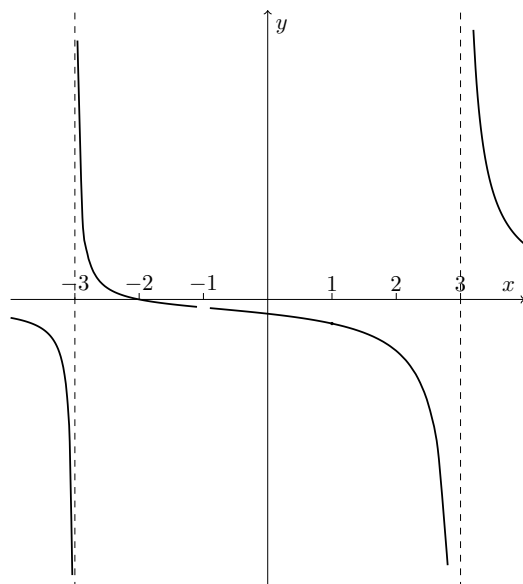
$$p(V) = \frac{nRT}{V},$$

tj. uz odabir  $x = V$ ,  $y = p$  i  $a = nRT$  se radi o racionalnoj funkciji zadanoj s pravilom oblika

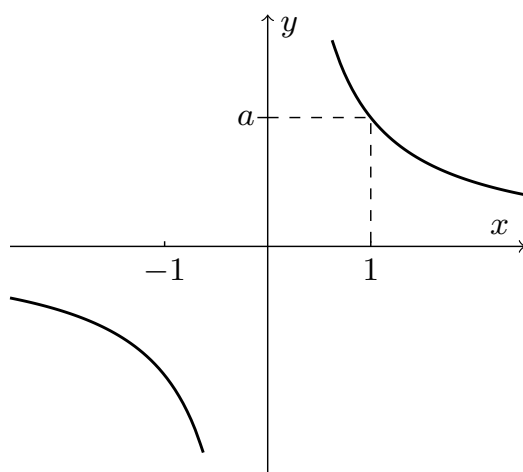
$$y = \frac{a}{x},$$

s  $a > 0$ . Graf takve funkcije dobije se iz grafa funkcije  $f_1(x) = \frac{1}{x}$  (crvena istostrana hiperbola na slici 2.18 (b)) u skladu s pravilima za transformaciju grafa (vidi poglavlje 2.3), vidi sliku 2.20.

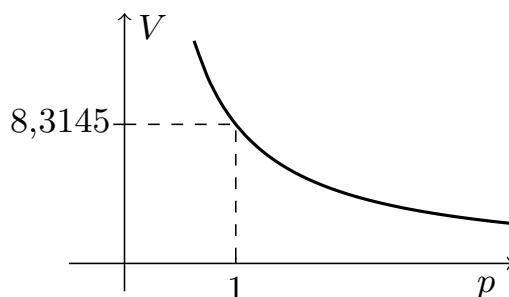
Mnogi bi graf na slici 2.20 prihvatili kao graf funkcije tlaka idealnog plina za  $a = nRT$ . No, u našem konkretnom slučaju trebamo uzeti u obzir da se ne radi o apstraktnoj matematičkoj funkciji u kojoj su  $x$ ,  $y$  i  $a$  samo realni brojevi. Ovdje su to iznosi konkretnih fizičkih veličina i ne mogu biti negativni. Stoga je za taj slučaj besmisleno crtati obje grane grafa — lijeva grana odnosi se na negativne vrijednosti  $x$ , tj. ticala bi se negativnih iznosa



Slika 2.19: Graf racionalne funkcije zadane formulom  $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^3+x^2-9x-9}$ .



Slika 2.20: Graf funkcije  $f(x) = a/x$  za  $a > 0$ .



Slika 2.21: Ne baš korektno prikazana ovisnost tlaka o volumenu idealnog plina pri  $n = 0,01$  mol i  $T = 100$  K.

volumena te je ona suvišna. Uz to,  $x$  i  $y$  nemaju jednoznačnu i s kontekstom povezanu interpretaciju te bi trebalo odgovarajuće promijeniti oznake. Stoga bi prikaz na slici 2.21 bio bolji prikaz grafa ovisnosti tlaka idealnog plina o volumenu, ako je množina primjerice  $n = 0,01$  mol i temperatura  $T = 100$  K.

Prikaz na slici 2.21 ima jednu prirodnoznatstvenu i jednu matematičku nekonzistentnost. Brojevi na koordinatnim osima nisu volumen i tlak, nego samo njihovi iznosi za odabrane jedinice. Stoga na slici 2.21 osi nisu korektno označene — os apscisa prikazuje iznose  $V/\text{m}^3$ , a os ordinata iznose  $p/\text{Pa}$ . No, ako tako samo promijenimo oznake, nismo više u skladu s početnim odabirom  $x = V$  i  $y = p$ . Što je krivo? Ovaj problem već smo spomenuli u primjeru 35. Naime, umjesto  $x = V$ ,  $y = p$  i  $a = nRT$  preciznije smo trebali pisati  $x = V/\text{m}^3$ ,  $y = p/\text{Pa}$  i  $a = nRT/\text{J}$ , ali smo dogovorno podrazumijevali da naš odabir  $x$ ,  $y$  i  $a$  upravo to znači. Tek uz takvu interpretaciju matematičkih veličina  $x$ ,  $y$  i  $a$  imamo korektan matematički model prirodnoznatstvenog odnosa. Pravilan prikaz vidljiv je na slici 2.22.

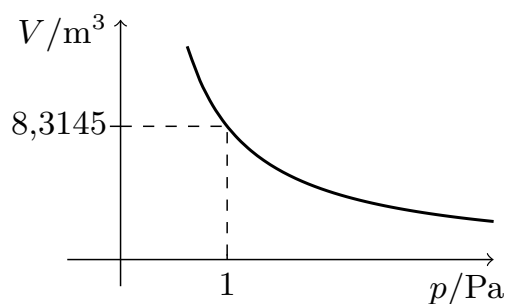
**Zadatak 14.** Virijalna jednadžba stanja plina (njena prva dva člana, vidi primjer 510) ima oblik

$$pV = nRT \left( 1 + \frac{Bn}{V} \right),$$

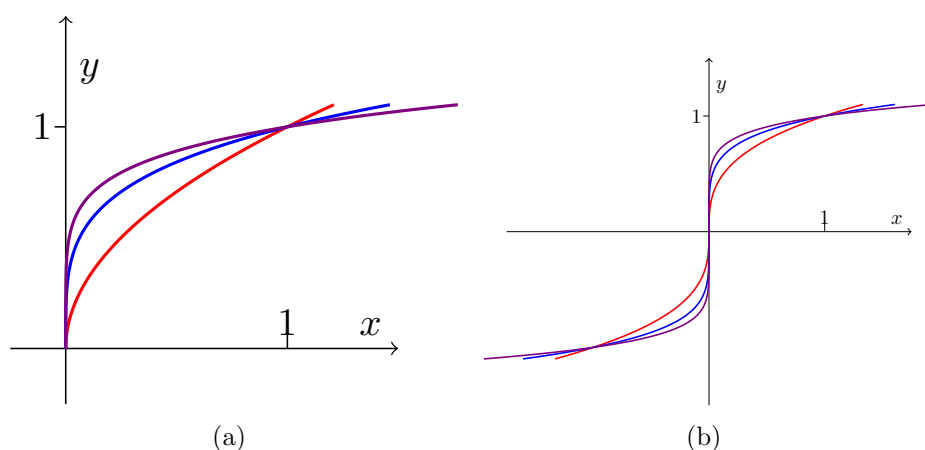
gdje je  $B$  (ne nužno pozitivan) koeficijent ovisan o vrsti plina. Kako sve može izgledati graf ovisnosti  $p$  o  $V$  ako je stanje plina opisano virijalnom jednadžbom?



**Ponovimo bitno...** Racionalne funkcije su kvocijenti dvaju polinoma, a prirodna domena im je skup realnih brojeva bez nultočaka naziv-



Slika 2.22: Pravilno prikazana visnost tlaka o volumenu idealnog plina pri  $n = 0,01$  mol i  $T = 100$  K.



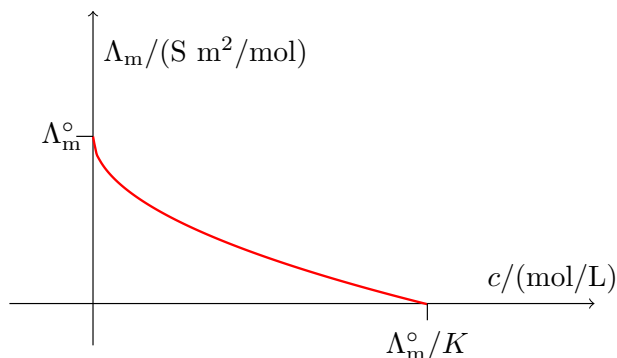
Slika 2.23: Funkcije zadane s  $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$  za  $n$  paran (a) i  $n$  neparan (b).

nika. Često posjeduju asimptote, tj. pravce kojima se graf vizualno približava kako se točka grafa udaljava od ishodišta. Racionalna funkcija ima horizontalnu asimptotu ako joj nazivnik nije manjeg stupnja od brojnika, a vertikalne asimptote ima u nultočkama nazivnika (nakon eventualnog kraćenja zajedničkih faktora brojnika i nazivnika). 🐤🐤🐤

### 2.4.5 Korijeni

Neka je  $y = x^n$ . Ako je  $n$  neparan, onda je vrijednost od  $x$  jedinstveno određena vrijednošću  $y$  i kažemo da je  $x = \sqrt[n]{y}$ . Primjerice,  $2^3 = 8$  znači da je  $2 = \sqrt[3]{8}$ . Budući da je (za neparan  $n$ )  $x^n$  uvijek istog predznaka kao  $x$ , slijedi da su **neparni korijeni** definirani za sve realne brojeve te ih možemo shvatiti





Slika 2.24: Ovisnost molarne provodnosti jakog elektrolita o njegovoj koncentraciji.

kao funkcije  $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Radi se o rastućim funkcijama bez asimptota, čiji grafovi sijeku koordinatne osi samo u ishodištu (slika 2.23 (b)). Uočimo i da je os ordinata tangenta na te grafove.

Ako je  $n$  paran, onda iz  $y = x^n$  (recimo,  $y = x^2$ ) slijedi da je  $y \geq 0$ . Stoga u svijetu realnih brojeva parni korijeni negativnih brojeva nemaju smisla. Uz to, vrijednost od  $x$  nije jedinstveno određena vrijednošću  $y$  (primjerice,  $(-3)^2 = 3^2 = 9$ ) — kvadriranje (i općenito parne potencije) nisu injekcije. Stoga se kod korjenovanja piše  $\sqrt{9} = \pm 3$ . No, želimo li korijene promatrati kao funkcije, njihova vrijednost mora biti jedinstveno određena te se dogovorno uzima da **parni korijeni**, promatrani kao funkcije, pozitivnih brojeva daju pozitivne brojeve. Imamo dakle  $\sqrt[n]{\cdot} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  za  $n$  paran. I ovo su rastuće funkcije, čiji grafovi sijeku koordinatne osi samo u ishodištu, no graf se zbog prirodne domene  $[0, +\infty)$  nalazi samo u prvom kvadrantu Kartezijevog kooordinatnog sustava (slika 2.23 (a)).

**Zadatak 15.** *Kohlrauschov zakon opisuje ovisnost molarne provodnosti  $\Lambda_m$  o koncentraciji  $c$  jakog elektrolita i glasi*

$$\Lambda_m = \Lambda_m^\circ - K\sqrt{c}.$$

*Pritom su  $\Lambda_m^\circ$  i  $K$  pozitivne konstante. Koristeći transformacije grafova objasnite zašto pripadni graf ima oblik prikazan slikom 2.24.*

Sad konačno možemo reći i što su **algebarske funkcije**: To su sve funkcije takve da se zavisna varijabla iz nezavisne dobiva isključivo s konačno mnogo primjena osnovne četiri računske operacije i korjenovanja na nezavisnu varijablu i konstante. U algebarske funkcije mogu se uvrštavati i fizikalne veličine skupa s mjernim jedinicama, uz uzimanje u obzir da se fizikalne veličine mogu

zbrajati, oduzimati i izjednačavati samo ako imaju istu fizikalnu dimenziju, tj. ako se mogu izraziti u istoj mjernoj jedinici.

**Primjer 47.** Funkcija zadana formulom

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x^2+1}} - x - \sqrt{x}$$

je primjer algebarske funkcije.

**Primjer 48.** Ovisnost pozitivne veličine  $\iota$  o pozitivnoj veličini  $\chi$  opisana je jednadžbom

$$\iota = \frac{1}{3 \diamond^{-1} \chi - 6 \diamond^{-1} \cdot 8 \heartsuit^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\chi} + 2 \heartsuit \diamond^{-1}}.$$

Pritom su  $\diamond$  i  $\heartsuit$  neke mjerne jedinice.

Vidimo da je  $\iota$  algebarska funkcija od  $\chi$ . Nadalje, u nazivniku imamo tri člana: prvi ima jedinicu  $\diamond^{-1}$  pomnoženu s jedinicom od  $\chi$ , drugi ima jedinicu  $\diamond^{-1} \heartsuit^{1/2}$  pomnoženu s korijenom jedinice od  $\chi$ , a treći ima jedinicu  $\heartsuit \diamond^{-1}$ . Da bi se oni mogli zbrojiti i oduzeti, te tri jedinice moraju biti jednake. Označimo li jedinicu od  $\chi$  s jed. imamo uvjet

$$\diamond^{-1} \cdot \text{jed.} = \heartsuit \diamond^{-1} \cdot \text{jed.}^{1/2} = \heartsuit \diamond^{-1},$$

odnosno

$$\text{jed.} = \heartsuit \text{jed.}^{1/2} = \heartsuit,$$

iz čega vidimo da je jedinica od  $\chi$  točno  $\heartsuit$ . Budući da je jedinica nazivnika  $\heartsuit \diamond^{-1}$ , a brojnik je čisti broj, vidimo da je jedinica od  $\iota$  jednaka  $\heartsuit^{-1} \diamond$ .

**Zadatak 16.** Ako varijabla  $x$  ima jedinicu  $\spadesuit$ , koju jedinicu treba imati konstanta  $a$  da bi izraz  $f(x) = 2x^2 - \frac{a}{\sqrt{x}}$  bio smislen, te koja je tada jedinica od  $f(x)$ ?



**Ponovimo bitno...** Korijeni su rastuće realne funkcije. Neparni korijeni kao prirodnu domenu imaju cijeli skup  $\mathbb{R}$ , a u prirodnoj domeni parnih korijena su samo nenegativni brojevi.

## 2.5 Kompozicija funkcija i inverzne funkcije

Mnoge funkcije djeluju tako da prvo nezavisnu varijablu transformiraju po jednom pravilu u neku međuvrijednost, a onda tu međuvrijednost transformiraju u konačnu vrijednost funkcije. Takvom kombinacijom pravila (uvršćavanjem jednog pravila u drugo) dobivamo novu funkciju koju možemo i ne moramo gledati kao sastavljenu od polazne dvije.

**Primjer 49.** Ako želimo odrediti masu otopljene tvari u otopini poznate množinske koncentracije  $c$  i poznatog volumena  $V$ , možemo prvo iz  $c$  i  $V$  odrediti množinu otopljene tvari prema pravilu  $n = cV$ , a zatim iz množine odrediti masu prema pravilu  $m = nM$ , gdje je  $M$  molarna masa otopljene tvari: Dobili smo kompoziciju funkcija množine u ovisnosti o koncentraciji i volumenu s funkcijom mase u ovisnosti o množini. Alternativno, mogli smo odmah iskombinirati formule tako da dobijemo pravilo  $m = cMV$ , čime izbjegavamo računanje međurezultata  $n$  ako nam on nije od značaja.

Preciznije,

**Definicija 8 (Kompozicija funkcija).** Kompozicija funkcija  $f : A \rightarrow B$  i  $g : C \rightarrow D$  je funkcija  $f \circ g$  čije pravilo je dano s

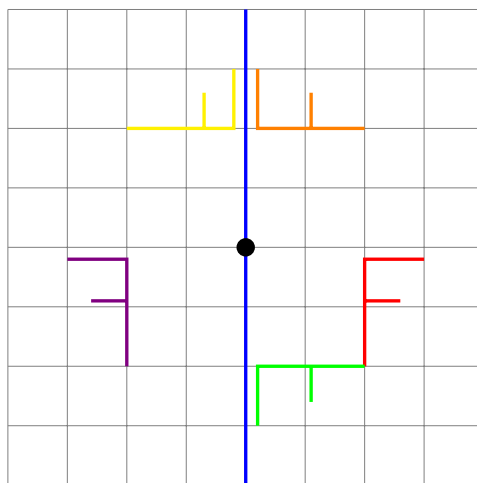
$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

No, da ne zaboravimo da funkciju čine i domena i kodomena, što je domena, a što je kodomena od  $f \circ g$ ? Rezultati od  $f \circ g$  su negdje gdje su rezultati od  $f$  jer se dobiju uvrštavanjem nečega ( $g(x)$ -ova) u funkciju  $f$ . Dakle, kodomena od  $f \circ g$  je kodomena od  $f$ , tj. skup  $B$ . S druge strane, u  $f \circ g$  uvrštavamo  $x$ -eve koje prvo moramo uvrstiti u  $g$  da bismo mogli izračunati  $f(g(x))$ , dakle su  $x$ -evi iz domene od  $g$  odnosno domena od  $f \circ g$  je skup  $C$ . Sve skupa to nam daje  $f \circ g : C \rightarrow B$ . No, pritom skupovi  $A$  i  $D$  ne smiju biti bilo kakvi. Budući da je  $D$  kodomena od  $g$ , znamo da je sigurno  $g(x) \in D$  (za sve  $x \in C$ ). Budući da  $g(x)$  moramo moći uvrstiti u  $f$  slijedi da svaki  $g(x)$  mora biti i u domeni  $A$  od  $f$ , tj. mora vrijediti  $D \subseteq A$  da bi kompozicija  $f \circ g$  bila smisljena. U praksi se to lako vidi: Ukoliko izračunati  $g(x)$  ne možemo uvrstiti u  $f$ , kompozicija  $f \circ g$  nije definirana u  $x$ .

**Primjer 50.** Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana s  $f(x) = 2x + 1$ , a  $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  s  $g(x) = \sqrt{x}$ , onda imamo da je  $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 1$  i koji god nenegativan  $x$  uzmemo to je moguće izračunati te je  $f \circ g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Zamijenimo li redoslijed, nailazimo na probleme. Formalno,  $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = \sqrt{2x + 1}$  te se sve čini smisljeno. No, kao domenu od  $f$  uzeli smo  $\mathbb{R}$  te bi  $g \circ f$  trebala također biti definirana na  $\mathbb{R}$ . Za neke realne  $x$ , primjerice za  $x = -5$ , broj  $2x + 1$  je negativan te se ne može izračunati  $g \circ f(x)$  za takve  $x$ . Stoga  $g \circ f$  nije definirana uz početni odabir domene od  $f$ . Ako bi nam pak bilo dovoljno za domenu od  $f$  uzeti skup  $[-\frac{1}{2}, +\infty)$  (tj. brojeve  $x$  za koje je  $2x + 1 \geq 0$ ), onda bi i  $f \circ g$  i  $g \circ f$  bile dobro definirane (ali različite).

Prethodni primjer važan je ne samo jer upozorava na oprez pri baratanju domenama kod kompozicije, nego na još jednu bitnu stvar: kod kompozicije



Slika 2.25: Nekomutativnost kompozicije funkcija

funkcija treba paziti na redoslijed. Čak i ako su definirane obje kompozicije  $f \circ g$  i  $g \circ f$ , one u pravilu nisu iste funkcije. Neformalnije rečeno, nije svejedno koje pravilo uvrštavamo u koje.

**Primjer 51.** Ako su  $x$  sastojci za kolač,  $f$  miješanje,  $g$  pečenje, onda je  $f(x)$  tijesto za kolač, a  $g(f(x)) = g \circ f(x)$  je ispečeni kolač, dok su  $g(x)$  spečeni sastojci, a  $f(g(x)) = f \circ g(x)$  su izmiješani prethodno ispečeni sastojci.

**Primjer 52.** Pogledajte crveno slovo  $F$  na slici 2.25. Ako ga prvo zrcalimo preko plavog pravca (ljubičasto) i zatim zarotiramo u pozitivnom smjeru za pravi kut oko crne točke, doći će u zelenu poziciju. Ako ga pak prvo zarotiramo u pozitivnom smjeru za pravi kut oko crne točke (narančasto), a zatim zrcalimo s obzirom na plavu os, doći će u žutu poziciju. Dakle, kompozicija osne simetrije i rotacije za  $90^\circ$  oko točke na osi nije komutativna.

U nekim slučajevima desi se da kod uzastopnog primjenjivanja dva pravila rezultat na kraju izgleda kao početak — što je prvo pravilo promijenilo, drugo je vratilo u polazno stanje.

**Primjer 53.** Ako crveno slovo  $F$  iz prethodnog primjera (slike 2.25) prvo zarotirate za  $90^\circ$  u pozitivnom smjeru oko crne točke (narančasta pozicija), a zatim oko iste točke za  $270^\circ$  (isto u pozitivnom smjeru), doći će u polaznu, crvenu poziciju.

U takvim slučajevima kažemo da je druga funkcija inverzna prvoj i prva inverzna drugoj. Preciznije,

**Definicija 9 (Inverzna funkcija).** Inverzna funkcija funkcije  $f : A \rightarrow B$  je funkcija  $g : B \rightarrow A$  (ako takva postoji) takva da je  $f \circ g(x) = x$  za sve  $x \in B$  i  $g \circ f(x) = x$  za sve  $x \in A$ . Tada pišemo  $g = f^{-1}$ .

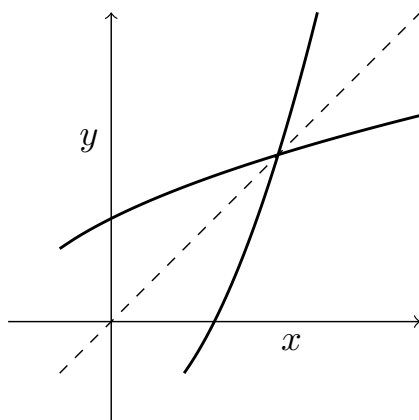
Pojednostavljeno rečeno: ako  $f$   $x$ -u pridružuje  $y$  (recimo, broju 2 broj  $-3$ ), onda  $f^{-1}$   $y$ -u pridružuje  $x$  (broju  $-3$  broj 2).

Nemaju sve funkcije inverze: Funkcija ima inverz ako i samo ako je bijekcija, tj. injekcija i surjekcija. Zašto su ta dva svojstva bitna? Injektivnost znači da različitim  $x$ -evima pridružujemo različite  $y$ . Kad bi funkcija  $f$  imala inverz, a da pritom dvama  $x$ -evima  $x_1$  i  $x_2$  bude pridružen isti  $y$ , onda bi inverz  $f^{-1}$  morao tom  $y$ -u pridružiti i  $x_1$  i  $x_2$ , tj.  $f^{-1}$  ne bi bio funkcija. Surjektivnost znači da je svaki  $y$  iz kodomena  $B$  pridružen nekom  $x$ -u iz domene  $A$ , dakle se može uzeti taj  $x$  kao  $f^{-1}(y)$ , tj. moguće je definirati pravilo pridruživanja s domenom  $B$ .

Dosad smo se susreli s jednim važnim primjerom inverznih funkcija, korijenima. Pritom smo imali dva slučaja. Neparni korijeni su inverzne funkcije neparnih monoma (sad mislimo na monome s koeficijentom 1), recimo  $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je inverzna funkcija bijekcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ , jer za sve realne brojeve  $x$  i  $y$  vrijedi  $\sqrt[3]{x^3} = x$  (tj.  $f^{-1} \circ f(x) = x$ ) i  $(\sqrt[3]{y})^3 = y$  (tj.  $f \circ f^{-1}(y) = y$ ). S druge strane, parni monomi nisu bijekcije s  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{R}$ . Uzmimo primjerice kvadriranje. Ono nije injekcija jer recimo  $-2$  i  $2$  kvadrirani oba daju isti rezultat 4, a nije ni surjekcija jer se negativni brojevi ne mogu napisati kao kvadrati realnih brojeva. Surjektivnost lako postignemo: Promijenimo kodomenu  $\mathbb{R}$  u sliku te funkcije  $[0, +\infty)$ . Time smo, formalno gledajući, promijenili funkciju (funkcija je osim pravilom određena i domenom i kodomenom), ali ta promjena je prilično nebitna jer nas ni u kom smislu ne ograničava, niti mijenja graf. Stoga tako izmijenjenu funkciju nećemo posebno označavati.

Injektivnost se pak ne može postići bez „zahvata” u domeni, točnije sužavanja domene. Takva promjena funkcije u novu kod koje se mijenja samo domena, i to na manji skup, zove se **restrikcija funkcije**. Restrikcije ćemo jednostavnosti radi, nepravilno, označavati jednako kao i polazne funkcije, ali ćemo pritom jasno isticati novu domenu. U slučaju kvadriranja ako za domenu uzmemo  $[0, +\infty)$ , onda smo dobili injekciju: kvadrati različitih nenegativnih brojeva su različiti. Stoga  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  doduše nema inverza, ali  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $f(x) = x^2$  ga ima i to je točno funkcija drugog korijena.

Ako znamo graf bijekcije  $f$  u Kartezijevom koordinatnom sustavu, onda je lako nacrtati graf njezine inverzne funkcije: Graf od  $f^{-1}$  je zrcalno (osno) simetričan grafu od  $f$  s obzirom na pravac  $y = x$  (slika 2.26). Ako koristimo općenitiji pravokutni koordinatni sustav, ta više neće biti vidljiva. Usporedi-



Slika 2.26: Grafovi dviju međusobno inverznih funkcija u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

te primjerice grafove funkcije kubiranja i funkcije trećeg korijena (vidi slike 2.16 (b) i 2.23 (b)).

Korisno je zapamtiti još i sljedeće: Ako je neka bijekcija rastuća, njen inverz je također rastuća funkcija, a ako je bijekcija padajuća, njen inverz je padajuća funkcija.



**Ponovimo bitno...** Kompozicija funkcija  $f$  i  $g$  je definirana s  $f \circ g(x) = f(g(x))$ . Domena joj je jednaka domeni „unutrašnje” funkcije  $g$ , a kodomena joj je jednaka kodomeni „vanjske” funkcije  $f$ . Inverzna funkcija bijekcije  $f : A \rightarrow B$  je bijekcija  $f^{-1} : B \rightarrow A$  sa svojstvom da su  $f \circ f^{-1}$  i  $f^{-1} \circ f$  identitete. Graf inverzne funkcije  $f^{-1}$  je u Kartezijevom koordinatnom sustavu zrcalno simetričan grafu od  $f$  obzirom na pravac  $y = x$ . 🦆🦆🦆

## 2.6 Transcendentne funkcije

Elementarne funkcije koje nisu algebarske, tj. čija pravila pridruživanja ne možemo izraziti konačnim brojem operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i potenciranja s racionalnim eksponentima zovu se **transcendentne funkcije**. Najvažnije među njima su eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije. Zapravo, **elementarne funkcije** se definiraju kao sve funkcije koje se mogu izraziti preko konačno mnogo primjena osnovne četiri računske operacije te kompozicije na algebarske, eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske i ciklometrijske funkcije. Stoga su temeljne transcendentne funkcije eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske i ciklo-

metrijske funkcije. Razlika između algebarskih i transcendentnih funkcija ima i svoju fizikalnu interpretaciju: Algebarske funkcije su one u koje ima smisla uvrštavati i mjerne jedinice, dok u transcendentne funkcije ima smisla uvrštavati samo „čiste” brojeve.

### 2.6.1 Eksponencijalne funkcije

Dosad smo se susreli s funkcijama koje računaju cjelobrojne potencije varijable (monomi i kvocijenti monoma) te racionalne potencije (korijeni i njihove kompozicije s monomima), tj. s funkcijama koje varijabli  $x$  pridružuju  $x^a$  gdje ju  $a$  racionalan broj. Ukratko, nezavisna varijabla nam je bila u bazi, a (racionalni) eksponent je bio konstantan. Funkcije kod kojih je (ne nužno racionalna) baza konstantna, a eksponent je varijabla, zovu se eksponencijalnim funkcijama. Preciznije:

**Definicija 10 (Eksponencijalne funkcije).** *Eksponencijalna funkcija s bazom  $a$  je funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana formulom*

$$f(x) = a^x.$$

Pritom baza  $a$  ne može biti bilo kakav realan broj. Kao prvo, ako bi bilo  $a = 0$  imali bismo  $f(x) = 0$  za  $x \neq 0$  i  $f(0)$  ne bi bio definiran,<sup>13</sup> dakle nešto poput konstantne funkcije s „rupom” u domeni (to bi točno bila funkcija  $f(x) = \frac{0}{x}$ ). Ako bismo uzeli  $a = 1$ , dobili bismo pravu konstantnu funkciju  $f(x) = 1$ . Dakle, baza eksponencijalne funkcije ne smije biti ni 0 ni 1.

Može li baza eksponencijalne funkcije biti negativna? Ne. Najjednostavniji primjer da bi nam to izazvalo probleme je pokušaj definiranja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s  $f(x) = (-1)^x$ . Kako je u definiciji navedeno, mi želimo da prirodna domena bude cijeli  $\mathbb{R}$ , tj. da kao  $x$  možemo uvrstiti bilo koji realan broj. Ako primjerice uvrstimo  $x = -\frac{1}{2}$  u  $f(x) = (-1)^x$ , dobili bismo  $f(-\frac{1}{2}) = (-1)^{1/2} = \sqrt{-1}$ , što nije realan broj, dakle takva funkcija ne bi bila realna funkcija. Sve skupa nam daje uvjet: Baza eksponencijalne funkcije mora biti pozitivan broj različit od 1 (kratko:  $a > 0$  i  $a \neq 1$ ).

**Primjer 54.** *Funkcija zadana formulom  $f(x) = \frac{1}{3-x}$  na prvi pogled nije eksponencijalna, no koristeći pravila o transformiranju algebarskih izraza lako je uvjeriti se da se zapravo radi o eksponencijalnoj funkciji s bazom 3:*

$$f(x) = \frac{1}{3-x} = 3^x.$$

*Slično, funkcija zadana pravilom  $g(x) = 4^{2x}$  je eksponencijalna funkcija s bazom  $4^2 = 16$ .*

<sup>13</sup>Kao što nije definirano  $0/0$ , nije definirano ni  $0^0$ .

**Napomena 6.** Osvrnimo se ovdje na neke česte pogreške. Prvo, ne govorimo o eksponencijalnoj funkciji nego o eksponencijalnim funkcijama — za svaku dozvoljenu bazu imamo po jednu eksponencijalnu funkciju. Drugo, kad govorimo o konkretnoj eksponencijalnoj funkciji, njena baza  $a$  je fiksna — ona definira funkciju o kojoj govorimo — te je u kontekstu grafova besmisleno „tražiti” tu bazu po osi apscisa<sup>14</sup> odnosno reći da je prirodna domena eksponencijalne funkcije skup pozitivnih realnih brojeva različitih od 1: Domene funkcija sastoje se od mogućih iznosa njihovih nezavisnih varijabli, a ne od mogućih iznosa konstantnih parametara koje ih određuju.

Ovisno o tome je li baza eksponencijalne funkcije veća ili manja od 1 dobit ćemo rastuću ili padajuću eksponencijalnu funkciju: Eksponencijalne funkcije s bazom  $a > 1$  su rastuće, a one za koje je  $0 < a < 1$  su padajuće. Grafovi svih eksponencijalnih funkcija os ordinata sijeku u točki  $(0, 1)$  jer je za sve njih  $f(0) = a^0 = 1$ .

**Zadatak 17.** U kojoj točki graf funkcije s formulom  $f(x) = C a^x$  siječe os ordinata?

Eksponencijalne funkcije nemaju nultočaka, štoviše: iznosi su im strogo pozitivni, tj. slika svake eksponencijalne funkcije je  $\langle 0, +\infty \rangle$  (graf im je uvijek iznad osi apscisa). Uz modifikaciju kodomene na taj skup, eksponencijalne funkcije postaju bijekcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ .

Os apscisa je jednostrana horizontalna asimptota za svaku eksponencijalnu funkciju: Ako je baza  $a > 1$ , radi se o asimptoti na lijevoj strani (brojevi  $a^x$  za jako negativne  $x$  su jako blizu nule), a ako je baza  $a < 1$ , radi se o asimptoti na desnoj strani (brojevi  $a^x$  za jako velike  $x$  su jako blizu nule). Grafovi eksponencijalnih funkcija vidljivi su na slici 2.27.

Najčešće se koristi eksponencijalna funkcija s bazom  $e$ . Broj  $e$  je matematička konstanta i iracionalan je, a iznosi približno 2,718. Umjesto  $e^x$  često se koristi oznaka  $\exp(x)$ .

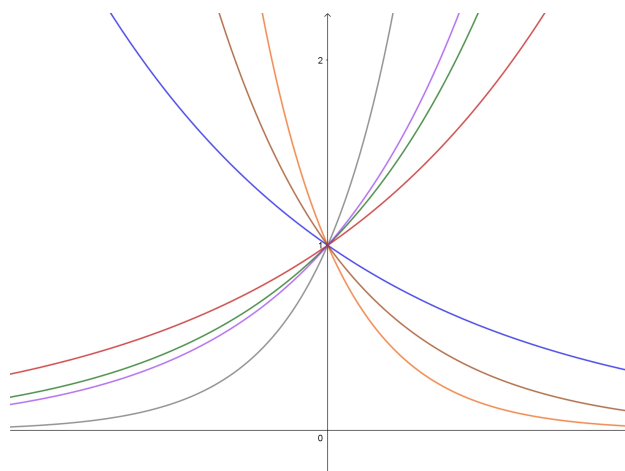
**Primjer 55.** 1s-orbitala vodikovog atoma je skalirana eksponencijalna funkcija koja poziciji elektrona u prostoru pridružuje

$$\psi_{1s} = \sqrt{\frac{1}{a_0^3 \pi}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$$

gdje je  $r$  udaljenost elektrona do jezgre, a  $a_0 = 52,9$  pm je Bohrov radijus). Ako bismo 1s-orbitalu vodikovog atoma gledali kao funkciju jedne varijable  $r$ ,

<sup>14</sup>Osim naravno ako u  $f(x) = a^x$  želimo uvrstiti  $x = a$ , no i tad se na apscisi traži vrijednost nezavisne varijable koja se uvrštava, a ona je slučajno jednaka bazi.





Slika 2.27: Grafovi eksponencijalnih funkcija (slika izrađena programom Geogebra).

imali bismo funkciju

$$f_{1s}(x) = A a^x,$$

gdje je  $A = \sqrt{\frac{1}{a_0^3 \pi}}$ ,  $a = \exp(-\frac{1 \text{ pm}}{a_0})$  i  $x = \frac{r}{\text{pm}}$ , dakle se radi o skaliranoj eksponencijalnoj funkciji s bazom  $a$  (i domenom  $[0, +\infty)$  jer  $r$  ne može biti negativan). Točka grafa na osi ordinata je  $(0, A)$ , a radi se o padajućoj eksponencijalnoj funkciji jer je  $a < 1$  jer je  $-\frac{1 \text{ pm}}{a_0} < 0$ , a e na neki broj manji od 0 je manji od 1 jer je  $\exp(x)$  rastuća eksponencijalna funkcija.

Na kraju, spomenimo još dva svojstva eksponencijalnih funkcija, a to su da za sve vrijednosti varijabli  $x, x' \in \mathbb{R}$  vrijede formule

$$f(x + x') = a^{x+x'} = a^x a^{x'} = f(x)f(x'),$$

$$f(x - x') = a^{x-x'} = a^x : a^{x'} = f(x) : f(x').$$



**Ponovimo bitno...** Eksponencijalne funkcije su realne funkcije s prirodnim domenom  $\mathbb{R}$  zadane formulom oblika  $f(x) = a^x$ . Pritom je baza  $a$  konstanta koja mora biti pozitivan broj različit od 1. Za  $a > 1$  eksponencijalna funkcija raste i ima  $x$ -os kao horizontalnu asimptotu lijevo, a za  $0 < a < 1$  eksponencijalna funkcija pada i ima  $x$ -os kao horizontalnu asimptotu desno. Grafovi svih eksponencijalnih funkcija sijeku  $y$ -os u 1 i ne sijeku  $x$ -os, nego se nalaze iznad nje. 🐤🐤🐤

## 2.6.2 Hiperbolne funkcije

Nešto rjeđe od eksponencijalnih i logaritamskih funkcija se u primjenama pojavljuju i četiri hiperbolne funkcije. Njihove definicije su kako slijedi:

- **sinus hiperbolni:**  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$
- **kosinus hiperbolni:**  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$
- **tangens hiperbolni:**  $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$
- **kotangens hiperbolni:**  $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$

Budući da su brojevi  $e^x$  i  $e^{-x}$  smisleni i pozitivni za sve realne brojeve, očito je prirodna domena za prve tri funkcije cijeli skup  $\mathbb{R}$ . Kod kotangensa hiperbolnog u prirodnoj domeni nisu  $x$ -evi za koje je  $e^x = e^{-x}$ , tj.  $e^{2x} = 1$ . Takav broj je samo  $x = 0$  pa je prirodna domena kotangensa hiperbolnog skup  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Napomena 7.** *Imena hiperbolnih funkcija potječu od toga što bi se mogle definirati slično kao i trigonometrijske funkcije (vidi sljedeći odjeljak), s tim što bi se umjesto jedinične kružnice  $X^2 + Y^2 = 1$  uzela istostrana hiperbola  $X^2 - Y^2 = 1$ .<sup>15</sup>*

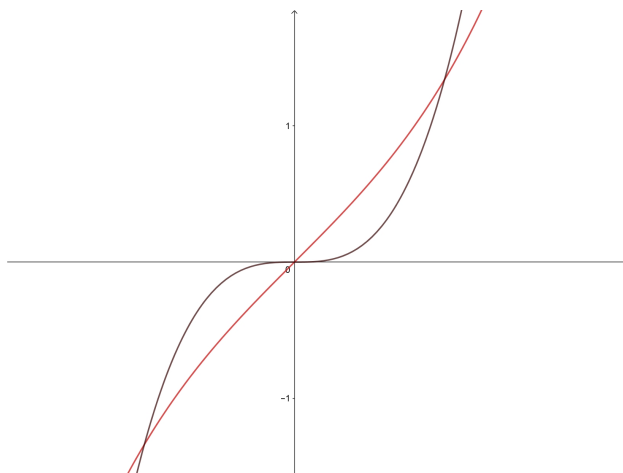
*Također, kao što smo vidjeli u odjeljku 1.4, formule sinusa i kosinusa hiperbolnog analogne su formulama sinusa i kosinusa, s razlikom da se za hiperbolne funkcije koristi realna, a za trigonometrijske kompleksna eksponencijalna funkcija.*

Sinus hiperbolni je neparna rastuća funkcija čiji graf podsjeća na graf funkcije kubiranja, no usporedbom tih grafova (slika 2.28) vidi se da je oko ishodišta graf sinusa hiperbolnog sličniji pravcu  $y = x$ , dok se krivulja  $y = x^3$  oko ishodišta više priljubljuje uz  $x$ -os.

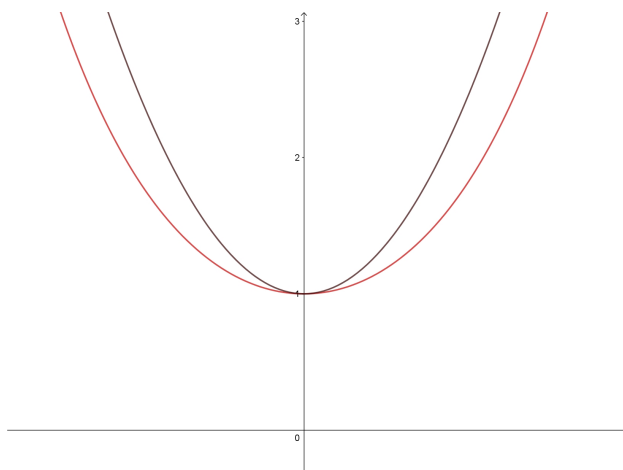
Kosinus hiperbolni je parna funkcija čiji graf se naziva lančanica i podsjeća na parabolu  $y = x^2 + 1$  (slika 2.29).

Grafovi tangensa i kotangensa hiperbolnog (slika 2.30) imaju dvije horizontalne asimptote: lijevo  $y = -1$  i desno  $y = 1$ . Tangens hiperbolni je rastuća, kotangens hiperbolni padajuća funkcija, a oba su neparne funkcije.

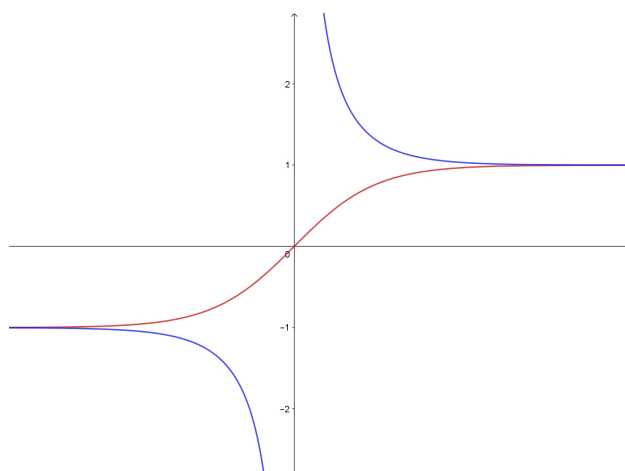
<sup>15</sup>U jednadžbama su apscisa i ordinata označene velikim umjesto malim slovima  $X$  i  $Y$  kako bi se izbjeglo poistovjećivanje apscise kružnice/hiperbole s varijablom koju uvrštavamo u trigonometrijsku/hiperbolnu funkciju, a koju obično označavamo s  $x$ .



Slika 2.28: Graf funkcije  $\text{sh}$  (crveno) i njegova usporedba s (crnim) grafom funkcije kubiranja (slika izrađena programom Geogebra).



Slika 2.29: Graf funkcije  $\cosh$  (crveno) i njegova usporedba s (crnom) parabolom  $y = x^2 + 1$  (slika izrađena programom Geogebra).



Slika 2.30: Graf funkcije th (crveno) i cth (plavo); slika izrađena programom Geogebra.

**Zadatak 18.** Koje od hiperbolnih funkcija su bijekcije? Za one koje jesu, odredite formule njihovih inverznih funkcija.



**Ponovimo bitno...** Hiperbolne funkcije su sinus, kosinus, tangens i kotangens hiperbolni, definirane s  $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$  i  $\text{cth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}$ . Prve tri su definirane na cijelom  $\mathbb{R}$ , a kotangens hiperbolni je definiran na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Sve osim kosinusa hiperbolnog su neparne funkcije, a kosinus hiperbolni je parna. Sinus i tangens hiperbolni su rastuće funkcije, a kotangens hiperbolni je padajuća funkcija. 🦆🦆🦆

### 2.6.3 Logaritamske funkcije

Rekli smo da je svaka eksponencijalna funkcija injekcija te da joj je slika skup  $\langle 0, +\infty \rangle$ , tj. eksponencijalne funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ ,  $f(x) = a^x$  su bijekcije i stoga imaju svoje inverzne funkcije  $f^{-1} : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Logaritamska funkcija s bazom  $a$**  definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s  $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Opisno rečeno, smisao logaritma broja po danoj bazi je da odredi eksponent na koju treba „dići” tu bazu da bi se dobio polazni broj. Budući da je prirodna domena svake logaritamske funkcije  $\langle 0, +\infty \rangle$  znači da nema smisla „vaditi” logaritme iz negativnih brojeva i nule.

**Primjer 56.** Iz definicije slijedi:

$$\log_7 1 = \log_7 7^0 = 0,$$

$$\log_{451} 451 = \log_{451} 451^1 = 1,$$

$$\log_{0,25} 4 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = -1,$$

$a \log_5 0$  nema smisla jer 5 ni na koju potenciju ne daje nulu.

**Zadatak 19.** Bez kalkulatora zaključite koji broj je veći,  $\log_5 50$  ili  $\log_{50} 500$ .

Po definiciji za svaku dozvoljenu bazu  $a$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) imamo po jedan par eksponencijalne i logaritamske funkcije za koje vrijede formule koje izražavaju njihovu inverznost:

$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$a^{\log_a y} = y, \quad y > 0.$$

Za sve logaritme vrijedi

$$\log_a 1 = 0$$

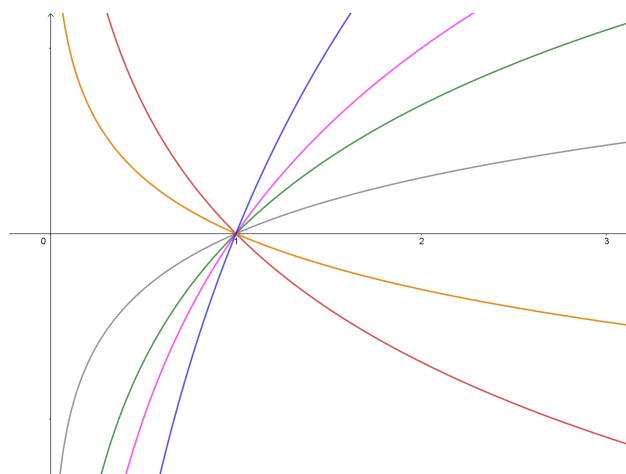
jer je  $a^0 = 1$  za svaku dozvoljenu bazu  $a$ . Stoga je 1 nultočka, i to jedina, svake logaritamske funkcije. To znači da grafovi svih logaritamskih funkcija os apscisa sijeku u točki  $(1, 0)$ . Logaritamske funkcije s bazama većim od 1 su rastuće, a one s bazama manjim od 1 su padajuće, kao i njima odgovarajuće inverzne eksponencijalne funkcije. Stoga imamo dva tipa grafova logaritamskih funkcija, kako je prikazano na slici 2.31. S grafova vidimo da je za sve logaritamske funkcije  $y$ -os vertikalna asimptota: Za baze manje od 1 logaritmi brojeva blizu nule su jako veliki, a za baze veće od 1 su jako mali (jako negativni).

Dva osnovna svojstva logaritamskih funkcija su dualna na kraju prethodnog poglavlja navedenim dvama svojstvima eksponencijalnih funkcija:

$$f(x \cdot x') = \log_a(x x') = \log_a x + \log_a x' = f(x) + f(x'),$$

$$f(x : x') = \log_a \frac{x}{x'} = \log_a x - \log_a x' = f(x) - f(x').$$

Te dvije formule vrijede (samo) za  $x, x' > 0$ . Možemo ih zapamtiti ovako: Logaritmi su povijesno uvedeni da bi olakšali komplicirane račune s „ružnim“ decimalnim brojevima u doba kad su se svi računi provodili ručno. Budući je lakše zbrojiti ili oduzeti nego pomnožiti ili podijeliti dva decimalna broja, pamtimo: logaritam umnoška je zbroj logaritama (logaritam pretvara množenje u zbrajanje), a logaritam kvoacijenta je razlika logaritama (logaritam svodi dijeljenje na oduzimanje).



Slika 2.31: Grafovi logaritamskih funkcija (slika izrađena programom Geogebra).

**Primjer 57.**  $\log_3(-3x)$  nije jednako  $\log_3(-3) + \log_3 x$ , nego je jednako  $\log_3 3 + \log_3(-x) = 1 + \log_3(-x)$ . Uočite da prva i zadnja formula imaju smisla samo sa negativne  $x$ .

Za dvije posebno česte baze logaritmi imaju posebne oznake: logaritam s bazom 10 (dekadski logaritam) se označava jednostavno s  $\log$  (vrlo rijetko s  $\log_{10}$ ), a logaritam s bazom  $e$  (prirodni logaritam) se umjesto s  $\log_e$  obično označava s  $\ln$ .

Dekadski logaritam broja daje nam njegov red veličine:  $\log(1,25 \cdot 10^{12}) = \log(1,25) + 12$ , što je broj između 12 i 13 (dekadski logaritam je rastući pa iz  $1 < 1,25 < 10$  zaključujemo  $0 < \log 1,25 < 1$ ).

Povremeno je od koristi sljedeća formula za promjenu baze logaritma:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

koja vrijedi za sve dozvoljene baze  $a$  i  $b$ . Specijalno, vrijedi

$$\log_{1/a} x = -\log_a x.$$

**Napomena 8.** Uz poznavanje logaritama, svaku eksponencijalnu funkciju možemo svesti na eksponencijalnu funkciju s bazom  $e$  od skalirane varijable:

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

**Primjer 58.** Najpoznatija pojava logaritma u kemiji je definicija  $p[H]$  otopine.<sup>16</sup>

$$p[H] = -\log \frac{c(H^+)}{c^\ominus},$$

gdje je s  $c^\ominus$  označena tzv. standardna množinska koncentracija iznosa 1 mol/L. Mjerenjem  $p[H]$  možemo odrediti koncentraciju  $c(H^+)$ :

$$c(H^+) = 10^{-p[H]} \cdot \text{mol/L}.$$

Uobičajeno je gornju definiciju riječima izreći ovako:  $p[H]$  je negativan dekadski logaritam iznosa koncentracije hidronijevih iona u otopini, mjerene u molima po litri. Riječ negativan ovdje smo naglašili jer bi korektnije bilo reći suprotan: iznosi  $pH$  su (u pravilu) pozitivni brojevi i definicija je takva kakva jest upravo jer su logaritmi  $\log \frac{c(H^+)}{c^\ominus}$  u otopinama najčešće negativni brojevi (koncentracije  $H^+$  iona su u pravilu manje od standardne te je razlomak pod logaritmom po vrijednosti između 0 i 1).

Budući da je dekadski logaritam rastuća funkcija svog argumenta, a promjena predznaka funkcije pretvara rastuću u padajuću funkciju, slijedi da je  $p[H]$  padajuća funkcija od  $c(H^+)$ , tj.  $p[H]$  za kiseliu otopinu je manji nego za manje kiselu. Sâm simbol  $p$  može se tumačiti kao pokratak za  $-\log$ .

**Zadatak 20.** Ako je konstanta disocijacije (slabe) kiseline  $HA$  definirana kao

$$K_a = \frac{c(H^+)c(A^-)}{c(HA)},$$

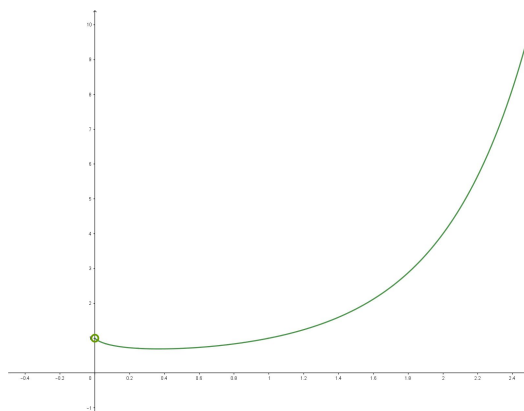
pokažite da za par (slabe) kiseline  $HA$  i njene konjugirane baze  $A^-$  vrijedi Henderson-Hasselbalchova jednadžba

$$p[H] = pK_a + \log \frac{c(A^-)}{c(HA)}.$$



**Ponovimo bitno...** Logaritam s bazom  $a$  je inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom. Stoga je definiran samo za pozitivne brojeve, raste ili pada točno kad odgovarajuća eksponencijalna funkcija raste odnosno pada i ima  $y$ -os za vertikalnu asimptotu (prema dolje ili gore ovisno o tom je li  $a > 1$  ili  $a < 1$ ). Logaritam produkta je zbroj logaritama, a logaritam kvocijenta je razlika logaritama. 🦆🦆🦆

<sup>16</sup>Definicija „pravog”  $pH$  glasi:  $pH$  je suprotna vrijednost dekadskog logaritma relativne aktivnosti vodikovih iona u otopini. Budući da se obično pod  $pH$  misli na  $p[H]$ , kojeg smo upravo definirali, mi ćemo koristiti fizikalno-kemijski korektnu  $p[H]$  umjesto  $pH$ .

Slika 2.32: Opća potencija  $y = x^x$  (slika izrađena programom Geogebra).

### 2.6.4 Opća potencija

Ponekad se susreću funkcije eksponencijalnog oblika čije pravilo sadrži nezavisnu varijablu i u bazi i u eksponentu. Takva je primjerice funkcija zadana pravilom

$$f(x) = x^x.$$

Takve funkcije nisu ni monomi ni eksponencijalne funkcije, nego spadaju u tzv. **opće potencije**. Formula takve funkcije je općenito oblika  $f(x) = u(x)^{v(x)}$ , a definira se kao

$$f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}.$$

Iz te se definicije vidi da je prirodna domena takve funkcije skup svih realnih brojeva  $x$  za koje je  $u(x) > 0$ . Primjerice,  $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$  za prirodnu domenu ima skup  $\langle 0, +\infty \rangle$  jer je tu  $u(x) = x$ . Graf funkcije  $f(x) = x^x$  prikazan je na slici 2.32.



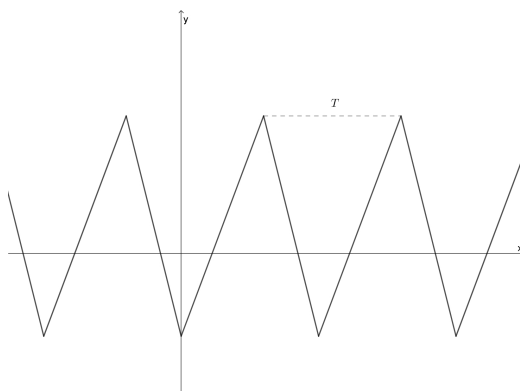
**Ponovimo bitno...** Opća potencija  $f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$  je definirana na skupu realnih rješenja nejednadžbe  $u(x) > 0$ . 

### 2.6.5 Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije

Osnovne trigonometrijske funkcije su sinus, kosinus, tangens i kotangens. Sve one spadaju u periodične funkcije: **periodična funkcija** (realna, jedne varijable) je funkcija  $f$  sa svojstvom da se može naći broj  $T > 0$  (**period**) takav da za sve  $x$  iz domene od  $f$  vrijedi

$$f(x + T) = f(x). \quad (2.1)$$





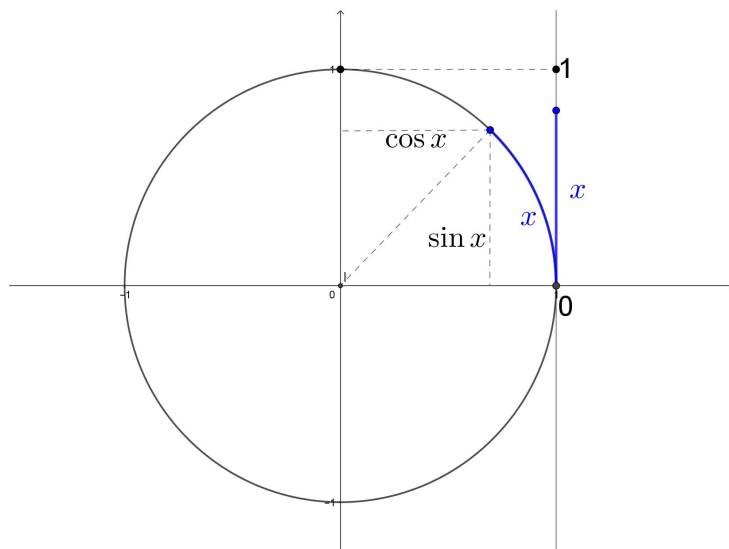
Slika 2.33: Graf periodične funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s istaknutim temeljnim periodom  $T$ ; slika izrađena programom Geogebra.

Najmanji pozitivan period, ako postoji, naziva se **temeljnim periodom** funkcije.<sup>17</sup> Uvrstimo li  $x - T$  na mjesto broja  $x$  u jednakost (2.1) dobivamo da mora vrijediti i  $f(x) = f(x - T)$ . Analogno bi se vidjelo da ako gornja jednakost vrijedi za sve  $x$  iz domene, onda mora vrijediti i  $f(x + nT) = f(x)$  za sve  $x$  i za sve cijele brojeve  $n$ . Specijalno, vidimo da domena periodične funkcije s periodom  $T$  za svaki  $x$  kojeg sadrži mora sadržavati i sve brojeve  $x + nT$ . jedna moguća domena periodičnih funkcija je skup  $\mathbb{R}$ . Alternativno, domena periodične funkcije može biti beskonačna unija intervala  $I_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), gdje pojedini interval  $I_n$  sadrži brojeve između  $a + nT$  i  $b + nT$ . Pritom intervali  $I_n$  mogu biti otvoreni, zatvoreni ili poluotvoreni (ali svi istog tipa) i  $0 \leq a < b \leq T$ . Pojednostavljeno rečeno, takva domena sastoji se od svih za višekratnike od  $T$  ulijevo i udesno translatiranih kopija osnovnog intervala  $[a, b]$  na kojem je funkcija definirana.

**Primjer 59.** Unija  $\dots \langle -5, 4] \cup \langle -3, 2] \cup \langle -1, 0] \cup \langle 1, 2] \cup \langle 3, 4] \cup \dots$  je moguća domena neke periodične funkcije.

Vizualno, periodičnost funkcije se očituje u ponavljanju jednog dijela grafa (koji je širine perioda) u jednakim razmacima ulijevo i udesno, i to u beskonačnost. Primjer grafa periodične funkcije vidi se na slici 2.33. Na njoj je označen temeljni period  $T$  — ako bismo uzeli bilo koji uži dio grafa ne bismo njegovim ponavljanjem ulijevo i udesno mogli rekonstruirati čitav graf.

<sup>17</sup>Ako je nezavisna varijabla periodične funkcije vrijeme, temeljni period je uobičajeno zvati valnom duljinom i označiti s  $\lambda$ .



Slika 2.34: Definicija sinusa i kosinusa; slika izrađena programom Geogebra.

Najpoznatije periodične funkcije su trigonometrijske funkcije. Iako ne najprecizniji<sup>18</sup>, svakako najjednostavniji način definiranja prve dvije od njih — **sinusa i kosinusa** — je pomoću jedinične kružnice. Radi se o kružnici polumjera 1 nacrtanoj u koordinatnoj ravnini<sup>19</sup>. Takva kružnica prikazana je na slici 2.34. Ako je  $x$  duljina luka  $\widehat{AB}$  te kružnice od točke  $A = (1, 0)$  do neke promatrane točke  $B$ , onda se  $\cos x$  (kosinus broja  $x$ ) definira kao apscisa točke  $B$ , a  $\sin x$  (sinus broja  $x$ ) kao njena ordinata. Pritom  $x$  uzimamo kao pozitivan ako je luk  $\widehat{AB}$  gledan od točke  $(1, 0)$  u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, a negativan ako je gledan u smjeru kazaljke na satu. Ovdje je zgodno podsjetiti: Isto je reći „ $x$  je duljina luka od točke  $A$  do točke  $B$  na jediničnoj kružnici” i „kut  $\angle AOB$  ima  $x$  radijana”. Dakle, ako nas zanima vrijednost sinusa ili kosinusa nekog broja, potrebno je naći točku  $B$  na jediničnoj kružnici tako da je duljina luka od  $A$  do  $B$  jednaka tom broju; taj proces poznat je kao namatanje brojevnog pravca na jediničnu kružnicu, pri čemu zamišljamo da je točka  $0$  tog pravca stavljena na točku  $A$  te da se pozitivni dio pravca namotava ulijevo, a negativni udesno na kružnicu.

Iz definicije sinusa i kosinusa odmah se vide njihova glavna svojstva:

- Brojevi  $\sin x$  i  $\cos x$  mogu se odrediti za sve realne brojeve  $x$  jer kružnicu

<sup>18</sup>Precizna definicija ovih funkcija koristi redove potencija, vidi odjeljak 11.3.1.

<sup>19</sup>Oprez: Radi opasnosti od zabune nikako nemojte koordinatne osi jedinične kružnice u definiciji sinusa i kosinusa zvati  $x$ -os i  $y$ -os; dovoljno ih je zvati osi apscisa i ordinata.

možemo obilaziti u oba smjera proizvoljno mnogo puta: Prirodna domena funkcija sinus i kosinus je cijeli skup  $\mathbb{R}$ .

- Apscise točaka na jediničnoj kružnici su brojevi između  $-1$  i  $1$ , a isto tako i ordinate. Stoga su za svaki broj  $x$  brojevi  $\sin x$  i  $\cos x$  između  $-1$  i  $1$  ili, preciznije rečeno, slika funkcija sinus i kosinus je segment  $[-1, 1]$ .
- Obilaskom kružnice točke se ponavljaju nakon svakog „punog kruga“, tj. nakon što se prijeđe opseg  $2\pi$  jedinične kružnice. Stoga su sinus i kosinus periodične funkcije s temeljnim periodom  $2\pi$ .
- Za  $x = 0$  nalazimo se u točki  $(\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$  tj.  $\cos 0 = 1$  i  $\sin 0 = 0$ .
- Općenito,  $\sin x$  je  $0$  kad god broju  $x$  odgovara jedna od točaka  $(-1, 0)$  i  $(1, 0)$ , a to se dešava kad god je  $x$  višekratnik od  $\pi$ : nultočke funkcije sinus su svi brojevi  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Kosinus je nula kad god broju  $x$  odgovara jedna od točaka  $(0, 1)$  i  $(0, -1)$ , a to se dešava kad god je  $x$  neparni višekratnik od  $\frac{\pi}{2}$ : nultočke funkcije kosinus su svi brojevi  $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Primjenom Pitagorina poučka<sup>20</sup> na trokut određen ishodištem, točkom  $(\cos x, 0)$  i točkom  $(\cos x, \sin x)$  (dakle, pravokutni trokut s katetama duljina  $\cos x$  i  $\sin x$  te hipotenuzom duljine  $1$ ) dobivamo osnovnu formulu koja povezuje sinus i kosinus:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

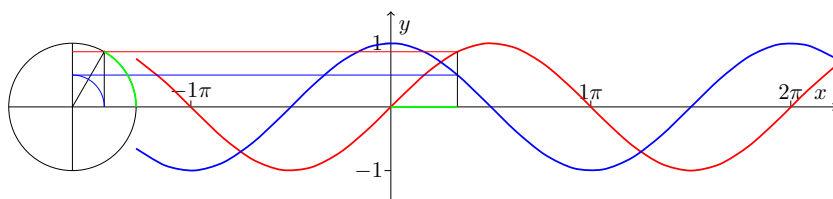
- Ako bismo zamijenili ulogu osi, vidimo da bi došlo do zamjene uloga sinusa i kosinusa, ali bi nam slika u biti izgledala isto. Pomnijim promatranjem zaključili bismo da je jedina bitna razlika između sinusa i kosinusa u jednom pravom kutu (iznosu luka  $\frac{\pi}{2}$ ). Formulama se to izražava ovako:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

Stoga i grafovi tih funkcija izgledaju gotovo jednako — razlika je u horizontalnom pomaku za  $\frac{\pi}{2}$  (vidi sliku 2.35).

- Sinus je neparna, a kosinus je parna funkcija.



Slika 2.35: Grafovi funkcija sinus (crveno) i kosinus (plavo).

Od važnijih formula za sinus i kosinus ovdje navodimo još samo četiri. Formule za sinus i kosinus dvostrukog kuta glase

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Adicijske formule za sinus i kosinus su

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Kao što smo rekli, oblici grafova sinusa i kosinusa su podjednaki, samo su različito pozicionirani u koordinatnom sustavu. Općenito, sinusoidalni valovi temeljnog perioda  $T$  i amplitude (polovice razlike visina najviše i najniže točke vala)  $A$  mogu se opisati formulom oblika

$$C + A \cos(\omega t + \delta),$$

gdje je  $C$  prosječna visina vala (tj. val se nalazi između horizontala  $y = C \pm A$ ),  $\omega = 2\pi/T$  je (kutna) frekvencija, a  $\delta$  je fazni (horizontalni) pomak. Varijablu smo ovdje označili s  $t$  umjesto s  $x$  jer je u primjenama varijabla periodične funkcije najčešće vrijeme.

Funkcije **tangens** i **kotangens** su kvocijenti sinusa i kosinusa:

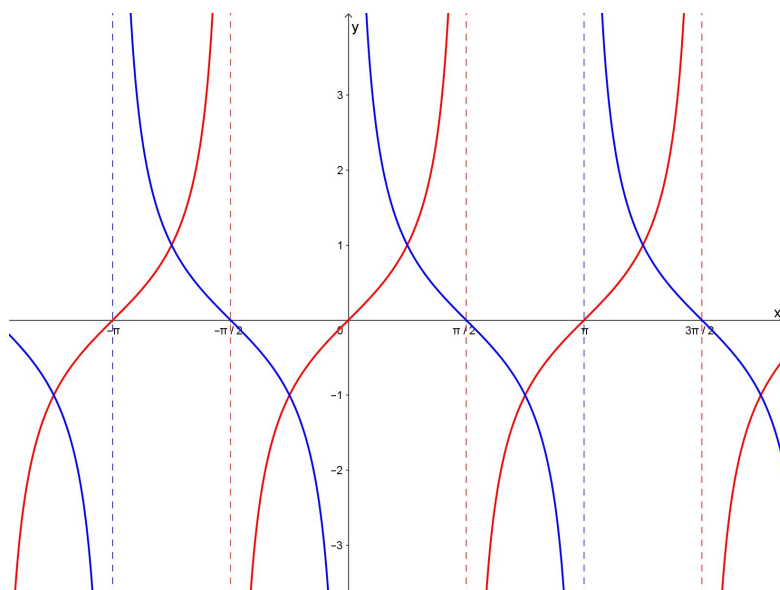
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

S obzirom na nultočke funkcija sinus i kosinus, vidimo da je prirodna domena funkcije tangens skup  $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$  (realni brojevi bez neparnih višekratnika broja  $\pi/2$ ), a prirodna domena funkcije kotangens je

---

<sup>20</sup>Trokut sa stranicama duljina  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ( $a, b < c$ ) je pravokutan ako i samo ako je  $a^2 + b^2 = c^2$ .



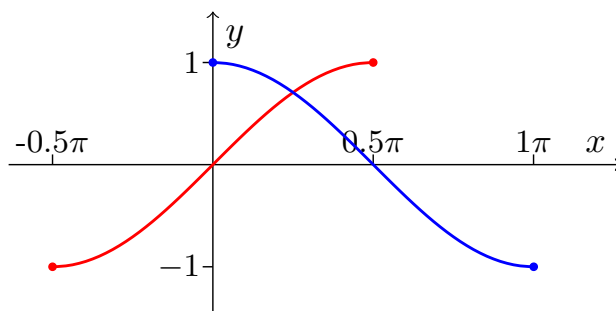
Slika 2.36: Grafovi funkcija tangens (crveno) i kotangens (plavo). Slika je izrađena programom Geogebra.

skup  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  (realni brojevi bez svih višekratnika broja  $\pi$ ). Lako je provjeriti da su i tangens i kotangens neparne periodične funkcije s temeljnim periodom  $\pi$ . Na svakom od intervala koji čine njenu domenu, funkcija tangens je rastaća, a kotangens padajuća. Grafove funkcija tangens i kotangens prikazuje slika 2.36. Istaknute su i njihove vertikalne asimptote, koje se pojavljuju u svim točkama u kojima nisu definirane.

Periodična funkcija ne može imati horizontalne asimptote (zašto?). Također, periodična funkcija ne može biti injekcija, jer se po njenoj definiciji za beskonačno mnogo vrijednosti varijable postižu iste vrijednosti funkcije. Stoga nijedna od trigonometrijskih funkcija nema inverznu funkciju. No, ako odaberemo njihove restrikcije na pogodno manje domene, moguća je definicija arkus-funkcija, tj. **ciklometrijskih funkcija**, koje mnogi (jako nepravilno) nazivaju inverznim trigonometrijskim funkcijama.

Ako umjesto sinusa  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  (surjekcija, nije injekcija) gledamo njegovu restrikciju  $\text{Sin} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ , a umjesto kosinusa  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  (isto surjekcija, nije injekcija) gledamo njegovu restrikciju  $\text{Cos} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ , onda smo dobili dvije bijekcije, čiji grafovi su prikazani na slici 2.37. **Arkus-sinus** i **arkus-kosinus** su inverzne funkcije funkcija Sin i Cos:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Slika 2.37: Grafovi restrikcija sinusa (crveno) i kosinusa (plavo) tako da se dobiju bijekcije.

je definiran s

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y,$$

a

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

je definiran s

$$\arccos x = y \Leftrightarrow x = \cos y.$$

Odgovarajući grafovi prikazani su na slici 2.38. Iz definicije je očito da treba biti oprezan s korištenjem arkus-sinusa i arkus-kosinusa: Za zadani broj između  $-1$  i  $1$  one određuju samo po jedan od beskonačno mnogo iznosa čiji je taj zadani broj sinus odnosno kosinus.

**Primjer 60.** Ako rješavamo jednadžbu  $\cos x = -0,5$ , funkcija  $\arcsin$  dati će  $x = \frac{5\pi}{6}$ . No, to nije jedini iznos  $x$  čiji kosinus je jednak  $-0,5$ : osim njega, to su i svi brojevi  $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ , gdje je  $k$  cijeli broj, ali i svi brojevi  $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ , gdje je  $k$  cijeli broj.

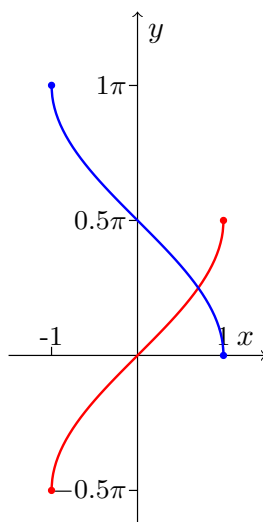
Slično se definiraju **arkus-tangens** i **arkus-kotangens**. Prvo se uzmu restrikcije  $\text{Tg} : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  i  $\text{Ctg} : \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , koje su bijekcije, a njihovi inverzi su arkus-tangens i arkus-kotangens:

$$\arctg : \mathbb{R} \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle,$$

$$\arctg x = y \Leftrightarrow x = \text{Tg } y;$$

$$\text{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, \pi \rangle,$$

$$\text{arcctg } x = y \Leftrightarrow x = \text{Ctg } y.$$

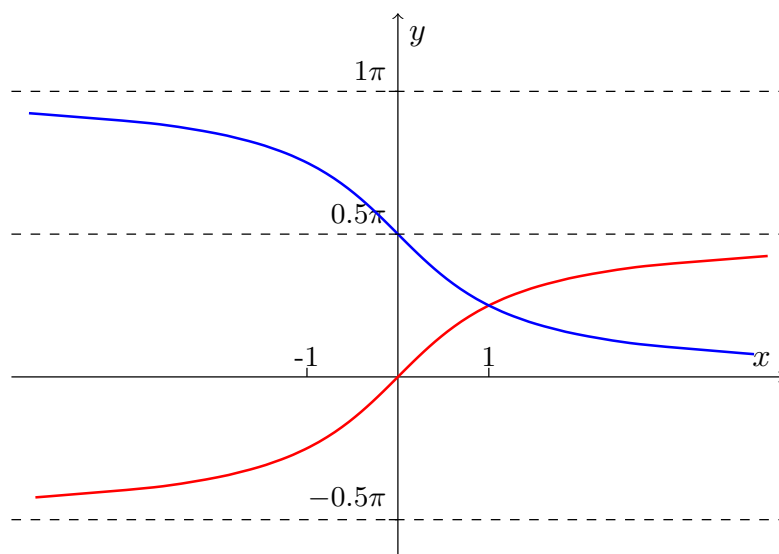


Slika 2.38: Grafovi funkcija arkus-sinus (crveno) i arkus-kosinus (plavo).

Odgovarajući grafovi vidljivi su na slici 2.39. Budući da grafovi funkcija tangens i kotangens imaju vertikalne asimptote, grafovi funkcija arkus-tangens i arkus-kotangens imaju horizontalne asimptote (arkus-tangens lijevo ima horizontalnu asimptotu  $y = \frac{\pi}{2}$ , a desno  $y = \frac{\pi}{2}$ , a arkus-tangens kao lijevu horizontalnu asimptotu ima  $y = \pi$ , a desnu  $y = 0$ ). Kao i kod arkus-sinusa i arkus-kosinusa, kod arkus-tangensa i arkus-kotangensa također trebamo biti svjesni da daju samo po jednu od beskonačno mnogo vrijednosti čiji tangens ili kotangens nam je zadan, a ostale, ako nam trebaju, moramo sami rekonstruirati poznavanjem svojstava funkcija tangens i kotangens.

Uočimo i da su arkus-sinus i arkus-tangens rastuće, a arkus-kosinus i arkus-kotangens padajuće funkcije. Arkus-tangens je neparna funkcija, dok ostale ciklotometrijske funkcije nisu ni parne ni neparne.

Ovime smo došli do kraja pregleda osnovnih **elementarnih funkcija**, tj. svih funkcija koje se iz algebarskih, eksponencijalnih, logaritamskih, četiriju osnovnih trigonometrijskih te ciklotometrijskih funkcija mogu dobiti s četiri osnovne računske operacije te komponiranjem. Pritom, sve elementarne funkcije koje nisu algebarske nazivamo **transcendentnim funkcijama**. Dok se u algebarske funkcije mogu uvrštavati fizikalne veličine skupa s mjernim jedinicama (uz uvjet homogenosti, tj. da ne možemo zbrajati, oduzimati ni izjednačavati varijable i konstante koje nisu iste fizikalne dimenzije), u transcendentne funkcije (usporedite definiciju p[H] u odjeljku o logaritmima) možemo uvrštavati samo „čiste“ brojeve, odnosno kod transcendentnih funkcija su i nezavisna i zavisna varijabla brojevi.



Slika 2.39: Grafovi funkcija arkus-tangens (a) i arkus-kotangens (b).



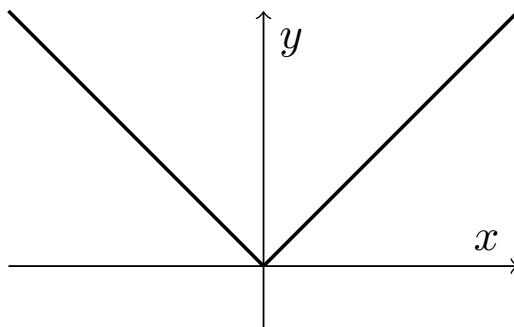
**Ponovimo bitno...** Periodične funkcije imaju svojstvo da im se vrijednosti ponavljaju u jednakim razmacima  $T$ :  $f(x + T) = f(x)$  za sve  $x$  iz domene. Trigonometrijske funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens su periodične funkcije. Sinus i kosinus realnog broja  $x$  definiraju se kao ordinata i apscisa točke  $B$  na jediničnoj kružnici takve da je kut  $\angle BOA$  iznosa  $x$  radijana, pri čemu je  $A$  točka  $(1, 0)$ . Tangens je definiran s  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , a kotangens s  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ . Tangens nije definiran u neparnim višekratnicima od  $\pi/2$ , a kotangens u višekratnicima od  $\pi$ . Temeljni period funkcija sinus i kosinus je  $2\pi$ , a temeljni period funkcija tangens i kotangens je  $\pi$ . Sinus, tangens i kotangens su neparne funkcije, a kosinus je parna funkcija. Ciklometrijske funkcije su inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija restringiranih na manje domene, tako da su nakon restrikcije dobivene funkcije bijekcije. 🦆🦆



## 2.7 Neke neelementarne funkcije

Ponekad su potrebne i funkcije koje se zadaju „po dijelovima”: na jednom dijelu domene pravilo za izračunavanje vrijednosti funkcije je jedno, na drugom dijelu drugo. Sve takve funkcije (i ne samo one) spadaju u neelementarne





Slika 2.40: Graf funkcije apsolutne vrijednosti.

funkcije. Zadaјemo ih ovako:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A, \\ f_2(x) & x \in B, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Takav zapis znači: Ako je  $x$  iz  $A$ , onda se  $f(x)$  izračuna tako da se  $x$  uvrsti u  $f_1$ ; ako je  $x$  iz  $B$ , onda se  $f(x)$  izračuna tako da se  $x$  uvrsti u  $f_2$  itd. Unija svih skupova  $A, B, \dots$  je domena funkcije  $f$  (i pritom skupovi  $A, B, \dots$  moraju biti disjunktni tj. nikoјa dva ne smiju imati zajedničkih elemenata). Graf funkcije  $f$  dobiva se „lijepljenjem” grafova funkcija  $f_1, f_2, \dots$ .

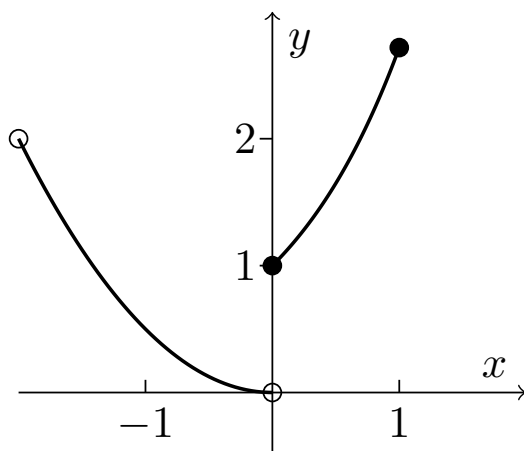
Najjednostavnija, a često korištena, neelementarna funkcija zadana po dijelovima je **funkcija apsolutne vrijednosti** koja nenegativne broјeve ne mijenja, a negativnima promijeni predznak. Formalno, to je funkcija  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana s

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Za negativne broјeve (lijevi dio koordinatnog sustava) vidimo da se pravilo podudara s linearnom funkcijom  $f_1(x) = -x$ , a za nenegativne (desni dio koordinatnog sustava) se pravilo podudara s linearnom funkcijom  $f_2(x) = x$ . Stoga se ukupni graf sastoji od ta dva dijela. Kako se  $f_1$  i  $f_2$  podudaraju u „točki lijepljenja”  $(x, f(x)) = (0, 0)$ , ukupni graf biti će „u komadu”, a prikazan je na slici 2.40. Općenito, dijelovi grafa funkcije zadane po dijelovima se mogu i ne moraju spojiti u „točkama lijepljenja”.

**Primjer 61.** Funkcija  $f$  zadana je s

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 & -2 < x < 0 \end{cases}$$



Slika 2.41: Primjer grafa funkcije zadane „po dijelovima” (uz primjer 61).

Ona je definirana za  $x \in \langle -2, 0 \rangle \cup [0, 1] = \langle -2, 1 \rangle$ , a graf joj je prikazan slikom 2.41. Lijevi dio grafa je dio parabole  $y = x^2$ , a desni je dio krivulje  $y = f(x)$ . Praznim kružićima su kao i uvijek istaknute su točke koje nisu dio grafa, a punim one koje jesu.



**Ponovimo bitno...** Funkcije možemo zadati po dijelovima tako da za vrijednosti varijable iz različitih intervala definiramo različita pravila. Takve funkcije nisu elementarne. Najjednostavnija po dijelovima zadana funkcija je funkcija apsolutne vrijednosti, koja pozitivne brojeve ne mijenja, a negativnima mijenja predznak. 🦆🦆🦆

## 2.8 Prikaz neafinih funkcija pomoću afinih

U kemiji i drugim prirodnim znanostima često je potrebno ili bar zgodno neku funkcionalnu ovisnost  $Y = f(X)$  prikazati pomoću pravca u koordinatnoj ravnini. Razlozi mogu biti različiti, a jedan od češćih je mogućnost uspoređivanja eksperimentalno dobivenih podataka s pretpostavljenom funkcijom  $f$  ili korištenje metode najmanjih kvadrata (vidi odjeljak 10.2.3). Ako funkcija  $f$  nije afina, graf joj nije pravac, ali se sama ovisnost uz odgovarajuću transformaciju varijabli u većini slučajeva lako prevodi u afinu: **Linearizacija neafine funkcije**  $Y = f(X)$  se sastoji u tome da iz varijabli  $X$  i  $Y$ , koje nas zapravo zanimaju, izvedemo formule novih varijabli  $x$  i  $y$  tako da vrijedi  $y = ax + b$ , a da pritom supstitucijom tih formula dobivamo izvornu ovisnost  $Y = f(X)$ . Uobičajeno je (no ne uvijek i najzgodnije!) uzeti da  $y$  ovisi

samo o konstantama i  $Y$ , a  $x$  samo o konstantama i  $X$ . Od toga je važnije postići da se iz nacrtanog ili izračunatog para  $(x, y)$  može lako i jednoznačno, bar unutar raspona varijabli koji nas u konkretnoj situaciji zanima, odrediti izvorni par  $(X, Y)$ . To posebno znači da na razmatranom rasponu varijabli funkcije koje povezuju  $x$  s  $X$  (i  $Y$ ), odnosno  $y$  s  $Y$  (i  $X$ ), moraju biti bijektivne. Naravno, dobiveni  $a$  i  $b$  moraju biti konstantni, tj. ne smiju ovisiti ni o  $X$  ni o  $Y$ .

**Primjer 62.** Ostwaldov zakon za slabe elektrolite glasi

$$\frac{1}{\Lambda_m} = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} + \frac{c \Lambda_m}{K(\Lambda_m^\circ)^2}.$$

Pritom je  $\Lambda_m$  molarna provodnost elektrolita (u  $\text{S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ ),  $\Lambda_m^\circ$  granična molarna provodnost (konstanta za promatrani elektrolit pri fiksnoj temperaturi),  $K$  je konstanta disocijacije slabog elektrolita (u  $\text{mol cm}^{-3}$ ), a  $c$  je množinska koncentracija (u  $\text{mol dm}^{-3}$ ).

Označimo li

$$y = \frac{1}{\Lambda_m} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}}, \quad x = c \Lambda_m \cdot \frac{\text{cm}}{\text{S}},$$

$$a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2} \cdot \frac{\text{S}^2 \text{ cm}}{\text{mol}}, \quad b = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}},$$

zakon poprima oblik

$$y = ax + b.$$

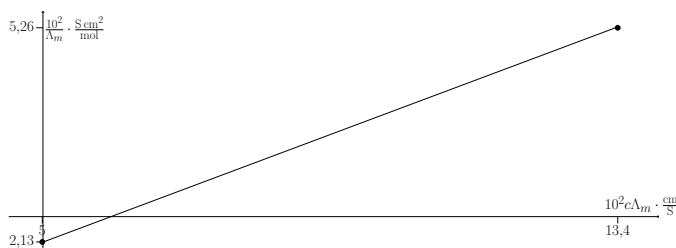
Konkretno, ako su eksperimentom pri  $25^\circ\text{C}$  za octenu kiselinu utvrđivane molarne provodnosti za neki raspon koncentracija i ako su poznate teorijske vrijednosti za graničnu molarnu provodnost i konstantu disocijacije za otopine octene kiseline pri  $25^\circ\text{C}$  ( $\Lambda_m^\circ = 390,7 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$  i  $K = 1,75 \cdot 10^{-5} \text{ mol dm}^{-3}$ ) dobivamo  $a = 374,348$  i  $b = 2,5595 \cdot 10^{-3}$ .

Ako su pri tom eksperimentu dobivene molarne provodnosti u rasponu od 19 do  $47 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ , vidimo da se vrijednosti  $y$  kreću između  $y_1 = \frac{1}{47} \approx 0,02128$  i  $y_2 = \frac{1}{19} \approx 0,05263$  pa je razuman raspon na  $y$ -osi npr. od 0,02 do 0,055.

Kako je  $y = ax + b$ , znači da je  $x = (y - b)/a$ . Stoga je raspon  $x$ -eva između  $x_1 = (y_1 - b)/a \approx 0,0000500$  i  $x_2 = (y_2 - b)/a \approx 0,000134$ . Stoga je prikladan raspon za  $x$ -os recimo od  $5 \cdot 10^{-5}$  do  $14 \cdot 10^{-5}$ . Uz te raspone, odgovarajući graf kojim je prikazan Ostwaldov zakon u danoj konkretnoj situaciji prikazan je slikom 2.42.

Kad god je moguće, pokušajte ne komplicirati. Primjerice, moglo se Ostwaldov zakon prevesti redom u oblike

$$\frac{1}{\Lambda_m^2} = \frac{1}{\Lambda_m \Lambda_m^\circ} + \frac{c}{K(\Lambda_m^\circ)^2},$$



Slika 2.42: Ostwaldov zakon prikazan pomoću affine funkcije.

$$\frac{1}{\Lambda_m^2} - \frac{1}{\Lambda_m \Lambda_m^\circ} = \frac{c}{K(\Lambda_m^\circ)^2},$$

te definirati

$$y = \frac{1}{\Lambda_m^2} - \frac{1}{\Lambda_m \Lambda_m^\circ}$$

i  $x = c$ ,  $b = 0$ ,  $a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2}$ , što bi doduše dalo vrlo jednostavan  $x$  te pravac kroz ishodište, ali bi smisao  $y$  bio neprikladan za rekonstruiranje osnovnih vrijednosti u danom kontekstu ovisnosti  $\Lambda_m$  o  $c$ . Recimo da ste u takvom prikazu očitali da je pri nekoj koncentraciji  $y = 2,372 \cdot 10^{-3}$ , koliko biste morali računati da dobijete  $\Lambda_m$ ? Probajte ako Vam nije očito. Dakle: Ukoliko ima više mogućnosti što zvati  $x$ -om, a što  $y$ -om (uvijek ima!), odaberite ih tako da se iz  $x$  i  $y$  mogu što lakše dobiti vrijednosti promatranih međuzavisnih veličina  $X$  i  $Y$  (u ovom primjeru bio je  $X$  koncentracija, a  $Y$  molarna provodnost).

**Primjer 63.** Arrheniusov zakon za ovisnost koeficijenta brzine reakcije o temperaturi glasi

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right).$$

Uočimo da  $k$  i  $A$  uvijek imaju istu jedinicu, dok je jedinica od  $E_a$  jednaka jedinici od  $RT$  (dakle, J/mol).

Kad se žele usporediti eksperimentalno (i računski) dobiveni parovi  $(T, k)$  s tom ovisnošću, najčešće s ciljem određivanja vrijednosti  $E_a$  (energije aktivacije) obično je lakše crtati ovisnost  $\ln k$  o  $\frac{1}{T}$ :

$$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{RT}.$$

Pritom je  $y = \ln \frac{k}{\text{jed.}}$ ,  $b = \ln \frac{A}{\text{jed.}}$ ,  $a = -\frac{E_a}{RK}$  i  $x = \frac{K}{T}$ . Pritom smo s jed. označili zajedničku mjernu jedinicu od  $A$  i  $k$ , koja varira ovisno o redu reakcije. Za reakcije prvog reda ta jedinica je  $s^{-1}$ .

Ako bi se Arrheniusov zakon razmatrao za raspon temperatura od  $T_1 = 200 \text{ K}$  do  $T_2 = 300 \text{ K}$ , uz gornji odabir raspon na  $x$ -osi bio bi od  $x_1 = \frac{1}{300}$  do  $x_2 = \frac{1}{200}$ , a  $x$ -os bi bila označena s  $\text{K}/T$ . Pritom uočimo da, budući da je ovisnost  $x$  o  $T$  ovdje padajuća, manjoj temperaturi odgovara veći  $x$  i obrnuto.

Raspon na  $y$ -osi, koja će biti označena s  $\ln \frac{k}{\text{jed.}}$ , možemo dobiti ili tako da  $T_1$  i  $T_2$  uvrstimo u izvorni oblik Arrheniusove jednadžbe i tako dobivene  $k(T_1)$  i  $k(T_2)$  uvrstimo u formulu za  $y$ , ili pak tako da uvrstimo  $x_1$  i  $x_2$  u linearizirani oblik  $y = ax + b$ . Ako odaberemo ovaj drugi način trebamo pripaziti na pravila računa sa značajnim znamenkama te stoga iznose  $a$  i  $b$  za taj račun ostavimo prvo s više od potrebnog broja znamenaka, a tek nakon toga zaokružujemo po pravilima računa sa značajnim znamenkama.



**Ponovimo bitno...** Kad intepretiramo neku fizikalnu ili kemijsku jednadžbu kao pravac  $y = ax + b$  potrebno je konstante i varijable u toj jednadžbi grupirati tako da njihovom zamjenom s  $x$ ,  $y$ ,  $a$  i  $b$  dobijemo jednadžbu pravca. Pritom  $b$  i  $y$  moraju imati istu jedinicu, varijabilne veličine trebaju biti raspoređene u  $x$  i  $y$ , a konstantne u  $a$  i  $b$ . 🦆🦆🦆

## Poglavlje 3

# Diferencijalni račun za realne funkcije jedne varijable

### 3.1 Deriviranje funkcija

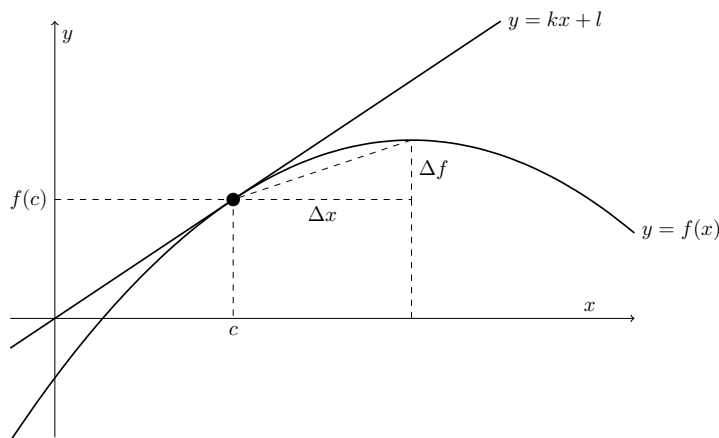
Limesi, deriviranje i integriranje spadaju u područje matematike poznato kao **infinitesimalni račun**. Pojam derivacije funkcije središnji je pojam više matematike. No, za stjecanje sposobnosti računanja s derivacijama i primjenjivanja istih u mnogim jednostavnim situacijama nije nužna precizna definicija derivacije. Stoga smo se ovdje odlučili za donekle nekonvencionalni pristup derivacijama, kako bi studenti čim ranije bili sposobni iste koristiti na fizikalnim kolegijima, koje studenti kemije u pravilu slušaju istovremeno s matematičkim. Prvo ćemo dati intuitivnu „definiciju” derivacije i zatim temeljem iste razraditi tehnike deriviranja, svojstva i primjene derivacija, a tek nakon toga ćemo obraditi limese funkcija i dati preciznu definiciju derivacije (definicija 17).

U ostatku ovog poglavlja neka je  $I$  otvoren interval, a  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  neka funkcija i  $c \in I$  neki fiksni broj. Oznaka za derivaciju funkcije  $f$  u točki  $c$  je  $f'(c)$ . Derivacija  $f'(c)$  je uvijek broj odnosno skalarna veličina (broj pomnožen s fizikalnom jedinicom). Postoje (bar) tri intuitivne „definicije”, zapravo tri interpretacije, derivacije funkcije u točki  $c$ .

**Derivacija kao procjena relativne promjene iznosa funkcije:** Ukoliko je  $f(x) = ax + b$  onda je omjer promjene vrijednosti funkcije  $\Delta f = f(x) - f(c) = a(x - c)$  u odnosu na promjenu vrijednosti nezavisne varijable<sup>1</sup>  $\Delta x = x - c$  jednak  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = a$ , tj. kod afine funkcije koeficijent smjera jednak je relativnoj promjeni funkcije u odnosu na početnu vrijednost  $c$  za svaku promjenu varijable. Derivacija  $f'(c)$  može se shvatiti kao poopćenje te ideje: to je pro-

---

<sup>1</sup>Uočite: povećanje varijable daje pozitivan  $\Delta x$ , a smanjenje negativan.



Slika 3.1: Derivacija kao relativna promjena vrijednosti funkcije i kao koeficijent smjera tangente

cjena relativne promjene funkcije  $f$  ako je promjena nezavisne varijable ( $\Delta x$ ) približno jednaka nuli (slika 3.1):

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (\text{za } \Delta x \approx 0).$$

Iz ove interpretacije derivacije vidimo: Derivacija afine funkcije u bilo kojoj točki jednaka je njenom koeficijentu smjera. Specijalno, derivacija konstantne funkcije je svuda jednaka nuli.

Vezano za gornju „definiciju” lako je zapamtiti još jednu oznaku za derivaciju funkcije:  $\frac{df}{dx}$ . Ta se oznaka najčešće koristi u fizikalnim kontekstima, a olakšava bratanje s mjernim jedinicama. Ako znamo mjerne jedinice nezavisne varijable  $x$  i zavisne varijable  $y = f(x)$ , ta oznaka ističe da je mjerna jedinica derivacije od  $f$  jednaka kvocijentu mjernih jedinica zavisne i nezavisne varijable (vidi primjer 64).

Za razliku od afinih funkcija, iz gornje „definicije” teško bismo shvatili koje su formule i načini računanja derivacija za druge funkcije. No, pogledamo li sliku 3.1, vidimo da za mali razmak  $\Delta x$  omjer  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  neće biti bitno različit od koeficijenta smjera tangente povučene na graf funkcije  $f$  u točki s apscisom  $c$ . Napomenimo ovdje da je **tangenta** na neku krivulju (ovdje na graf funkcije) u danoj točki pravac koji najbolje „prijanja” uz tu krivulju oko te točke (na uskom dijelu oko promatrane točke zanemariva je razlika između krivulje i tangente, tj. to je pravac koji od svih pravaca koji prolaze tom točkom najbolje aproksimira krivulju u blizini te točke).

**Napomena 9.** Nije točno da je tangenta pravac koji krivulju siječe u samo

jednoj točki, primjerice pravac  $y = 1$  siječe, štoviše tangira, sinusoidu u beskonačno mnogo točaka.

Prema navedenom, poboljšana verzija „definicije” derivacije  $f'(c)$  je **derivacija kao koeficijent smjera tangente**: derivacija  $f'(c)$  funkcije  $f$  u točki  $c$  njezine domene je koeficijent smjera tangente na graf funkcije  $f$  povučene u točki s apscisom  $c$ . Iz ovakvog pristupa derivaciji odmah vidimo: Ako funkcija  $f$  raste na nekom intervalu oko  $c$ , onda je  $f'(c) > 0$ , a ako pada je  $f'(c) < 0$  i obrnuto, ako je  $f'(c) < 0$ ,  $f$  pada na nekom intervalu oko  $c$ , a ako je  $f'(c) > 0$   $f$  raste na nekom intervalu oko  $c$ . Formalnije iskazano:

**Teorem 1** (Veza između predznaka prve derivacije i rasta i pada funkcije).

*Ako funkcija na nekom intervalu ima pozitivnu prvu derivaciju, ona raste na tom intervalu, a ako na nekom intervalu ima negativnu prvu derivaciju, ona pada na tom intervalu. Vrijedi i obrnuto: Rastuće derivabilne funkcije imaju pozitivnu, a padajuće derivabilne funkcije negativnu prvu derivaciju (na intervalu na kojem rastu, odnosno padaju).*

Iz opisanog slijedi i da je **jednadžba tangente na graf funkcije**  $f$  u točki s apscisom  $c$  jednadžba pravca s koeficijentom smjera  $f'(c)$  koji prolazi kroz točku  $(c, f(c))$ , tj.

$$y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c).$$

Bitno je spomenuti da je ovakva interpretacija derivacije funkcije moguća samo ako su  $x$  i  $y$  interpretirane kao uobičajene pravokutne koordinate u ravnini, jer je pojam koeficijenta smjera pravca smislen samo za pravce u pravokutnom koordinatnom sustavu.

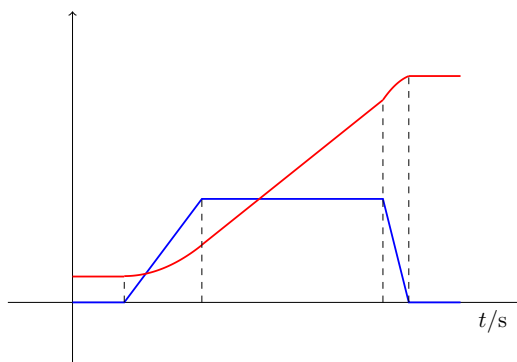
Ukoliko je fizikalno značenje nezavisne varijable vrijeme, onda imamo još jednu mogućnost intuitivne „definicije” derivacije, a to je **derivacija kao trenutna brzina**: Ako promatramo funkciju  $f$  kojoj je nezavisna varijabla  $t$  vrijeme, onda je za svaki vremenski interval  $\Delta t$  (u odnosu na fiksirani trenutak  $t_0$ ) prosječna brzina promjene vrijednosti funkcije  $f$  u tom intervalu jednaka  $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ . Ukoliko skraćujemo vremenski interval, bit ćemo sve bliži trenutnoj brzini promjene  $f$  u trenutku  $t_0$  te možemo reći: Derivacija od  $f$  u  $t_0$  je trenutna brzina u tom trenutku. U ovom kontekstu se često umjesto oznake  $f'(t_0)$  koristi oznaka<sup>2</sup>  $\dot{f}(t_0)$ .

**Primjer 64.** Kod reakcije prvog reda množinska koncentracija ( $c$  u mol/L) reaktanta R u trenutku  $t$  iznosi

$$c = c_0 \exp(at),$$

<sup>2</sup>Oznaka derivacije oblika  $\dot{f}$  potječe od sir I. Newtona, a oznaka  $f'$  od J.-L. Lagrangea.





Slika 3.2: Pozicija i brzina, ilustracija uz zadatak 21.

gdje je  $a$  pri danoj temperaturi i reakciji konstanta i po iznosu je jednaka umnošku stehiometrijskog koeficijenta reaktanta (po definiciji, stehiometrijski koeficijenti reaktanata su pozitivni, a stehiometrijski koeficijenti produkata su negativni!) i konstante koja se zove koeficijent brzine reakcije (dakle,  $a < 0$  i  $a$  ima fizikalnu dimenziju recipročnog vremena). Koncentracija reaktanta se u tom slučaju smanjuje te će  $\frac{dc}{dt}$  u svakom trenutku biti negativnog iznosa.

Ukoliko imamo samo jedan reaktant kojemu je stehiometrijski koeficijent jednak  $\nu$ , **brzina reakcije** se definira kao

$$v = \frac{1}{\nu} \frac{dc}{dt},$$

dakle, brzina reakcije je u svakom trenutku pozitivnog iznosa. Zapravo, tako možemo definirati brzinu reakcije u svakom slučaju, neovisno o broju reaktanata i redu reakcije: bitno je samo da je  $\nu$  stehiometrijski koeficijent reaktanta čiju koncentraciju  $c$  pratimo. Više o tome kasnije, u poglavlju o običnim diferencijalnim jednadžbama.

Budući da je jedinica od  $\Delta c$  ista kao i od  $c$ , a od  $\Delta t$  ista kao i od  $t$ , podrazumijevamo da je  $\frac{dc}{dt}$  fizikalna veličina za koju smo jedinice izlučili još u kvocijentu  $\frac{\Delta c}{\Delta t}$  koji opisuje prosječnu brzinu te  $\frac{dc}{dt}$  ima jedinicu kao i taj kvocijent, a to je mol/(Ls).

**Zadatak 21.** Ako znate da od dvije krivulje na slici 3.2 jedna predstavlja ovisnost udaljenosti točke koja se giba po pravcu o vremenu od neke fiksirane pozicije, a druga brzinu, koja je koja? Argumentirajte!

Koju god od gornjih „definicija” odabrali, trebamo biti svjesni da se ne radi o pravoj definiciji već su to zapravo svojstva derivacije koja slijede iz njene prave definicije (vidi str. ). Ipak, za razumijevanje smisla derivacije i

njenu primjenu, čak i uz poznavanje njene egzaktna definicije, neophodno je znati gornje tri interpretacije.

Ako je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje je  $I$  otvoren interval, te ako postoji  $f'(c)$  za svaki  $c \in I$  (kažemo:  $f$  je **derivabilna na intervalu  $I$** ), onda smo deriviranjem funkcije  $f$  konstruirali novu funkciju  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Primjer 65.** Ako je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x - 3$ , onda je  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konstantna funkcija  $f'(x) = 4$  jer je u svakoj mogućoj točki derivacija od  $f$  jednaka 4.

**Primjer 66.** Niže ćemo u tablici derivacija imati pravilo da je za  $f(x) = \sin x$  derivacija dana s  $f'(x) = \cos x$ . To znači da za svaki konkretan broj  $c$  vrijedi  $f'(c) = \cos c$ , primjerice  $f'(\pi) = \cos \pi = -1$ .

Za rad s derivacijama nužna je **tablica derivacija**:

| $f(x)$                    | $f'(x)$                   |
|---------------------------|---------------------------|
| $C$                       | $0$                       |
| $x^n$                     | $n x^{n-1}$               |
| $a^x$                     | $a^x \ln a$               |
| $\log_a x$                | $\frac{1}{x \ln a}$       |
| $\sin x$                  | $\cos x$                  |
| $\cos x$                  | $-\sin x$                 |
| $\operatorname{tg} x$     | $\frac{1}{\cos^2 x}$      |
| $\operatorname{ctg} x$    | $-\frac{1}{\sin^2 x}$     |
| $\arcsin x$               | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| $\arccos x$               | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\operatorname{arctg} x$  | $\frac{1}{1+x^2}$         |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$        |
| $\operatorname{sh} x$     | $\operatorname{ch} x$     |
| $\operatorname{ch} x$     | $\operatorname{sh} x$     |

**Primjer 67.** Za sve smislene vrijednosti varijable  $x$  vrijedi

$$x' = (x^1)' = 1 x^0 = 1,$$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2},$$

$$(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

$$\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1},$$

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}.$$

Uočite pritom da je u svim osim u trećem slučaju derivacija definirana za iste  $x$  kao i funkcija koju deriviramo: Najčešće se pri deriviranju ne mijenja prirodna domena. Ipak, treći primjer (derivacija trećeg korijena) upućuje na oprez: treći korijen je definiran za sve  $x \in \mathbb{R}$ , dok njegova derivacija nije definirana za  $x = 0$ . Dakle, čak i elementarna funkcija ne mora biti derivabilna u svakoj točki svoje domene (vidi odjeljak 3.3).

Funkcije koje su derivabilne u svakoj točki svoje domene, zovu se jednostavno **derivabilne funkcije**.



**Ponovimo bitno...** Derivacija funkcije  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definira se pojedinačno u svakom  $c \in I$  i označava s  $f'(c)$ . Taj broj se može interpretirati kao aproksimacija relativne promjene vrijednosti funkcije u odnosu na promjenu varijable, za male promjene varijable u odnosu na  $c$ , ili pak kao koeficijent smjera tangente povučene na graf od  $f$  u točki  $(c, f(c))$ . Ako nezavisna varijabla od  $f$  ima interpretaciju vremena, onda je  $f'(c)$  trenutna brzina promjene veličine  $f$  (u trenutku  $c$ ). 

## 3.2 Višestruke derivacije

Deriviranjem funkcije  $f'$  dobivamo **drugu derivaciju**  $f''$ , deriviranjem druge derivacije **treću derivaciju** itd. Oznake za prvu, drugu i treću derivaciju su redom  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$ . Daljnje derivacije ( $n$ -ta za  $n > 3$ ) u pravilu se označavaju s  $f^{(n)}$ .

U kontekstu brzina, drugu derivaciju funkcije možemo interpretirati kao akceleraciju (ubrzanje): Ako je  $x(t)$  pozicija (na pravcu) u trenutku  $t$ , onda je  $\dot{x}(t)$  trenutna brzina, a  $\ddot{x}(t)$  je akceleracija u tom trenutku.

Ako koristimo oznaku tipa  $\frac{df}{dx}$  za prvu derivaciju, onda je oznaka za drugu derivaciju  $\frac{d^2f}{dx^2}$ , za treću  $\frac{d^3f}{dx^3}$  itd.

**Primjer 68.** Druga derivacija funkcije iz primjera 65 je  $f'' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f''(x) = 0$  (nulfunkcija) jer je to derivacija konstantne funkcije  $f'$ . Treća i sve daljnje derivacije su također nulfunkcije.



**Ponovimo bitno...** Više derivacije su derivacije derivacija. Općenito se  $(n + 1)$ -va derivacija  $f^{(n+1)}$  definira kao (prva) derivacija  $n$ -te derivacije  $f^{(n)}$ . 

### 3.3 Kad derivacija ne postoji?

Neispravno je reći da derivacija u primjeru 68 ne postoji — ona postoji i svuda je jednaka nuli. Kad kažemo da derivacija ne postoji želimo reći da se ona ne može izračunati. Ako je ona jednaka nuli, znači da se mogla izračunati, dakle postoji. Nultočke derivacije neke funkcije  $f$  nazivamo **stacionarnim točkama** funkcije  $f$ . O njima ćemo više reći kasnije.

**Primjer 69.** *Uzmimo funkciju sedmog korijena. U njenoj prirodnoj domeni su svi realni brojevi, no njena prva derivacija ( $f'(x) = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$ ) nije definirana u nuli. Zaključujemo da funkcija sedmog korijena nije derivabilna u nuli.*

Ovdje ćemo se pozabaviti pitanjem kako nepostojanje derivacije prepoznamo temeljem grafa funkcije prikazanog u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Podsjetimo se: Derivacija se može interpretirati kao koeficijent smjera tangente na graf funkcije (u promatranoj točki grafa). Stoga da bi postojala derivacija  $f'(c)$ , točkom  $(c, f(c))$  treba prolaziti tangenta čija jednadžba je oblika  $y = kx + l$ .

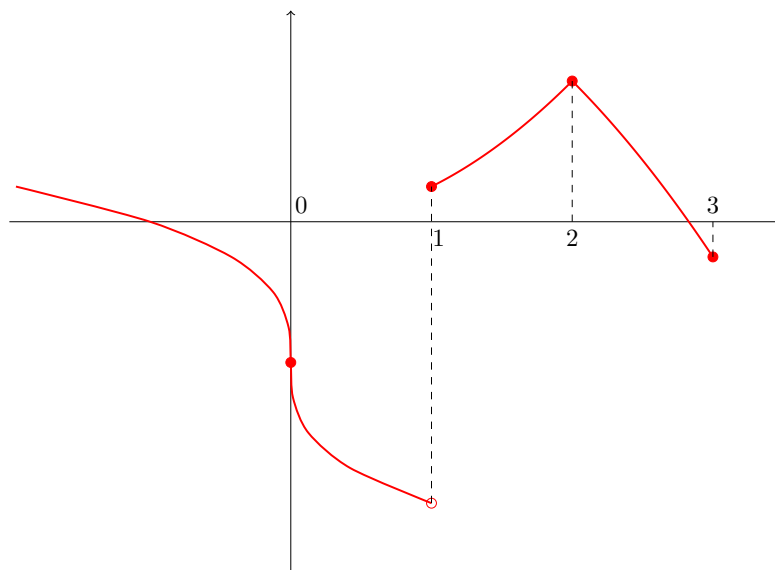
Problem u primjeru 69 je što graf funkcije sedmog korijena u točki  $(0, 0)$  ima vertikalnu tangentu, tj. tangenta je u ovom slučaju pravac kojemu koeficijent smjera nije definiran.

Drugi problem može nastati ako graf ima „špicu” u nekoj točki. Očito nijedan od pravaca kroz „špicu” nije tangenta, jer je tangenta pravac koji se najbolje priljubljuje uz krivulju oko te točke. U slučaju „špice” mogla bi se naći dva pravca koji bi bili tangente „slijeva” i „zdesna”, no nijedan od njih se ne priljubljuje uz graf na drugoj od dvije strane u odnosu na „špicu” te stoga nema tangente i time niti derivacije u pripadnoj apscisi.

**Primjer 70.** *Funkcija apsolutne vrijednosti ima derivaciju jednaku  $-1$  u svim  $x < 0$ , jednaku  $1$  u svim  $x > 0$ , a u  $0$  nema derivaciju.*

Treći mogući problem nastaje ako je u nekoj točki grafa graf „pukao” — i tada iz razloga analognih gore navedenima ne postoji tangenta u toj točki. O ovom će više riječi biti u odjeljku 4.2. Bitno je opet naglasiti da se mora raditi o točki grafa, dakle pripadna apscisa mora biti u domeni funkcije.

Također, ukoliko je domena poluotvoren ili zatvoren interval ili pak ako je domena unija disjunktih intervala od kojih su neki poluotvoreni ili zatvoreni, funkcija (po definiciji) nije derivabilna u nikojem od zatvorenih rubova



Slika 3.3: Graf funkcije koja u četiri točke (0, 1, 2 i 3) nije derivabilna.

tih intervala (dakle, onih rubova koji su uključeni u domenu). Primjerice,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neovisno o pripadnom pravilu nije derivabilna u  $a$  i  $b$ . Možemo to tumačiti ovako: za lijevi rub mogli bismo naći „desnu” tangentu, no kako funkcija nije definirana lijevo od lijevog ruba, slijeva se taj pravac ne priljubljuje uz graf funkcije (jer grafa tamo ni nema); analogno vrijedi za desni rub.

Slika 3.3 prikazuje graf funkcije koja u četiri točke domene nije derivabilna, po jednoj za svaki od navedenih četiriju mogućih razloga nederivabilnosti.



**Ponovimo bitno...** Ako je  $c$  element domene funkcije  $f$ , onda  $f'(c)$  ne postoji u sljedećim slučajevima:

- U  $c$  graf ima „špicu”;
- U  $c$  se graf razdvaja;
- U  $c$  je tangenta vertikalna;
- $c$  je zatvoreni rub nekog od disjunktih intervala koji u uniji čine domenu.



### 3.4 Osnovna svojstva derivacija

Najvažnije svojstvo deriviranja je **linearnost**. Linearnost deriviranja je zapravo spoj dva svojstva, aditivnosti i homogenosti. **Aditivnost deriviranja** znači da je derivacija zbroja funkcija zbroj njihovih derivacija:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

**Homogenost deriviranja** je svojstvo da je derivacija produkta konstante i funkcije jednaka produktu te konstante i derivacije funkcije:

$$(C f(x))' = C f'(x).$$

Uočimo da iz gornjih svojstava slijedi i da je derivacija razlike funkcija razlika njihovih derivacija:

$$\begin{aligned}(f(x) - g(x))' &= (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = f'(x) + ((-1) \cdot g(x))' = \\ &= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x).\end{aligned}$$

**Primjer 71.** Za sve  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$(x^5 - \pi \sin x + \sqrt{5})' = (x^5)' - \pi(\sin x)' + (\sqrt{5})' = 5x^4 - \pi \cos x.$$

**Zadatak 22.** Koristeći linearnost deriviranja izvedite formule za derivacije sinusa hiperbolnog i kosinusa hiperbolnog.

Korisno je primijetiti da se koristeći linearnost deriviranja lako uvjeriti da vrijedi: Ako imamo polinom stupnja  $n$ , njegova prva derivacija je polinom stupnja  $n - 1$ , njegova druga derivacija je polinom stupnja  $n - 2$  i t.d.;  $n$ -ta derivacija polinoma stupnja  $n$  je konstantna funkcija, a sve daljnje derivacije  $((n + 1)$ -va,  $(n + 2)$ -ga, ...) su nulfunkcije.

Za slučaj da trebamo derivirati funkciju koja je produkt ili kvocijent dviju funkcija potrebne su malo kompliciranije formule.

**Primjer 72.** Uzmimo  $f(x) = x^2$  i  $g(x) = 2x$ . Tada je  $f'(x) = 2x$  i  $g'(x) = 2$ .

Umnožak funkcija  $f$  i  $g$  je funkcija  $h$  formule  $h(x) = x^3$ . Njena derivacija je  $h'(x) = 3x^2$ , što je različito od  $f'(x)g'(x) = 2x$ , dakle derivacija umnoška funkcija nije umnožak njihovih derivacija.

Također, kvocijent funkcija  $f$  i  $g$  je funkcija formule  $k(x) = \frac{x}{2}$  i njena je derivacija  $k'(x) = \frac{1}{2}$ , što je različito od  $f'(x) : g'(x) = x$ , dakle derivacija kvocijenta funkcija nije kvocijent njihovih derivacija.

Pravilne formule za derivacije produkta i kvocijenta funkcija su:

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Napominjemo da je  $g^2(x)$  uobičajena oznaka za kvadriranu vrijednost  $g(x)$ , tj.  $g^2(x) = (g(x))^2$ .

**Primjer 73.** Prirodna domena funkcije zadane s  $f(x) = x \ln x - \frac{x}{e^x}$  je skup svih pozitivnih brojeva. Za sve  $x > 0$  vrijedi

$$f'(x) = (x \ln x)' - \left(\frac{x}{e^x}\right)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' - \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{e^{2x}} = \ln x + 1 - \frac{1-x}{e^x}.$$

**Zadatak 23.** Koristeći formulu za deriviranje kvocijenta funkcija izvedite formule za derivacije tangensa i kotangensa.

**Primjer 74.** Derivirajmo funkciju  $f(x) = \exp(3x)$ . Kako je  $f(x) = (e^3)^x$ , možemo ju derivirati po pravilu za derivaciju eksponencijalne funkcije s bazom  $e^3$ :

$$f'(x) = (e^3)^x \cdot \ln e^3 = 3(e^3)^x = 3e^{3x}.$$

Slično, ako bismo trebali derivirati  $g(x) = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ , mogli bismo primijeniti pravilo za derivaciju produkta i dobili bismo

$$g'(x) = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin(2x).$$

No, što da smo trebali derivirati  $h(x) = (\ln x)^{1000}$ ? Potencija je prevelika da bismo uzastopno primijenjivali pravilo za deriviranje produkta. Ili: kako derivirati  $l(x) = (\cos x)^\pi$ ?

U gornjem primjeru radilo se o kompozicijama nekih elementarnih funkcija s potenciranjem na fiksnu potenciju. Općenito, **pravilo za deriviranje kompozicije funkcija** glasi  $(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$ , gdje je  $y = f(x)$ . To se pravilo obično piše u obliku

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ovo pravilo poznato je i pod nazivom **lančano pravilo**.

**Primjer 75.** Derivirajmo  $h(x) = (\ln x)^{1000}$ . To je kompozicija „vanjske funkcije” potenciranja na 1000-tu ( $g(y) = y^{1000}$ ) i „unutrašnje funkcije” prirodnog logaritma ( $y = f(x) = \ln x$ ). Stoga je

$$h'(x) = 1000y^{999} \cdot \frac{1}{x} = 1000 \frac{(\ln x)^{999}}{x}.$$

Analogno je derivacija od  $l(x) = (\cos x)^\pi$  dana s  $l'(x) = -\pi (\cos x)^{\pi-1} \sin x$ .

Često dobro dođe zapamtiti specijalni slučaj pravila za derivaciju kompozicije funkcija, za slučaj da je „vanjska” funkcija prirodni logaritam:

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Primjena gornje formule, tj. određivanje derivacije funkcije tako da ju prvo logaritmiramo, pa onda deriviramo logaritmiranu funkciju, zove se **logaritamsko deriviranje**.

**Primjer 76.** Derivirajmo opću potenciju  $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$  logaritamskim deriviranjem. Prvo logaritmiramo funkciju:

$$\ln f(x) = x \ln x.$$

Sad deriviramo logaritmiranu funkciju (deriviramo  $\ln f(x)$ ) i iz dobivenog izrazimo  $f'(x)$ :

$$(\ln f(x))' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 + \ln x,$$

$$f'(x) = (1 + \ln x)f(x) = (1 + \ln x)x^x.$$

Za slučaj kad je  $f$  bijekcija i  $g = f^{-1}$  njena inverzna funkcija, po definiciji imamo<sup>3</sup>

$$(g \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x,$$

pa je

$$(g \circ f)'(x) = 1.$$

Uz

$$y = f(x),$$

iz formule

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

dobivamo **pravilo za derivaciju inverzne funkcije**

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

---

<sup>3</sup>Podsjećamo da je ovaj, kao i gotovo svi izvodi i dokazi u ovom udžbeniku, pojednostavljena verzija egzaktnog matematičkog izvoda odnosno dokaza.



**Primjer 77.** Izvedimo pravilo za derivaciju arkus-sinusa, koji je inverzna funkcija funkcije Sin. Prvo, arcsin kao domen ima  $[-1, 1]$  pa nije derivabilan u  $\pm 1$  (kao što i Sin nije derivabilan u  $\pm \frac{\pi}{2}$ ), odnosno određujemo  $(\arcsin)'(x)$  za  $-1 < x < 1$ .

Za  $x \in I = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$  je  $y = f(x) = \text{Sin } x = \sin x$ ,  $f'(x) = \cos x$  i  $y \in \langle -1, 1 \rangle$ . Stoga je po gornjoj formuli

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}}.$$

U zadnjoj formuli biramo predznak  $+$  jer je  $\cos x > 0$  za  $x \in I$  pa imamo

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

U slučaju da se umjesto  $f'(x)$  koristi notacija  $\frac{df}{dx}$ , prethodno navedene formule za deriviranje poprimaju oblike:

$$\frac{d(y \pm z)}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d(yz)}{dx} = z \frac{dy}{dx} + y \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d}{dx} \frac{y}{z} = \frac{z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx}}{z^2},$$

lančano pravilo poprima oblik

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx},$$

(pri čemu mislimo na  $z = z(x) = z(y(x))$ ), a pravilo za derivaciju inverzne funkcije se onda zapisuje ovako:

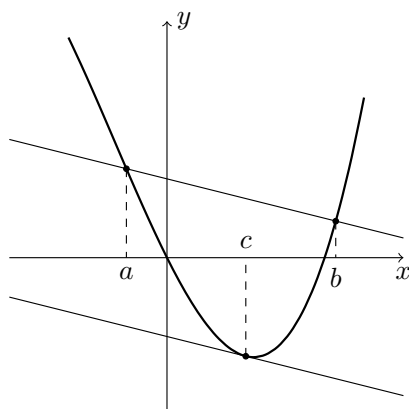
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

**Primjer 78.** Neka je  $y(x) = \exp(x)$ . Odredimo

$$\frac{d(y/x)}{d(1/x)},$$

tj. derivaciju kvocijenta  $\frac{y}{x} = \frac{\exp(x)}{x}$  po varijabli  $t = \frac{1}{x}$ . Imamo

$$\frac{d(y/x)}{d(1/x)} = \frac{d(y/x)}{dx} \cdot \frac{dx}{d(1/x)} =$$



Slika 3.4: Lagrangeov teorem srednje vrijednosti.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\exp(x) \cdot x - \exp(x) \cdot 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{d(1/x)}{dx}} = \\
 &= \exp(x) \cdot \frac{x-1}{x^2} \cdot \frac{1}{-1/x^2} = (1-x) \exp(x).
 \end{aligned}$$

Za kraj ovog odjeljka navodimo, naravno bez dokaza, jedan od najvažnijih teorema o derivabilnim funkcijama:

**Teorem 2 (Lagrangeov teorem srednje vrijednosti).** *Ako je funkcija  $f$  derivabilna na otvorenom intervalu  $I$ , onda za svaka dva broja  $a, b \in I$  ( $a < b$ ) postoji  $c \in \langle a, b \rangle$  takav da je*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometrijski gledano, teorem kaže da ćemo za derivabilnu funkciju i njenu proizvoljnu sekantu moći naći točku na grafu (između točaka koje određuju sekantu) takvu da je tangenta u toj točki paralelna toj sekanti (vidi sliku 3.4). Fizikalno gledamo, teorem kaže da za svaku vremenski ovisnu veličinu postoji trenutak u kojem je trenutna brzina promjene te veličine jednaka prosječnoj brzini tokom cijelog promatranog vremenskog intervala.

**Zadatak 24.** *Recimo da znate da za neku funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vrijedi  $f(2) = 1$  i  $f'(x) \leq 5$  za sve  $x \in \mathbb{R}$ . Pokažite da je  $f(5) \leq 16$  i  $f(-1) \geq -14$ .*



**Ponovimo bitno...** Derivacije elementarnih funkcija u svim točkama njihove prirodne domene u kojima postoje navode se u tablicama derivacija.

Najvažnije od derivacija elementarnih funkcija su  $C' = 0$  (derivacija konstantne funkcije je nulfunkcija),  $(x^n)' = nx^{n-1}$  (derivacija potencije dobije se spuštanjem eksponenta i njegovim smanjivanjem za 1),  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ ,  $(e^x)' = e^x$  i  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ . Deriviranje je linearno: derivacija zbroja ili razlike funkcije je zbroj odnosno razlika njihovih derivacija i derivacija od funkcije pomnožene s nekom konstantom jednaka je derivaciji te funkcije pomnožene s tom konstantom. Produkt funkcija se derivira tako da se derivira svaki član produkta i pomnoži s nederiviranim ostalim članovima te se tako dobiveni izrazi zbroje. Derivacija kvocijenta jednaka je razlici derivacije brojnika pomnožene s nazivnikom i derivacije nazivnika pomnožene s brojnikom, sve skupa podijeljeno s kvadratom nazivnika. Kompozicija funkcija se derivira tako da se uzastopno množe derivacije funkcija koje čine funkciju, pri čemu su u derivaciju pojedine funkcije uvršteni isti izrazi koji su u nju uvršteni prije deriviranja. Derivacija inverzne funkcije recipročna je derivaciji polazne funkcije, pri čemu je nezavisna varijabla polazne funkcije izražena preko zavisne (koja je sad nezavisna za inverznu funkciju). Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti, ako je funkcija derivabilna na nekom intervalu i ako su  $a$  i  $b$  dva elementa tog intervala, onda je derivacija te funkcije u bar jednoj točki između  $a$  i  $b$  jednaka  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . 🐣🐣🐣

### 3.5 Uvod u diferencijalne jednadžbe

Diferencijalne jednadžbe posredno opisuju nepoznatu funkciju preko veze između nje, njezine nezavisne varijable i njezinih derivacija. Rješenje diferencijalne jednadžbe je svaka funkcija koja uvrštavanjem u jednadžbu daje jednakost koja je istinita za sve vrijednosti nezavisne varijable. Primjerice,  $y = C e^x$  je za svaku konstantu  $C$  rješenje diferencijalne jednadžbe  $y' = y$  jer za svaki  $x$  vrijedi  $(C e^x)' = C e^x$ .

Rješavanjem diferencijalnih jednadžbi bavit ćemo se u poglavlju 9, a ovdje ćemo samo primjerima pokazati kako za neku funkciju provjeriti je li ona rješenje dane diferencijalne jednadžbe i kako iskoristiti tzv. početne uvjete.

**Primjer 79.** Promotrimo diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

*Uzmimo da je  $y = (1+x) \exp(4x)$ . Tada je  $y' = \exp(4x) + 4(1+x) \exp(4x) = (5+4x) \exp(4x)$  i  $y'' = 4 \exp(4x) + 4(5+4x) \exp(4x) = (24+16x) \exp(4x)$ . Uvrstimo li  $y$ ,  $y'$  i  $y''$  u jednadžbu dobijemo*

$$(24+16x) \exp(4x) - 8 \cdot (5+4x) \exp(4x) + 16 \cdot (1+x) \exp(4x) = 0.$$

Kako je  $e^{4x} > 0$  za sve  $x$ , prethodnu jednakost možemo podijeliti s  $e^{4x}$  te dobijemo  $24 + 16x - 40 - 32x + 16 + 16x = 0$ , što je istinito za sve  $x$ . Stoga je  $y = (1 + x)e^{4x}$  jedno rješenje jednadžbe  $y'' - 8y' + 16y = 0$ . Sva rješenja jednadžbe su oblika  $y = (C_1 + C_2x)e^{4x}$  za različite konstante  $C_1$  i  $C_2$  — lako je uvrštavanjem provjeriti da to jesu rješenja, teže je dokazati da nema drugih.

Diferencijalna jednadžba u kojoj se nepoznata funkcija pojavljuje samo jednom derivirana je prvog reda, a ako se (kao u zadnjem primjeru) pojavljuje i druga derivacija nepoznate funkcije, onda je drugog reda. Općenito, rješenja diferencijalnih jednadžbi prvog reda sadrže jednu neodređenu konstantu, a rješenja jednadžbi drugog reda sadrže dvije ( $C_1$  i  $C_2$  u gornjem primjeru).

U fizikalnom kontekstu diferencijalne jednadžbe najčešće dobijemo povezivanjem osnovne funkcije (puta, koncentracije, ...) s brzinom njezine promjene (prvom derivacijom) i eventualno njenom akceleracijom (drugom derivacijom) koristeći fizikalne zakone. Podsjetimo se ovdje da za slučajeve kad je nezavisna varijabla označena s  $t$  (posebice kad ona stvarno predstavlja vrijeme) uobičajeno prvu i drugu derivaciju funkcije  $y$  ovisne o  $t$  označavati s  $\dot{y}$  i  $\ddot{y}$ .

**Primjer 80.** Promatramo li titranje objekta mase  $m$  na vertikalno visećoj opruzi s koeficijentom elastičnosti  $k$ , u svakom trenutku možemo bilježiti vertikalni odmak  $z$  tijela od ravnotežnog položaja  $z = 0$  (recimo, pozitivni  $z$  znači pomak nadolje, a negativni nagore). Prema drugom Newtonovom zakonu, u svakom trenutku je  $m a(t) = -k z(t)$ , tj.  $m \ddot{z} = -k z$ . Time smo dobili diferencijalnu jednadžbu drugog reda koja opisuje ovisnost pozicije  $z$  o vremenu.

**Primjer 81.** Prema Newtonovom zakonu grijanja i hlađenja je brzina promjene temperature sustava  $\vartheta$  ( $u^\circ\text{C}$ ) u svakom trenutku proporcionalna razlici temperature okoline i sustava. Dakle, ako temperaturu okoline označimo s  $\vartheta_{\text{ok}}$  Newtonov zakon grijanja i hlađenja poprima oblik

$$\dot{\vartheta} = k(\theta_{\text{ok}} - \vartheta),$$

gdje je  $\theta$  funkcija nezavisne varijable  $t$  i  $k$  konstanta (negativna ako se radi o hlađenju, a pozitivna ako se radi o zagrijavanju).

Recimo da je promatrani sustav patka koju želimo ispeći u pećnici (dakle, pećnica je okolina) zagrijanoj na konstantnih  $200^\circ\text{C}$ . Odgovarajuća diferencijalna jednadžba je stoga

$$\dot{\vartheta} = k(200^\circ\text{C} - \vartheta) \quad (3.1)$$

Budući da je mjerna jedinica za  $\theta$  jednaka  $^\circ\text{C}$ , ako vrijeme mjerimo u minutama, jedinica od  $\dot{\vartheta}$  je  $^\circ\text{C min}^{-1}$  te je jedinica od  $k$  jednaka  $\text{min}^{-1}$ .

Provjerimo da je ovisnost temperature patke o vremenu opisana s

$$\vartheta(t) = 200^{\circ}\text{C} - a \exp(-k t),$$

gdje je  $a$  neka pozitivna konstanta. Da bismo to provjerili, budući da je diferencijalna jednačba prvog reda, trebamo jednom derivirati predloženo rješenje:

$$\dot{\vartheta}(t) = a k \exp(-k t),$$

Uvrstimo  $\vartheta$  i  $\dot{\vartheta}$  u diferencijalnu jednačbu 3.1:

$$a k \exp(-k t) = k (200^{\circ}\text{C} - 200^{\circ}\text{C} + a \exp(-k t))$$

što daje

$$a k \exp(-k t) = a k \exp(-k t),$$

a to je očito istinito za sve trenutke  $t$  te zaključujemo da je predložena funkcija rješenje diferencijalne jednačbe 3.1.

Da bi diferencijalna jednačba jednoznačno opisivala nepoznatu funkciju potrebni su i tzv. početni uvjeti.

**Primjer 82.** Ukoliko znamo da je patka iz primjera 81 na početku izvađena iz hladnjaka i stoga imala temperaturu  $2^{\circ}\text{C}$  te je odmah stavljena u pećnicu,<sup>4</sup> znamo da je  $\vartheta(0 \text{ min}) = 2^{\circ}\text{C}$  — to je početni uvjet za naš problem.

Iz primjera 81 znamo da je  $\vartheta(t) = 200^{\circ}\text{C} - a \exp(-k t)$ , pri čemu imamo dvije konstante  $a$  (koja potječe od rješavanja diferencijalne jednačbe) i  $k$  (koja potječe od samog fizikalnog zakona) nepoznatih iznosa. Početni uvjet  $\vartheta(0 \text{ min}) = 2^{\circ}\text{C}$  uvrstimo u formulu za  $\vartheta$ :

$$2^{\circ}\text{C} = \vartheta(0 \text{ min}) = 200^{\circ}\text{C} - a \exp(-k \cdot 0 \text{ min}) = 200^{\circ}\text{C} - a.$$

Vidimo dakle da je  $a = 198^{\circ}\text{C}$ , tj.

$$\vartheta(t) = 200^{\circ}\text{C} - 198^{\circ}\text{C} \exp(-k t).$$

Početni uvjet nam je bio dovoljan da odredimo nepoznatu konstantu koja potječe od rješavanja diferencijalne jednačbe, ali nije dovoljan da odredimo iznos koeficijenta  $k$ . No, ako bismo znali još jedan podatak o temperaturi patke u nekom trenutku nakon što smo ju stavili u pećnicu, možemo odrediti i njega. Recimo, nakon 30 minuta izmjerili smo temperaturu patke i dobili da je tada bila  $16^{\circ}\text{C}$ , dakle  $\vartheta(30 \text{ min}) = 16^{\circ}\text{C}$ . Ponovimo postupak kao kad smo koristili početni uvjet, ali sa zadnjim određenim oblikom funkcije  $\vartheta$ :

$$16^{\circ}\text{C} = \vartheta(30 \text{ min}) = 200^{\circ}\text{C} - 198^{\circ}\text{C} \exp(-k \cdot 30 \text{ min}).$$

---

<sup>4</sup>To u praksi nije preporučljivo.

Rješavanje gornje eksponencijalne jednadžbe daje

$$k = \left( -\frac{1}{30} \ln \frac{92}{99} \right) \text{ min}^{-1} \approx 0,00244438 \text{ min}^{-1}.$$

Stoga je temperatura patke u svakom trenutku

$$\vartheta(t) = 200^\circ\text{C} - 198^\circ\text{C} \exp(-0,00244438t \text{ min}^{-1}).$$

Želimo li još znati kad će patka biti pečena, tj. kad će joj temperatura biti  $\vartheta(t) = 80^\circ\text{C}$ , uvrstimo to u zadnju formulu i riješimo s obzirom na  $t$ . Ispasti će da se patka treba peći približno 204,868 minuta, tj. otprilike 3 sata i 25 minuta.

**Primjer 83.** U kemijskoj kinetici se reakcije drugog reda, na čiju brzinu utječe samo jedan reaktant R, mogu opisati zakonom brzine koji je diferencijalna jednadžba prvog reda oblika

$$\frac{1}{\nu} \dot{c} = k c^2,$$

gdje je  $\nu$  stehiometrijski koeficijent (negativan) reaktanta R, a  $c = c(t)$  njegova množinska koncentracija, ovisna o vremenu  $t$ , a  $k$  je pozitivna konstanta (tzv. koeficijent brzine reakcije).

Lako je provjeriti da je  $c(t) = \frac{C}{1 - C\nu kt}$  rješenje gornje diferencijalne jednadžbe. Kako je na lijevoj strani množinska koncentracija, a nazivnik na desnoj strani čisti broj, slijedi da je fizikalna dimenzija od  $C$  množinska koncentracija. Uvrštavanjem  $t = 0$  vidimo da je  $C$  točno početna koncentracija od R. Ako nju označimo s  $c_0$ , dobivamo sljedeći oblik opisa vremenske ovisnosti koncentracije reaktanta, koju nazivamo i integriranim zakonom brzine reakcije (drugog reda, sa samo jednim reaktantom koji utječe na brzinu):

$$c(t) = \frac{c_0}{1 - c_0\nu kt}.$$

Ako je poznato da su koncentracije reaktanta mjerene, recimo, svakih 50 s od početka reakcije i iznosile su redom 1,00 mol/L, 0,905 mol/L, 0,820 mol/L, 0,741 mol/L, ..., a želimo provjeriti hipotezu da se radi o reakciji drugog reda, posljednja formula nam nije od velike pomoći, odnosno umjesto da pokušamo podesiti  $k$  u toj formuli tako da redom za  $t = 0, 50, 100, 150, \dots$  s dobijemo upravo navedene iznose koncentracije  $c$ , lakše je promotriti gornju diferencijalnu jednadžbu. Naime, ako je točna pretpostavka da se radi o reakciji drugog reda, onda ta jednadžba kaže da je u svakom trenutku

trenutna brzina koncentracije razmjerna kvadratu koncentracije, odnosno da prosječna brzina promjene koncentracije (na dovoljno kratkim vremenskim intervalima) podijeljena s kvadratom koncentracije na početku pojedinog vremenskog intervala uvijek daje bar približno istu vrijednost.

Dakle, ako je naša reakcija drugog reda, moralo bi biti  $\frac{0.905-1.00}{50 \cdot 1.00^2} \approx \frac{0.820-0.905}{50 \cdot 0.905^2} \approx \frac{0.741-0.820}{50 \cdot 0.820^2} \approx \dots$ . U našem slučaju dobivamo redom kvocijente  $-1,90 \cdot 10^{-3}$ ,  $-2,07 \cdot 10^{-3}$ ,  $-2,34 \cdot 10^{-3}$ ,  $\dots$ , što, čini se, sugerira da se ne radi o reakciji drugog reda (no, uzmimo u obzir da su vremenski intervali od 50 sekundi dosta dugi te bi mjerenja obavljena u kraćim razmacima mogla dati drugačiji odgovor).

**Primjer 84.** Prema drugom Kirchhoffovom zakonu, zbroj svih napona u strujnoj petlji jednak je nuli. Za jednostavni LR-strujni krug (s jednim otpornikom konstantnog otpora  $R^5$  i zavojnicom konstantnog induktiviteta  $L^6$ ) koji se napaja konstantnim naponom  $E$  drugi Kirchhoffov zakon poprima oblik

$$L\dot{I} + RI = E, \quad I = I(t),$$

s početnim uvjetom

$$I(0) = 0.$$

Lako se provjeri da je ovisnost jakosti struje  $I$  o vremenu  $t$  dana formulom

$$I(t) = \frac{E}{R} (1 - \exp(-Rt/L)).$$



**Ponovimo bitno...** Diferencijalne jednadžbe indirektno opisuju funkciju preko veze između nje, njenih derivacija i njezine nezavisne varijable. Funkcija je rješenje diferencijalne jednadžbe ako njenim uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo jednakost istinitu za sve vrijednosti varijable.



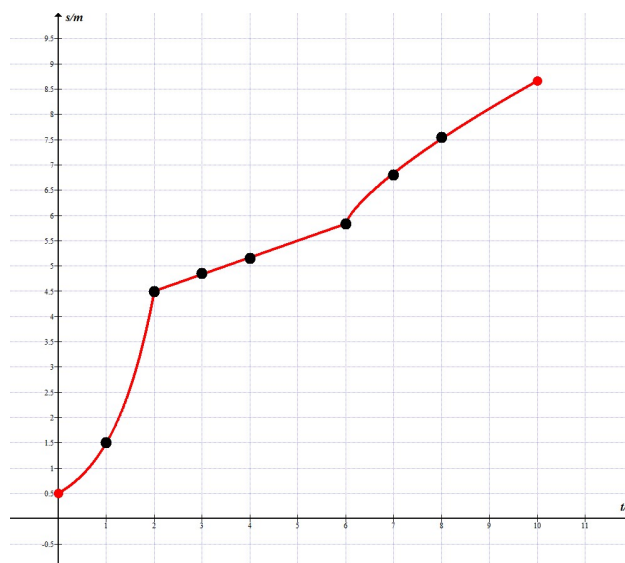
### 3.6 Konveksnost i konkavnost

**Primjer 85.** Materijalna točka giba se pravocrtno tijekom 10 sekundi. Prvo se 2 sekunde giba ubrzano, zatim 4 sekunde jednoliko, a dalje usporeno.

To znači da u jednakim vremenskim intervalima unutar prve dvije sekunde će prevaživati sve veće puteve:  $\Delta s$  će biti sve veći pri jednakim  $\Delta t$ . Primjerice, na slici 3.5 vidi se da je u prvoj sekundi ( $\Delta t = 1$ ) prijeđeni put

<sup>5</sup>To dovodi do pada napona  $RI$ .

<sup>6</sup>To dovodi do pada napona  $L\dot{I}$ .



Slika 3.5: Ovisnost puta o vremenu za gibanje koje je prvo ubrzano, pa jednoliko, pa usporeno.

$\Delta s \approx 1$  m, a u drugoj je  $\Delta s \approx 3$  m. Vizualno, graf od  $s = s(t)$  je za taj raspon  $t$  „udubljen“.

U jednakim vremenskim intervalima unutar sljedeće četiri sekunde će prevaljivati jednake puteve:  $\Delta s$  će biti jednak pri jednakim  $\Delta t$ . Primjerice, na slici 3.5 vidi se da je u trećoj sekundi ( $\Delta t = 1$ ) prijeđeni put  $\Delta s \approx 0,3$  m, koliko je i u četvrtoj sekundi. Vizualno, graf od  $s = s(t)$  je za taj raspon  $t$  „ravan“.

U jednakim vremenskim intervalima unutar zadnje četiri sekunde će prevaljivati sve manje puteve:  $\Delta s$  će biti sve manji pri jednakim  $\Delta t$ . Primjerice, na slici 3.5 vidi se da je u sedmoj sekundi ( $\Delta t = 1$ ) prijeđeni put  $\Delta s \approx 1$  m, dok je u osmoj sekundi  $\Delta s \approx 0,7$  m. Vizualno, graf od  $s = s(t)$  je za taj raspon  $t$  „izbočen“.

Umjesto opisa udubljen i izbočen, u matematici i prirodnim znanostima koriste se izrazi konveksan i konkavan.

**Definicija 11** (Konveksnost i konkavnost funkcije). Funkcija  $f$  je na intervalu  $I$  konveksna ako za svaka dva broja  $x_1 < x_2$  iz tog intervala vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$



*Funkcija  $f$  je na intervalu  $I$  konkavna ako za svaka dva broja  $x_1 < x_2$  iz tog intervala vrijedi*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Dakle, konveksna funkcija u aritmetičkoj sredini bilo kojih dviju svojih nezavisnih varijabli (unutar promatranog intervala) ne postiže vrijednost veću od aritmetičke sredine tim nezavisnim varijablama pridruženih iznosa, dok konkavna funkcija u aritmetičkoj sredini bilo kojih dviju svojih nezavisnih varijabli (unutar promatranog intervala) ne postiže vrijednost manju od aritmetičke sredine tim nezavisnim varijablama pridruženih iznosa.

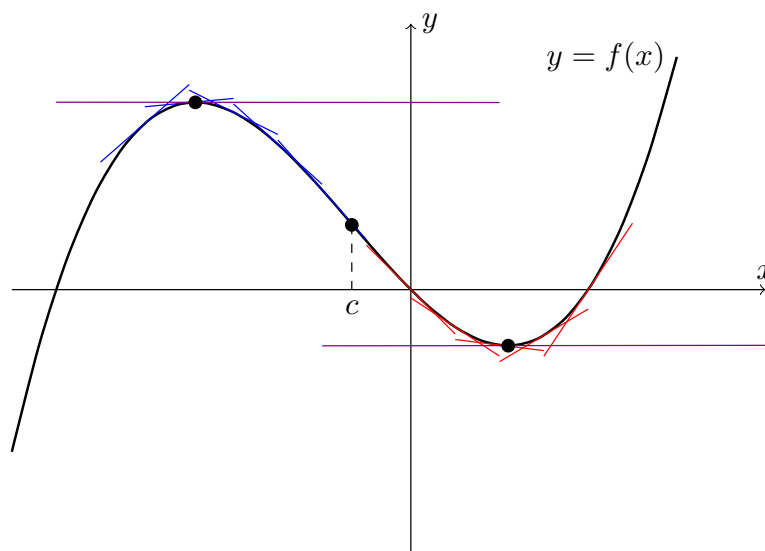
**Napomena 10.** *Afine funkcije su istovremeno konveksne i konkavne.*

**Primjer 86.** *Pogledajmo opet graf na slici 3.5 i razmislimo o nagibima tangenti. Za vrijednosti nezavisne varijable  $x = t/s$  u rasponu od 0 do 2 vidimo da nagibi tangenti postaju sve veći. Budući da je nagib tangente u svakoj točki grafa derivabilne funkcije jednak prvoj derivaciji te funkcije, zaključujemo da na intervalu  $[0, 2]$  derivacija funkcije  $y = s/m$  u ovisnosti o  $x$  raste. Slično, za vrijednosti nezavisne varijable  $x$  u rasponu od 6 do 10 vidimo da nagibi tangenti postaju sve manji. Stoga zaključujemo da na intervalu  $[6, 10]$  derivacija funkcije  $y$  u ovisnosti o  $x$  pada.*

**Primjer 87.** *Na slici 3.6 vidimo da na konkavnom dijelu lijevo od  $c$  nagibi tangenti padaju, a na konveksnom dijelu desno od  $c$  rastu.*

Otprije znamo da je za derivabilne funkcije rast ekvivalentan pozitivnoj derivaciji, a pad negativnoj. Dakle, ako je derivacija od  $f'$  pozitivna, onda  $f'$  raste (odnosno, koeficijenti smjera tangenti na graf od  $f$  rastu, pa je graf konveksan), a ako je derivacija od  $f'$  negativna, onda  $f'$  pada (odnosno, koeficijenti smjera tangenti na graf od  $f$  padaju, pa je graf konkavan). Budući da je derivacija od  $f'$  isto što i  $f''$ , zaključujemo da za dvaput derivabilne funkcije (a u primjenama je većina funkcija dvaput derivabilna u svim ili gotovo svim točkama svoje domene) vrijedi:

**Teorem 3** (Veza između predznaka druge derivacije i zakrivljenosti grafa funkcije). *Ako funkcija na nekom intervalu ima pozitivnu drugu derivaciju, ona je konveksna na tom intervalu, a ako na nekom intervalu ima negativnu drugu derivaciju, ona je konkavna na tom intervalu. Vrijedi i obrnuto: konveksne dvaput derivabilne funkcije imaju pozitivnu, a konkavne dvaput derivabilne funkcije negativnu drugu derivaciju (na intervalu na kojem su konveksne, odnosno konkavne).*



Slika 3.6: Lijevo od  $c$  funkcija  $f$  je konkavna, a desno konveksna:  $c$  je točka infleksije funkcije  $f$ .

Na slici 3.6 je vidljivo da u točki  $c$  dolazi do promjene zakrivljenosti iz konkavne u konveksnu. Takve točke na grafovima realnih funkcija jedne varijable, odnosno njihove apscis, nazivamo točkama infleksije:

**Definicija 12 (Točka infleksije).** *Točka infleksije funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  je element  $c$  njezine domene sa svojstvom da je na nekom intervalu  $\langle a, c \rangle \subseteq D$  funkcija  $f$  konveksna, a na nekom intervalu  $\langle c, b \rangle \subseteq D$  konkavna, ili obrnuto.*

Zbog veze zakrivljenosti grafa (konveksnosti odnosno konkavnosti) sa drugom derivacijom funkcije (teorem ) vidimo da kod dvaput derivabilnih funkcija točke infleksije uočavamo kao one u kojima dolazi do promjene predznaka druge derivacije. Najčešće su točke infleksije nultočke druge derivacije, no moguće je da točka infleksije bude i element domene funkcije u kojem ne postoji prva (ili druga) derivacija. Također, nije svaka nultočka druge derivacije točka infleksije.

**Primjer 88.** *Uzmimo funkciju  $f(x) = x^4$ . Za nju je  $f'(x) = 4x^3$  i  $f''(x) = 12x^2$ . Stoga je 0 nultočka od  $f''$ , ali znamo da graf od  $f$  nema točke infleksije.*

Kao što smo vidjeli u primjeru 85, pitanje konveksnosti i konkavnosti nije samo geometrijsko. Ovisnost puta o vremenu (kod pravocrtnog gibanja) je

konveksna kad je akceleracija (tj. druga derivacija puta po vremenu) pozitivna, konkavna kad je negativna, a oboje (tj. pravocrtna) na intervalima na kojima je akceleracija nula.

**Primjer 89.** *Ako graf prikazuje ovisnost puta o vremenu nekog trkača, taj će graf u pravilu do nekog trenutka  $T$  biti konveksan, a zatim konkavan: značenje trenutka  $T$  (točke infleksije) je ovdje da je to onaj trenutak u kojem se počeo očitovati umor trkača.*

Naposlijetku uočimo da konveksnost i konkavnost nemaju neposredne veze s rastom i padom. Kao što vidimo primjerice na slici 3.6, funkcija može biti konveksna na nekom intervalu na kojem pada, na kojem raste i na konkavna na nekom intervalu na kojem pada, na kojem raste i na kojem prvo raste pa onda pada.



**Ponovimo bitno...** Grafovi funkcija na pojedinim intervaluima mogu biti „udubljeni“ (konveksni), ravni (i konveksni i konkavni) ili „izbočeni“ (konkavni). Zakrivljenost kod dvaput derivabilnih funkcija određujemo iz predznaka druge derivacije: pozitivna druga derivacija znači konveksnost funkcije, a negativna konkavnost. Elementi domene u kojima dolazi do promjene konveksnosti u konkavnost ili obrnuto nazivaju se točke infleksije. 

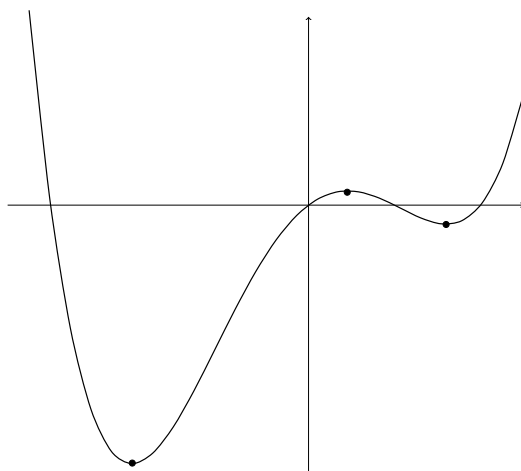


### 3.7 Lokalni ekstremi realnih funkcija jedne varijable

Neka je zadana funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Jedno od najčešćih pitanja u primjenama matematike u kojima se kao model koriste realne funkcije je: Gdje ta funkcija postiže ekstreme i koliko oni iznose? Problematika određivanja ekstrema funkcija naziva se i optimizacijom.

Što su to uopće ekstremi, tj. minimumi i maksimumi, funkcija? Postoje dvije vrste ekstrema: lokalni i globalni. Globalni ekstremi se odnose na čitavu domenu funkcije, dok se lokalni odnose samo na njen dio. U ovom odjeljku bavimo se lokalnim ekstremima, a u sljedećem globalnim.

**Definicija 13 (Lokalni ekstremi).** *Točka lokalnog maksimuma (minimuma) funkcije  $f$  je element  $c$  iz njene domene  $D$  takav da je  $f(c) \geq f(x)$  (za minimum:  $f(c) \leq f(x)$ ) za sve  $x$  iz nekog otvorenog intervala (točnije, iz presjeka nekog otvorenog intervala s domenom od  $f$ ) koji sadrži  $c$ . Iznos  $f(c)$  se u tom slučaju zove lokalni maksimum (minimum) funkcije  $f$ .*



Slika 3.7: Primjer funkcije s tri lokalna ekstrema.

**Primjer 90.** Funkcija čiji je graf prikazan na slici 3.7 ima dvije točke lokalnog minimuma te jednu točku lokalnog maksimuma.

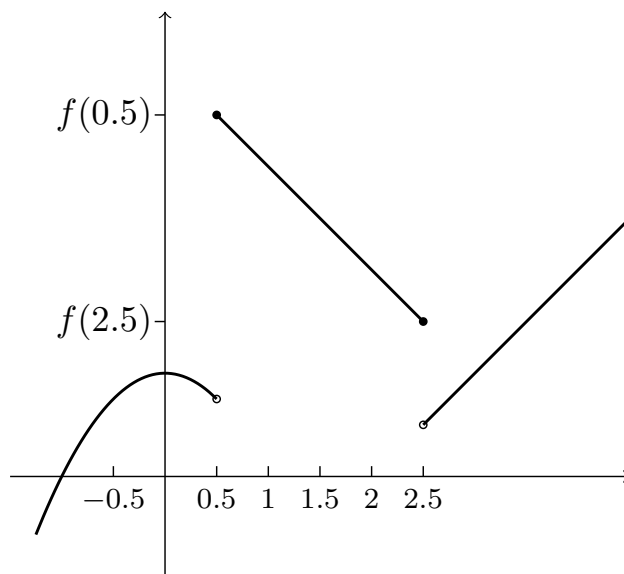
**Primjer 91.** Za funkciju čiji graf je prikazan slikom 3.8, točka 0,5 je točka lokalnog ekstrema (maksimuma) jer je  $f(0,5)$  veće od vrijednosti funkcije za  $x$  blizu (bilo lijevo bilo desno)  $c = 0,5$ , no 2,5 nije točka lokalnog ekstrema jer  $f(2,5)$  nije ni veće ni manje od svih vrijednosti funkcije oko  $c = 2,5$  (malo lijevo od 2,5 vrijednosti su veće, a malo desno su manje od  $f(2,5)$ ).

Prvo što možemo uočiti sa slike 3.7 jest da u slučaju da imamo element domene (apscisu točke na grafu) tako da u njemu dolazi do promjene rasta u pad ili obrnuto, u toj točki funkcija postiže lokalni ekstrem. Formalnije iskazano:

**Propozicija 1.** Ako je  $f$  definirana na nekom intervalu oko  $c$ ,  $c$  je točka lokalnog maksimuma ako  $f$  raste na nekom intervalu  $\langle a, c \rangle$  i pada na nekom intervalu  $\langle c, b \rangle$ .

Ako je  $f$  definirana na nekom intervalu oko  $c$ ,  $c$  je točka lokalnog minimuma ako  $f$  pada na nekom intervalu  $\langle a, c \rangle$  i raste na nekom intervalu  $\langle c, b \rangle$ .

Budući a za derivabilne funkcije rast i pad vidimo iz predznaka prve derivacije (teorem 1), možemo zaključiti: Ako u nekoj točki  $c$  domene  $D$  funkcije  $f$  njezina prva derivacija mijenja predznak, ona je točka  $c$  točka lokalnog ekstrema za  $f$ .



Slika 3.8: U 0,5 funkcija postiže lokalni maksimum, a u 2,5 nema ekstrema.

Očito je nemoguće za svaki element domene provjeravati zadovoljava li taj uvjet. Stoga je zgodno prvo odabrati „listu kandidata”, tj. moguće točke lokalnih ekstrema i onda samo za njih provjeriti dolazi li u njima do promjene predznaka prve derivacije funkcije. Ta „lista kandidata” zove se skup kritičnih točaka funkcije.

**Definicija 14 (Stacionarne i kritične točke).** *Stacionarna točka funkcije je element domene u kojemu je derivacija funkcije jednaka nuli (nultočka prve derivacije).*

*Kritične točke su stacionarne točke te oni elementi domene u kojima funkcija nije derivabilna.*

Dakle, želimo li znati gdje funkcija postiže lokalne ekstreme, prvo treba odrediti njezine kritične točke. U većini standardnih primjera jedine kritične točke su stacionarne točke, no ne smijemo zaboraviti i na ostale kritične točke. Osobito česte kritične točke koje nisu stacionarne su rubovi  $a$  i  $b$  domene kad je domena segment  $[a, b]$ .

**Primjer 92.** *Neka je  $f(x) = x^3 - x^2 - x - \frac{1}{2}$ ,  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ . Tada je*

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

*te su stacionarne točke rješenja jednadžbe  $3x^2 - 2x - 1 = 0$ , tj.  $x_1 = 1$  i  $x_2 = -\frac{1}{3}$ . No,  $x_2$  ne uzimamo u obzir jer nije u domeni. Stoga je jedina stacionarna točka ove funkcije  $x_1 = 1$ .*

Nadalje, funkcija je polinom 3. stupnja. Stoga nema točaka u kojima nije derivabilna osim rubova domene te je skup svih kritičnih točaka ove funkcije  $\{0, 1, 2\}$ .

Iz opisnih definicija derivacije vidi se da su stacionarne točke one u kojima je tangenta na graf horizontalna. One često jesu točke lokalnih ekstrema, no to ne mora uvijek biti tako. Kao što nultočka druge derivacije ne mora biti točka infleksije, tako ni nultočka prve derivacije ne mora biti točka ekstrema:

**Primjer 93.** Za funkciju kubiranja ( $f(x) = x^3$ ) je  $c = 0$  stacionarna točka ( $f'(0) = 0$ ), no iz grafa funkcije vidljivo je da to nije točka ekstrema.

Slično ni ostale kritične točke ne moraju biti točke lokalnih ekstrema te nam preostaje odgovoriti na pitanje kako za pojedinu kritičnu točku provjeriti radi li se o točki lokalnog ekstrema ili ne. U osnovi imamo dva postupka, jedan koji koristi drugu derivaciju, a drugi koji analizira promjene predznaka prve derivacije.

Kako je vidljivo sa slike 3.6, u točki lokalnog maksimuma dvaput derivabilne funkcije prva derivacija je nula (tangenta je horizontalna), a druga negativna (funkcija je konkavna). Slično, u točki lokalnog minimuma dvaput derivabilne funkcije prva derivacija je nula (tangenta je horizontalna), a druga pozitivna (funkcija je konveksna). To nam daje sljedeći teorem:

**Teorem 4.** Ako je  $f'(c) = 0$  i  $f''(c) > 0$ , onda je  $c$  točka lokalnog minimuma funkcije  $f$ .

Ako je  $f'(c) = 0$  i  $f''(c) < 0$ , onda je  $c$  točka lokalnog maksimuma funkcije  $f$ .

**Primjer 94.** Primijenimo gornje pravilo na funkcije istog pravila  $f(x) = x^3 - x^2 - x - \frac{1}{2}$  kao u primjeru 92, ali na njezinoj prirodnoj domeni  $\mathbb{R}$ . Tada je  $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$  te su stacionarne točke  $x_1 = 1$  i  $x_2 = -\frac{1}{3}$ . Kako je funkcija derivabilna za sve  $x \in \mathbb{R}$ , slijedi da su to jedine kritične točke.

Druga derivacija te funkcije je  $f''(x) = 6x - 2$ . Uvrstimo  $x_1$  i  $x_2$  u  $f''$ :  $f''(1) = 4 > 0$  i  $f''(-1/3) = -4 < 0$ . Stoga je 1 točka lokalnog minimuma, a  $-1/3$  točka lokalnog maksimuma.

Vidimo da je postupak određivanja lokalnih ekstrema na temelju teorema 4 lako zapamtiti, a u pravilu je i vrlo efikasno provediv. On se stvarno i najčešće koristi u standardnim zadacima određivanja lokalnih ekstrema. No, ovaj postupak ima nedostataka:

- Što ako je  $c$  stacionarna točka ( $f'(c) = 0$ ) u kojoj je i druga derivacija jednaka nuli? U tom slučaju nam teorem 4 ne daje odgovor radi li

se o točki ekstrema ili ne. U matematičkoj literaturi može se naći proširenje ovog postupka korištenjem viših derivacija, no u to ovdje nećemo ulaziti.

- Što ako je  $c$  stacionarna točka u kojoj druga derivacija ne postoji? Što ako je  $c$  kritična točka koja nije stacionarna ( $f'(c)$  ne postoji), u kojem slučaju također ni  $f''(c)$  ne postoji?

U slučajevima kad test pomoću druge derivacije iz gornjih razloga nije primjenjiv, ili pak ako je druga derivacija komplicirana za izračunati, ili štoviše za sve funkcije koje imaju prvu derivaciju koja je neprekidna<sup>7</sup> osim eventualno u konačno mnogo točaka (a takve su više-manje sve koje se pojavljuju u praksi) postoji drugačiji, na prvi pogled nešto kompliciraniji, postupak, popularno zvan određivanjem lokalnih ekstrema pomoću tablice.

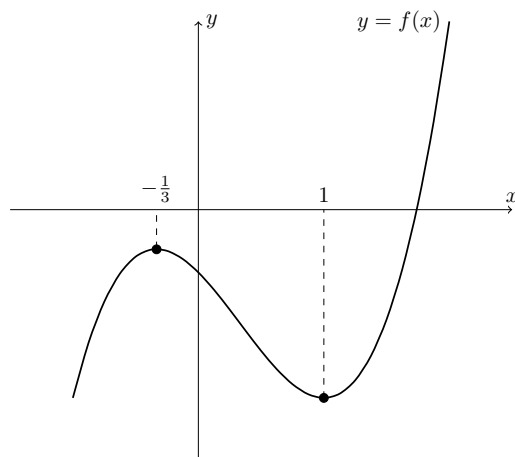
Neka je dana funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  u neka su  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  sve njezine kritične točke. U prvi red tablice označen s  $x$  unosimo te kritične točke (i dodatno sve rubove disjunktih intervalâ od kojih se sastoji domena  $D$ ). Drugi red tablice označava se s  $f(x)$ , a treći s  $f'(x)$ . U tom trećem redu označimo 0 ispod svake stacionarne točke, odnosno neki simbol (primjerice  $*$ ) ispod ostalih kritičnih točaka. Za svaki podinterval određen po dvama  $x$ -evima u prvom redu u trećem redu označimo predznak  $f'$  na tom intervalu, što činimo tako da u  $f'$  uvrstimo po jednu točku domene (nezavisnu varijablu) između po dva susjedna  $x_i$ -a (ili pak analizom formule  $f'$ ). Naposljetku prikladnim strelicama u redu  $f(x)$  označimo rast i pad funkcije te je lako zaključiti koje kritične točke su točke lokalnih minimuma, koje lokalnih maksimuma, a koje nijedno. Detalji postupka biti će jasniji iz primjera.

**Primjer 95.** *Odredimo lokalne ekstreme funkcije iz primjera 94 pomoću tablice. Jedine kritične točke bile su njezine stacionarne točke  $x_1 = 1$  i  $x_2 = -\frac{1}{3}$ , a domena je  $\mathbb{R}$ . Odgovarajuća tablica je*

| $x$                     | $-\frac{1}{3}$ |           | 1          |          |
|-------------------------|----------------|-----------|------------|----------|
| $f(x)$                  | $\nearrow$     | lok.maks. | $\searrow$ | lok.min. |
| $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ | +              | 0         | -          | 0        |

Pritom smo predznake od  $f'(x)$  u pojedinim intervalima odredili uvrštavanjem po jednog  $x$  koji je manji od  $-1/3$ , jednog između  $-1/3$  i  $1$  i jednog većeg od  $1$  u  $f'(x)$  (npr.  $f'(-1) = 4 > 0$ ,  $f'(0) = -1 < 0$  i  $f'(2) = 20 > 0$ ). S obzirom na to da je  $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$  mogli smo to i brže zaključiti:  $f'$  je kvadratna funkcija pozitivnog vodećeg koeficijenta s dvije realne nultčke pa je negativna između njih, a pozitivna inače.

<sup>7</sup>Pojam neprekidnosti definirat ćemo u poglavlju 4.2.



Slika 3.9: Ilustracija uz primjere 94 i 95.

Dakle, funkcija  $f$  ima točku lokalnog maksimuma  $-\frac{1}{3}$  i točku lokalnog minimuma 1. Odgovarajući graf prikazan je slikom 3.9.

**Primjer 96.** Neka je funkcija zadana po dijelovima s

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2, & -2 < x < 1, \\ \log(3x + 2 - x^2), & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{x^2 + 1}, & x \geq 3 \end{cases}.$$

Domena te funkcije je  $\langle -2, 2 \rangle \cup [3, +\infty)$ .

Deriviramo li  $x^3 - x^2$ , dobivamo  $3x^2 - 2x$ , što ima dvije nultočke, 0 i  $\frac{2}{3}$ . Obje su unutar intervala  $\langle -2, 1 \rangle$  pa su stacionarne točke za funkciju  $f$ . Uočimo da je  $3x^2 - 2x = x(3x - 2)$  negativno između tih stacionarnih točaka, a pozitivno inače.

Deriviramo li  $\log(3x + 2 - x^2)$ , dobivamo  $\frac{3-2x}{3x+2-x^2}$  s nultočkom  $\frac{3}{2}$  koja je unutar  $\langle 1, 2 \rangle$ , pa smo dobili još jednu stacionarnu točku, no kako je domena drugog pravila  $[1, 2]$ , ono u 1 nije derivabilno pa je 1 kritična točka.<sup>8</sup> Kako  $\frac{3-2x}{3x+2-x^2}$  nigdje nije 0 unutar  $\langle 1, 2 \rangle$ , ta derivacija ne mijenja predznak i on je jednak u svakoj točki tog intervala. Uvrstimo li npr. 1,25 i 1,75 u  $\frac{3-2x}{3x+2-x^2}$  vidimo da je taj predznak pozitivan lijevo od  $\frac{3}{2}$  i negativan desno.

Deriviramo li  $\frac{1}{x^2+1}$ , dobivamo  $-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$  s nultočkom 0 koja nije unutar  $\langle 3, +\infty \rangle$ , ali kao i s drugim dijelom pravila od  $f$ , iako nismo dobili novu stacionarnu točku, dobili smo novu kritičnu točku 3 jer se drugo pravilo odnosi

<sup>8</sup>Formalno, 1 je zapravo točka prekida i to je stvarni razlog zašto se uvrštava u popis kritičnih točaka.



na  $[3, +\infty)$ . Budući da je nazivnik od  $-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$  uvijek pozitivan, a za pozitivne  $x$  (posebno za one veće od 3) je negativan, slijedi da je  $-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$  negativno na  $[3, +\infty)$ .

Imamo dakle četiri kritične točke: 0,  $\frac{2}{3}$ , 1 i 3. Uz njih ćemo u prvi red tablice unijeti i rubove intervala od kojih se sastoji domena ( $-2$  i  $2$ , te 3 kojeg već imamo). Dobivamo tablicu (sa \* smo označili interval unutar kojeg  $f$  i  $f'$  nisu definirane):

| $x$     | -2 | 0 | $\frac{2}{3}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | 3 |
|---------|----|---|---------------|---|---------------|---|---|
| $f(x)$  |    | ↗ | ↘             | ↗ | ↗             | ↘ | * |
| $f'(x)$ |    | + | -             | + | +             | - | * |

Vidimo da do promjene rasta u pad dolazi samo u 0 i  $\frac{3}{2}$  pa su to točke lokalnih maksimuma za  $f$ , a do promjene pada u rast dolazi samo u  $\frac{2}{3}$  pa je to jedina točka lokalnog minimuma za  $f$ . Kritična točka 1 nije točka lokalnog ekstrema, ali kritična točka 3 to jest jer zadovoljava uvjet iz definicije 13: postoji otvoreni interval (npr.  $\langle \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \rangle$ ) tako da za  $x$ -eve iz njegovog presjeka s domenom vrijedi da  $f(3)$  nije manje od  $f(x)$  ( $f$  pada na  $[3, \frac{7}{2})$ ). Stoga je 3 točka lokalnog maksimuma funkcije  $f$ .



**Ponovimo bitno...** Točke lokalnih ekstrema funkcije su oni elementi  $c$  iz domene u kojima funkcija poprima najmanju ili najveću vrijednost na nekom intervalu oko  $c$ . Lokalne ekstreme određujemo tako da prvo odredimo kritične točke, a onda za svaku provjerimo radi li se o lokalnom ekstremu. Kritične točke su stacionarne točke, tj. nultočke prve derivacije i točke u kojima funkcija nije derivabilna. Provjera je li kritična točka točka lokalnog ekstrema provodi se ili utvrđivanjem intervala rasta i pada ili pomoću druge derivacije. 🦆🦆🦆

### 3.8 Globalni ekstremi realnih funkcija jedne varijable

Svi dosad opisani postupci odnosili su se na određivanje lokalnih ekstrema. No, što je s određivanjem globalnih ekstrema, tj. ekstrema koji se odnose na čitavu domenu? Prvo ih trebamo definirati:

**Definicija 15 (Globalni ekstremi).** Točka globalnog maksimuma (minimuma) funkcije  $f$  je element  $c$  iz njene domene  $D$  takav da je  $f(c) \geq f(x)$  (za minimum:  $f(c) \leq f(x)$ ) za sve  $x \in D$ . Iznos  $f(c)$  se u tom slučaju zove globalni maksimum (minimum) funkcije  $f$ .

Geometrijski, točka globalnog maksimuma odnosno minimuma je apscisa najviše odnosno najniže točke na čitavom grafu. Funkcija može imati više točaka globalnih maksimuma (ili više minimuma), ali tada svi moraju biti „na istoj visini”, tj. imati isti iznos (globalni minimum/maksimum je jedinstven, ali točka globalnog minimuma/maksimuma to ne mora biti).

**Primjer 97.** Svi brojevi  $c = 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) su točke globalnog maksimuma za funkciju kosinus, u svima njima kosinus postiže globalni maksimum  $\cos(2k\pi) = 1$ .

**Primjer 98.** Funkcija čiji je graf prikazan na slici 3.7 ima dvije točke lokalnog minimuma, od kojih je jedna ujedno točka globalnog minimuma. Ta funkcije ne postiže globalni maksimum.

Prva što bismo mogli pomisliti je da globalni maksimum (ili minimum) možemo odrediti tako da među točkama lokalnih maksimuma (minimuma) odaberemo onu u kojoj funkcija postiže najveću (najmanju) vrijednost. Također, mnogi će pomisliti da ako imamo samo jednu točku lokalnog ekstrema da se radi o točki globalnog ekstrema. No, oba takva zaključivanje nisu ispravna.

**Primjer 99.** Funkciji čiji graf je prikazan slikom 3.9 u primjerima 94 i 95 smo odredili točke lokalnih ekstrema, no sa slike je vidljivo da jedini lokalni maksimum nije globalni maksimum jer funkcija poprima proizvoljno velike vrijednosti za velike vrijednosti varijable  $x$ . Isto tako, jedini lokalni minimum nije globalni minimum jer funkcija poprima proizvoljno male vrijednosti za male vrijednosti varijable  $x$ .

Općenito, za određivanje globalnih ekstrema potrebno je ispitati cijeli tok funkcije (odjeljak 3.9), posebno intervale rasta i pada te asimptote.

**Primjer 100.** Lennard-Jonesov potencijal opisuje ovisnost potencijalne energije  $V$  dviju nenabijenih čestica o njihovoj udaljenosti  $r$ . On se može izraziti formulom

$$\frac{V}{\varepsilon} = \left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^6,$$

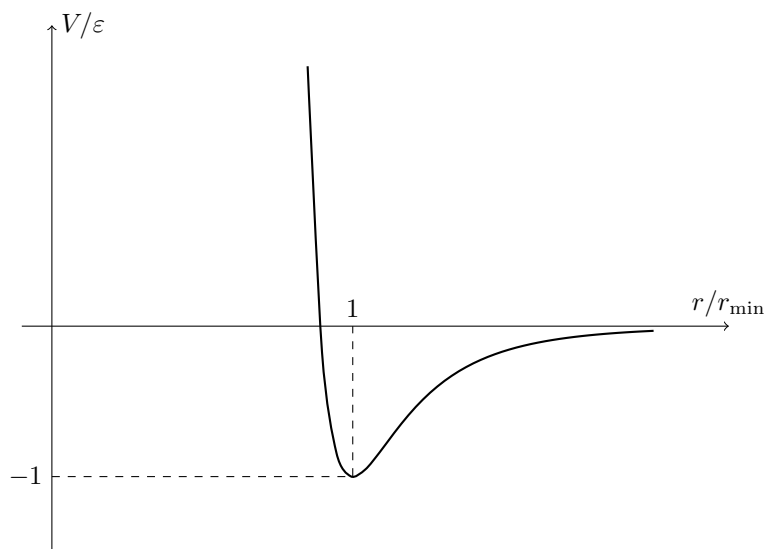
Pritom je  $\varepsilon$  iznos energije čiji ćemo smisao sada otkriti.

Uz supstituciju

$$y = \frac{V}{\varepsilon}, \quad x = \frac{r}{r_{\min}}$$

formula Lennard-Jonesovog potencijala svodi se na

$$y = \frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6}.$$



Slika 3.10: Graf Lennard-Jonesovog potencijala.

Tu formulu ne gledamo na njenoj prirodnoj domeni  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , nego samo na za ovaj primjer prikladnoj domeni  $\langle 0, \infty \rangle$ . Derivirajmo  $y$ :

$$y' = -\frac{12}{x^{13}} + \frac{12}{x^7} = 12 \cdot \frac{x^6 - 1}{x^{13}}.$$

Vidimo da je  $y'$  definirana svuda gdje i  $y$ , dakle će jedine kritične točke biti stacionarne točke koje dobijemo rješavanjem jednadžbe  $y' = 0$ . Lako se dobije da je jedina stacionarna točka, dakle jedini kandidat za točku ekstrema,  $x = 1$  (što odgovara  $r = r_{\min}$ ). Iz formule za  $y'$  odmah vidimo da je  $y' > 0$  za  $x > 1$ , a  $y' < 0$  za  $0 < x < 1$ , dakle je točka 1 sigurno točka lokalnog minimuma. No, saznali smo i više: Funkcija na cijeloj domeni koja se sastoji od samo jednog intervala lijevo od 1 pada, a desno raste, pa zaključujemo da se ujedno radi o točki globalnog minimuma. Kako je  $y(1) = -1$ , vidimo da je za  $r = r_{\min}$  iznos Lennard-Jonesovog potencijala  $V = -\varepsilon$ , dakle je jedinica  $\varepsilon$  suprotna vrijednost dubine tzv. potencijalnog bunara (vidi sliku 3.10).

Situacija iz prethodnog primjera može se generalizirati: Ako je domena funkcije  $f$  samo jedan interval i ako funkcija unutar tog intervala samo u jednoj kritičnoj točki mijenja rast u pad ili pad u rast (ima samo jednu točku lokalnog ekstrema), radi se o točki globalnog ekstrema. U ostalim slučajevima, dakle ako se domena sastoji od više odvojenih intervala i/ili ako imamo više točaka lokalnih ekstrema, globalni ekstremi se određuju potpunom analizom toka funkcije.

Iznimka je jedan — u primjenama vrlo čest — slučaj za koji postoji „šablonski” postupak za određivanje globalnih ekstrema. Taj postupak se oslanja na sljedeći teorem:<sup>9</sup>

**Teorem 5 (Bolzano-Weierstraß).** *Ako je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna<sup>10</sup>, onda  $f$  postiže i globalni minimum i globalni maksimum i sve međuvrijednosti između njih.*

Budući da smo zbog tog teorema sigurni da neprekidna funkcija na segmentu postiže globalni minimum i maksimum, a oni moraju biti među lokalnima, dakle se postižu u nekima od kritičnih točaka funkcije, zaključujemo: Ako treba odrediti globalne ekstreme neprekidne funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dovoljno je odrediti sve kritične točke u segmentu  $[a, b]$  i usporediti vrijednosti funkcije  $f$  u njima. Stoga imamo:

Postupak za određivanje globalnih ekstrema za neprekidne funkcije kojima je za domen uzet segment  $[a, b]$ :

1. Derivirajte funkciju i odredite joj stacionarne točke (unutar  $\langle a, b \rangle$ ).
2. U kritične točke dodaju se i rubovi segmenta, tj. brojevi  $a$  i  $b$  te eventualne druge točke unutar  $\langle a, b \rangle$  u kojima funkcija nije derivabilna.
3. Za svaku kritičnu točku  $c$  izračuna se  $f(c)$ . One točke  $c$  za koje  $f(c)$  ima najmanju vrijednost su točke globalnog minimuma. One točke  $c$  za koje  $f(c)$  ima najveću vrijednost su točke globalnog maksimuma.

**Primjer 101.** *Nastavimo primjer 92. Tamo smo za zadanu funkciju „obavili” prve tri točke gornjeg postupka, tj. utvrdili da je skup kritičnih točaka skup  $\{0, 1, 2\}$ . Stoga treba ta tri broja uvrstiti u  $f$ :*

$$f(0) = 0,5,$$

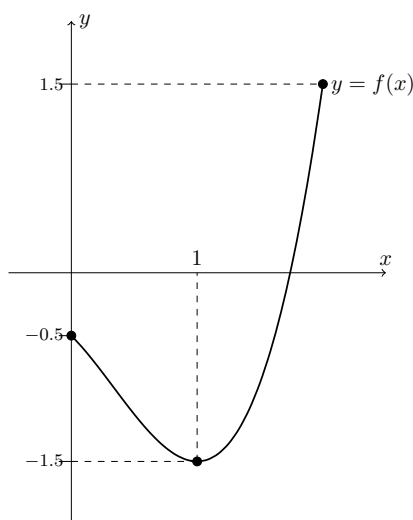
$$f(1) = -1,5,$$

$$f(2) = 1,5.$$

*Vidimo da najmanju vrijednost funkcija postiže u 1 te joj je to točka globalnog minimuma, a najveća je vrijednost u 2 te joj je to točka globalnog maksimuma. Odgovarajući graf vidljiv je na slici 3.11.*

<sup>9</sup>Drugačija, ekvivalentna, formulacija ovog teorema je: Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna i nije konstantna, onda je slika te funkcije segment.

<sup>10</sup>Precizno ćemo to definirati kasnije, zasad uzimamo: Ako je funkcija zadana na segmentu, ona je neprekidna ako joj se graf sastoji samo od jednog dijela, tj. može se nacrtati u jednom potezu.



Slika 3.11: Ilustracija uz primjere 92 i 101.

Primijetimo da nam i ovaj primjer, povezano s primjerom 99, ponovno pokazuje da nam funkciju ne čini samo pravilo, već i njena domena (i kodomena) — za dvije različite domene uz isto pravilo jednom smo imali funkciju bez globalnih ekstrema, a drugi put s globalnim ekstremima.



**Ponovimo bitno...** Točke globalnih ekstrema funkcije su elementi domene u kojima  $f$  postiže najmanju ili najveću vrijednost. Neprekidna funkcija zadana na segmentu sigurno postiže i globalni minimum i globalni maksimum u nekima od svojih kritičnih točaka. 🦆🦆🦆

### 3.8.1 Neki problemi optimizacije u fizikalnoj kemiji

U većini primjena od interesa su prvenstveno globalni ekstremi. U ovom odjeljku dajemo tri tipična primjera iz fizikalne kemije.

U fizikalnoj se kemiji u svrhu određivanja ravnotežnog stanja često određuju (globalni) minimumi funkcija koje su poznate pod nazivom termodinamički potencijali. S obzirom na to da su njihove formule, ako su uopće poznate, u pravilu „ružne”, najčešće je jednostavnije primijeniti postupak određivanja ekstrema „pomoću tablice” nego pomoću druge derivacije (posebice zato jer potonji nikad ne daje odgovor o globalnim ekstremima).

**Primjer 102.** *Gibbsova energija  $G$  smjese dvaju enantiomera, u ovisnosti o množinskoj koncentraciji  $c$  jednog od njih, uz oznaku  $c^{\ominus} = 1 \text{ mol/L}$ , opisana*

je formulom

$$G = G^\circ + RTc \ln \frac{c}{c^\ominus} + RT \left( \frac{c_0}{c^\ominus} - \frac{c}{c^\ominus} \right) \ln \left( \frac{c_0}{c^\ominus} - \frac{c}{c^\ominus} \right).$$

Ovdje je  $c_0$  (konstantan) zbroj koncentracija tih dvaju enantiomera. Vrijednost  $G^\circ$  je također konstantna. Pri kojim koncentracijama enantiomera je, pri konstantnoj temperaturi, Gibbsova energija najmanja?

Očigledno je funkcija  $G$ , uz prikladne supstitucije, funkcija oblika

$$f(x) = a + bx \ln x + b(x_0 - x) \ln(x_0 - x).$$

Pritom  $x = \frac{c}{c^\ominus}$  mora biti pozitivan, ali manji od  $x_0 = \frac{c_0}{c^\ominus}$  (i iz fizikalnih i iz matematičkih razloga). Dakle, domena od  $f$  je  $\langle 0, x_0 \rangle$ . Deriviranjem dobijemo

$$f'(x) = b + \ln x - b - b \ln(x_0 - x) = b \ln \frac{x}{x_0 - x}.$$

Ta je derivacija definirana svuda gdje i  $f$ , pa su jedine kritične točke funkcije  $f$  njezine stacionarne točke. Derivacija  $f'(x)$  je 0 kad je  $\frac{x}{x_0 - x} = 1$ , dakle je jedina stacionarna točka  $x^* = \frac{x_0}{2}$ . Za  $x < x^*$  je  $f'(x) < 0$ , a za  $x > x^*$  je  $f'(x) > 0$ , dakle  $G$  pada za koncentracije  $c$  manje od pola zbroja koncentracija i raste za veće, a definirana je na intervalu. Stoga, analogno kao u primjeru 100, zaključujemo da je Gibbsova energija minimalna kad su koncentracije oba enantiomera jednake (ako je koncentracija jednog enantiomera pola njihova zbroja, onda je tolika i koncentracija drugog) i iznosi  $G(x^*) = G^\circ + RTc_0 \ln \frac{c_0}{2c^\ominus}$ .

Sličan je i sljedeći primjer.

**Primjer 103.** Pri dvofaznoj reverzibilnoj adijabatskoj kompresiji idealnog plina je iznos  $pV^\gamma$  konstantan. Pritom je  $\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}}$  omjer izobarnog i izohornog molarnog toplinskog kapaciteta. Rad pri takvom procesu opisan je formulom

$$w = nRT \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{p}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} + \left( \frac{p_2}{p} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 2 \right).$$

Pritom su  $p_1$  i  $p_2$  početni odnosno konačni tlak, a  $n$ ,  $R$ ,  $T$ , i  $\gamma \in \langle 0, 1 \rangle$  su konstante. Pri kojem je tlaku izvršeni rad minimalan?

Imamo prvo (uz  $a = nRT > 0$ ,  $g = \frac{\gamma-1}{\gamma} < 0$ )

$$w(p) = \frac{a}{g} \left( \frac{p^g}{p_1^g} + p_2^g p^{-g} - 2 \right),$$

a domena funkcije  $w$  je interval od  $p_1$  do  $p_2$ ,<sup>11</sup> koji je podskup od  $\mathbb{R}^+$ . Deriviranjem dobijemo

$$w'(p) = \frac{a}{g} \left( g \frac{p^{g-1}}{p_1^g} - g p_2^g p^{-g-1} \right).$$

Jedina stacionarna točka funkcije  $w$  je geometrijska sredina početnog i konačnog tlaka

$$p^* = +\sqrt{p_1 p_2}.$$

Uz to, kritične točke su rubovi domene,  $p_1$  i  $p_2$ . Za  $p < p^*$  je  $w'$  negativan, a za  $p > p^*$  pozitivan, pa se stvarno radi o točki globalnog minimuma. Za razliku od prethodnog primjera, ovdje je domena segment pa smo umjesto analize rasta i pada funkcije  $w$  mogli do zaključka doći uspoređivanjem iznosa  $w(p_1)$ ,  $w(p^*)$  i  $w(p_2)$ , jer je funkcija  $w$  elementarna.<sup>12</sup>

Problemi određivanja ekstrema i, ponekad, toka funkcije pojavljuju se i u kvantnoj teoriji i u statističkoj termodinamici.

**Primjer 104.** U statističkoj termodinamici se vjerojatnost da se, pri temperaturi  $T$ , molekula plina mase  $m$  kreće brzinom iznosa  $v$  opisuje formulom

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left( -\frac{Mv^2}{2RT} \right).$$

To je formula Maxwellove (Maxwell-Boltzmannove) funkcije gustoće vjerojatnosti. Tu je  $M$  molarna masa razmatrane molekule, a  $R$  je opća plinska konstanta. Funkcija  $f$  je definirana za  $v \geq 0$ .

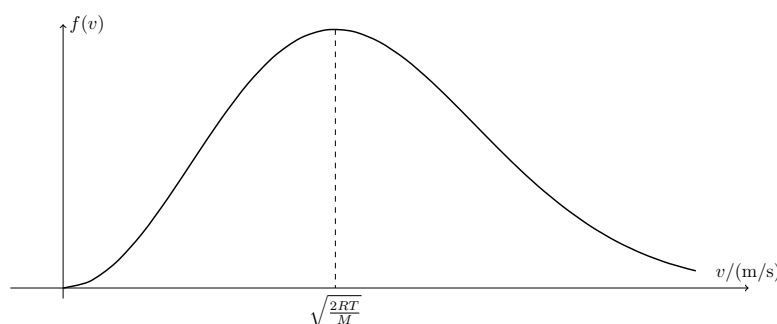
Često se u zadacima postavlja pitanje poput sljedećeg: Koja je najvjerojatnija brzina dušikove molekule pri temperaturi  $20^\circ\text{C}$ ? Takva formulacija pitanja nije matematički korektna. Naime, kad se opisuje vjerojatnost da neko opažanje poprimi određenu vrijednost unutar intervala realnih brojeva, onda je vjerojatnost opažanja bilo kojeg konkretnog, pojedinačnog iznosa uvijek jednaka 0.<sup>13</sup> Smisao funkcije gustoće vjerojatnosti je da za svaku brzinu  $v$  iznos  $f(v)\Delta v$  (ako je  $\Delta v$  dovoljno malen) opisuje vjerojatnost da za neku molekulu plina njena brzina iznosi približno  $v$ .

Korektno formuliran zadatak o maksimumu glasio bi: Odredite točku maksimuma  $v^*$  funkcije  $f$  za dušikove molekule pri temperaturi  $20^\circ\text{C}$ . Dobivena

<sup>11</sup>Naravno, podijeljeno s nekom od mjernih jedinica za tlak.

<sup>12</sup>Sve elementarne funkcije su neprekidne na svakom podintervalu svoje prirodne domene.

<sup>13</sup>Više o tome u odjeljku 5.5.



Slika 3.12: Graf Maxwell-Boltzmannove funkcije gustoće vjerojatnosti.

vrijednost  $v^*$  biti će brzina za koju je najvjerojatnije da slučajno odabrana dušikova molekula ima vrijednost blizu  $v^*$ .

Označimo  $\ominus = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2}$ ,  $\ominus = \frac{M}{2RT}$ . Sad naša funkcija ima pregledniji oblik  $f(v) = \ominus v^2 \exp(-\ominus v^2)$  te je

$$f'(v) = 2\ominus v \exp(-\ominus v^2)(1 - \ominus v^2).$$

Kritične točke su 0 (rub domene) i stacionarna točka  $v_1 = +\sqrt{\frac{1}{\ominus}}$ . Za  $v$  između 0 i  $v_1$  je  $f'(v) > 0$ , a za  $v > v_1$  je  $f'(v) < 0$  pa je  $v^* = v_1 = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$  tražena točka globalnog maksimuma od  $f$ . Za dušik pri zadanoj temperaturi ( $M = 28,0134 \text{ g mol}^{-1}$ ,  $T = 298,15 \text{ K}$ ) ona iznosi  $v^* = 420,70 \text{ m s}^{-1}$ .

**Zadatak 25.** Ispitajte tok Maxwell-Boltzmannove funkcije gustoće vjerojatnosti i uvjerite se da je njen graf uvijek oblika prikazanog na slici 3.12.

## 3.9 Ispitivanje toka funkcije

Pod ispitivanjem toka funkcije podrazumijeva se skupljanje svih potrebnih podataka za crtanje njenog grafa. Prvi korak određivanja toka funkcije je **određivanje njene prirodne domene** (ako domena nije zadana). Prirodna domena za formulu  $y = f(x)$  određuje se uzimajući u obzir prirodne domene elementarnih funkcija, tj. u logaritme smiju biti uvršteni samo pozitivni brojevi, u arkus-sinus i arkus-kosinus smiju biti uvršteni samo brojevi između  $-1$  i  $1$ ; pod parnim korijenima ne smiju biti negativni brojevi i ne smije se dijeliti s nulom.



**Primjer 105.** *Formulom*

$$f(x) = \log \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x}}$$

zadana je realna funkcija jedne varijable. Prvo (zbog arkus-sinusa) mora biti  $x \in [-1, 1]$ . Nadalje,  $\arcsin x$  ne smije biti negativan jer je pod kvadratnim korijenom, dakle mora biti  $x \geq 0$ , tj. ostaje nam  $x \in [0, 1]$ . Na kraju, izraz pod logaritmom,  $\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x}}$ , mora biti pozitivan, a to vrijedi za  $\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x} > 0$ , tj.  $\sqrt{\arcsin x} < \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ . Kako su tu prema prethodnom pod korijenima pozitivni brojevi, zadnju nejednakost smijemo kvadrirati te dobivamo  $\arcsin x < \frac{\pi}{4}$ . Dakle, mora biti  $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Zaključujemo da je prirodna domena funkcije  $f$  skup  $[0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

Nakon što je određena domena određuje se vrijednost funkcije u nuli (naravno, ako je nula u domeni) te se, ukoliko je moguće, odrede nultočke funkcije. Time određujemo **sjecišta grafa s koordinatnim osima**.

**Primjer 106.** *Nastavljamo primjer 105. Funkcija je definirana u 0 i iznos joj je  $f(0) = \log \sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx 0,052$ .*

Logaritam je 0 ako je u njega uvršten 1, dakle je naša funkcija 0 ako je izraz pod logaritmom jednak 1, a on je jednak 1 ako je  $\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x} = 1$ . No, rješenje ove jednadžbe ne nalazi se u domeni naše funkcije te funkcija  $f$  nema nultočaka.

Ako ne znamo točno odrediti nultočke funkcije, za procjenu intervala u kojem se neka od nultočki nalazi često je od pomoći sljedeće pravilo: Ako je funkcija  $f$  neprekidna (primjerice, ako je elementarna) na segmentu  $[a, b]$  i ako su predznaci od  $f(a)$  i  $f(b)$  različiti, onda između  $a$  i  $b$  postoji bar jedna nultočka od  $f$ .

**Primjer 107.** *Funkcija iz primjera 94 os ordinata siječe u  $f(0) = -0,5$ .*

Uvrštavanjem djeljitelja slobodnog člana 12 u funkciju vidjet ćemo da nijedan od njih nije nultočka te funkcije, dakle ona nema cjelobrojnih nultočki.

No, uvrstimo li u funkciju redom cijele brojeve od primjerice  $-5$  do  $5$ , primijetiti ćemo da je  $f(-3) < 0$ , a  $f(-2) > 0$ , pa budući da se radi o polinomu (neprekidnoj funkciji) slijedi da ova funkcija ima bar jednu nultočku između  $-3$  i  $-2$ . Iz daljnjih razmatranja toka funkcije moći ćemo zaključiti da je to jedina nultočka funkcije  $f$ .

U sljedećem koraku se, pomoću prve derivacije, određuju **intervali rasta i pada i ekstremi funkcije**. Nakon toga se pomoću druge derivacije odrede **intervali konvesknosti i konkavnosti te točke infleksije**. Postupak je opisan u prethodnom odjeljku.

**Primjer 108.** Nastavimo s funkcijom iz primjera 94 i 107. Iz prve i druge derivacije funkcije  $f$  dobivamo tablicu

| $x$                     | $-\frac{1}{3}$       | $1$                 | $\frac{1}{3}$ |
|-------------------------|----------------------|---------------------|---------------|
| $f(x)$                  | $\nearrow$ lok.maks. | $\searrow$ lok.min. | $\nearrow$    |
| $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ | $+$                  | $0$                 | $-$           |
| $f''(x) = 6x - 2$       | $-$                  | $-$                 | $0$           |

Vidimo: funkcija raste za  $x < -\frac{1}{3}$  i za  $x > 1$ , a između  $-\frac{1}{3}$  i  $1$  pada. Iz toga, budući da je  $f(-\frac{1}{3}) > f(1) > 0$ , zaključujemo da funkcija nema nultočki većih od  $-\frac{1}{3}$ .

Funkcija je konveksna za  $x > \frac{1}{3}$  i konkavna za  $x < \frac{1}{3}$  te je  $\frac{1}{3}$  točka infleksije. Usporedimo li to sa slikom 3.13, vidimo da ta slika stvarno prikazuje graf funkcije  $f$ .

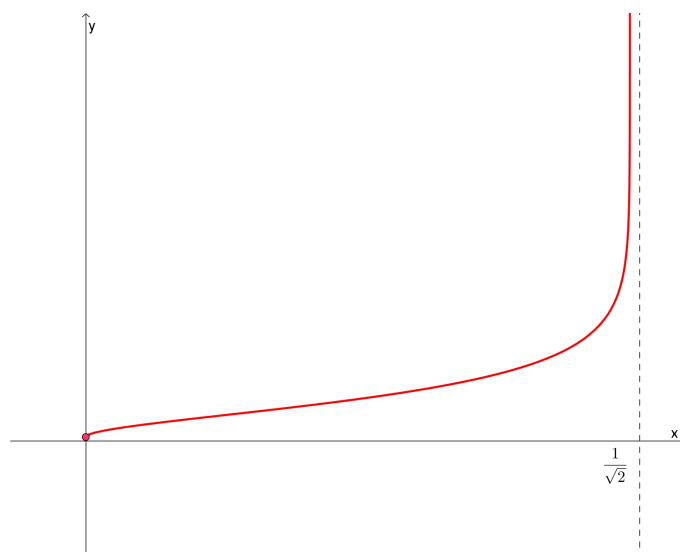
**Primjer 109.** Prva derivacija funkcije iz primjera 105 je

$$f'(x) = \frac{1}{2 \ln 10 \sqrt{(1-x^2) \arcsin x} \left( \sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x} \right)}.$$

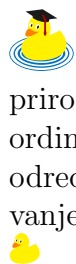
Zbog uvjeta iz kojih smo odredili domenu od  $f$ , svi članovi u nazivniku su pozitivni, pa je  $f'(x) > 0$  za sve  $x$  u domeni (osim u  $0$ , gdje derivacija nije definirana). Slijedi da je naša funkcija strogo rastuća na domeni pa joj je (globalni) minimum u  $0$ , a globalnog maksimuma nema (desni rub domene nije u domeni). Zbog kompliciranosti izraza za  $f'$  nećemo određivati drugu derivaciju od  $f$ .

Gore opisanim postupkom možemo saznati gotovo sve o grafu funkcije, osim ima li asimptota (i ako da, koje su to). Da bi se mogle odrediti **asimptote** potreban nam je pojam limesa, koji je ujedno u pozadini precizne definicije derivacije. Ipak, iz poznavanja svojstava elementarnih funkcija kako su opisane u prvom poglavlju, u nekim slučajevima možemo već sad (neformalno) zaključiti o postojanju asimptota.

**Primjer 110.** Završimo primjer 105. Funkcija je elementarna i domena joj je  $[0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  pa ne može imati horizontalnih asimptota, a vertikalna je moguća samo slijeva u  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Kako logaritmi imaju vertikalnu asimptotu u  $0$ , a što je  $x$  bliži  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , nazivnik izraza pod logaritmom postaje sve veći te  $1$  podijeljen s njime postaje sve bliži  $0$ , vidimo da naša funkcija ima vertikalnu asimptotu  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (slijeva zbog domene i prema gore zbog rasta). Graf ove funkcije prikazan je slikom 3.13.



Slika 3.13: Graf funkcije iz primjera 105 (slika izrađena programom Geogebra).



**Ponovimo bitno...** Ispitivanje toka funkcije uključuje: određivanje prirodne domene (ako domena nije zadana), određivanje sjecištâ grafa s koordinatnim osima, određivanje intervala rasta i pada i lokalnih ekstrema, određivanje intervala konveksnosti i konkavnosti i točaka infleksije te određivanje asimptota. 🦆🦆

### 3.10 Implicitno zadane krivulje u ravnini

Već smo se upoznali s jednim načinom opisa krivulja u koordinatnoj ravnini: Krivulja kao graf realne funkcije jedne varijable. No, očito takav način nije dovoljan jer neke krivulje, primjerice kružnice u Kartezijevom koordinatnom sustavu, nisu grafovi funkcija jedne varijable.

Budući da je općenito brzina tangencijalna na putanju, a i inače je problem određivanja tangente u točki krivulje zanimljiv, u ovom i sljedeća dva odjeljka bavit ćemo se pitanjem određivanja tangenti na krivulje u ravnini koje su zadane drugačijim jednadžbama od onih oblika  $y = f(x)$ .

Općenito krivulju u (koordinatnoj) ravnini možemo opisati jednom<sup>14</sup> jed-

<sup>14</sup>Jedna, priznajmo: ne bilo kakva, jednadžba u ravnini, a ona je dimenzije 2, određuje „nešto” dimenzije  $2 - 1 = 1$ .

nadžbom oblika

$$F(x, y) = 0.$$

Dakle, točke na krivulji su one točke  $(x, y)$  koje zadovoljavaju tu jednadžbu. Kažemo: **krivulja je implicitno zadana** jednadžbom  $F(x, y) = 0$ . Tako je recimo uz  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  gornjom jednadžbom opisana jedinična kružnica sa središtem u ishodištu:  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  je naravno ekvivalentno s  $x^2 + y^2 = 1$ , a točka  $(0, 1)$  je na njoj jer uvrštavanjem dobijemo istinitu jednakost  $0^2 + 1^2 = 1$ . Vidimo da smo gore istakli ovisnost izraza  $F$  o dvije varijable,  $x$  i  $y$ , a budući smo rezultat  $F(x, y)$  uspoređivali s brojem nula, znači da je i  $F(x, y)$  broj. Time pomalo zadiremo u jednu temu kojom ćemo se baviti u poglavlju 10.1, a to su skalarne funkcije više varijabli. No, za potrebe ovog poglavlja sasvim je dovoljno shvatiti da je gornjom jednadžbom opisana nekakva veza između  $x$  i  $y$ . U nekim slučajevima, recimo za  $F(x, y) = x^2 + y$ , moguće je iz te jednadžbe izraziti  $y$  i priču svesti na graf realne funkcije jedne varijable, no češće to nije moguće — već u slučaju jedinične kružnice  $x^2 + y^2 = 1$  imamo dva izbora:  $y$  zapisati kao  $y = +\sqrt{x^2 - 1}$  ili kao  $y = -\sqrt{x^2 - 1}$ .

S druge strane, primijetimo da iako se iz jednadžbe  $x^2 + y^2 = 1$  ne može jednoznačno izraziti  $y$  (tj. kružnica nije graf neke funkcije  $y = f(x)$ ), dijelovi te krivulje jesu grafovi funkcija: Osim gornje dvije mogućnosti (uz domenu  $[-1, 1]$ ) imamo beskonačno mnogo drugih. Zapravo, svaki luk te kružnice, ukoliko ne sadrži neku od točaka  $(-1, 0)$  i  $(1, 0)$ , je graf neke realne funkcije jedne varijable. Preciznije, vrijedi<sup>15</sup>

**Teorem 6 (Teorem o implicitnoj funkciji).** *Neka je krivulja u ravnini zadana jednadžbom  $F(x, y) = 0$  i neka je  $(x_0, y_0)$  neki par koji zadovoljava jednadžbu  $F(x_0, y_0) = 0$  (tj. neka je  $(x_0, y_0)$  jedna točka na toj krivulji).*

*Označimo  $G(y) = F(x_0, y)$  (dakle, privremeno smatramo  $x = x_0$  konstantom). Ako je  $G'(y_0) \neq 0$  (tangenta u promatranoj točki krivulje nije vertikalna), onda neki dio krivulje oko točke  $(x_0, y_0)$  predstavlja graf neke realne funkcije jedne varijable  $y = f(x)$  kojoj je domena neki otvoreni interval oko  $x_0$ .*

U situaciji iz prethodnog teorema kažemo da je jednadžbom  $F(x, y) = 0$  (oko bilo koje točke  $(x_0, y_0)$  u kojoj tangenta na tu krivulju nije vertikalna) **implicitno zadana funkcija**  $y = f(x)$ .

Primijetimo da teorem ne tvrdi da ćemo moći naći izraz za  $f$ , no za pitanje određivanja jednadžbi tangenti na krivulju jednadžbe  $F(x, y) = 0$  u njenoj točki  $(x_0, y_0)$  to nije niti potrebno. Naime, jednadžba te tangente je sigurno oblika  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$  pa nam nije potrebna formula za  $f$ , štoviše

<sup>15</sup>Zapravo se ovdje radi o specijalnom i ne potpuno formalno iskazanom slučaju općenitijeg teorema.

niti za  $f'$ , nego samo iznos  $f'(x_0)$ . Njega pak možemo odrediti tako da po  $x$  deriviramo jednadžbu  $F(x, y) = 0$  koristeći standardna pravila deriviranja, ali uzimajući u obzir da je  $y$  funkcija od  $x$  pa koristimo lančano pravilo, tj. kad god deriviramo  $y$  množimo derivaciju s  $y'$ . Takvo deriviranje se naziva **implicitnim deriviranjem**.

**Primjer 111.** Izvedimo jednadžbu tangente na kružnicu  $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$  (u njenoj točki  $(x_0, y_0)$ ).

Ako je tangenta u  $(x_0, y_0)$  vertikalna, a to se dešava samo u točkama  $(x_0 \pm p, q)$ , tangenta je pravac  $x = x_0$ .

Inače prema teoremu o implicitnoj funkciji možemo uzeti da je u blizini od  $(x_0, y_0)$  luk kružnice funkcija  $y = f(x)$ , pa implicitnim deriviranjem jednadžbe kružnice po  $x$  dobijemo

$$2(x-p) + 2(y-q)y' = 0,$$

te je

$$y' = -\frac{y-q}{x-p}, \quad x \neq p.$$

Slijedi da tražena jednadžba tangente za  $x_0 \neq p$  glasi

$$(x-p)(x_0-p) + (y-q)(y_0-q) = r^2.$$

**Primjer 112.** Jedna poznata implicitno zadana krivulja je Kartezijev list. Njegova je jednadžba

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

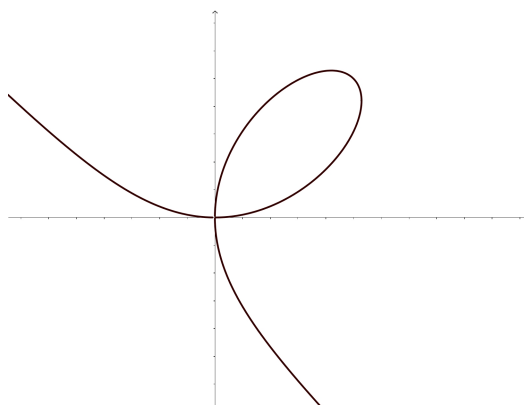
s pozitivnim  $a$ . Lako je vidjeti da  $(0, 0)$  zadovoljava jednadžbu Kartezijevog lista, dakle on prolazi kroz ishodište i to mu je jedino sjecište s koordinatnim osima. Nadalje, nijedna točka Kartezijevog lista nije u trećem kvadrantu jer ako su  $x, y < 0$  lijeva strana jednadžbe je negativna, a desna pozitivna. S obzirom na to da zamjenom  $x$  s  $y$  jednadžba ne mijenja oblik, zaključujemo da je simetričan s obzirom na pravac  $y = x$ . Kartezijev list prikazan je slikom 3.14.

Želimo li odrediti njegovu tangentu u njegovoj točki  $(x_0, y_0)$ , trebamo implicitno derivirati jednadžbu Kartezijevog lista. Dobijemo prvo  $3x^2 + 3y^2y' = 3ay + 3axy'$ , i odatle

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax},$$

odnosno koeficijent smjera tangente je  $\frac{ay_0 - x_0^2}{y_0^2 - ax_0}$ . Vidimo da tangenta nije vertikalna ako je  $y_0^2 \neq ax_0$  i tada joj je jednadžba

$$y - y_0 = \frac{ay_0 - x_0^2}{y_0^2 - ax_0} \cdot (x - x_0).$$



Slika 3.14: Kartezijev list.



**Ponovimo bitno...** Jednadžbom oblika  $F(x, y) = 0$  zadaju se krivulje u koordinatnoj ravnini. U okolini točaka te krivulje u kojima tangenta nije vertikalna dio krivulje je uvijek moguće shvatiti kao graf funkcije za koju onda kažemo da je implicitno zadana, a njenu derivaciju određujemo deriviranjem jednadžbe  $F(x, y) = 0$  koristeći standardna pravila deriviranja. Pritom deriviranje izraza s  $y$  prema lančanom pravilu rezultira dodatnim faktorom  $y'$ . 🦆🦆🦆

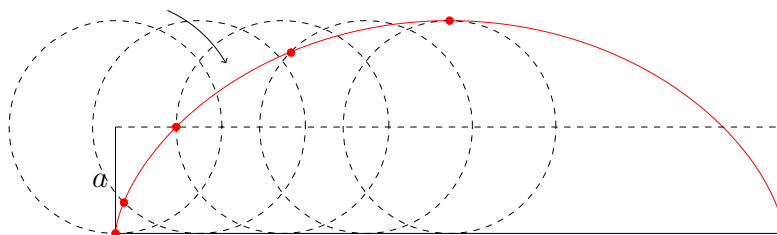
### 3.11 Parametarski zadane krivulje u ravnini

Drugi način na koji možemo opisati krivulje u ravnini<sup>16</sup> je parametarski: Za različite vrijednosti nekog parametra  $t$ , koji prolazi nekim intervalom realnih brojeva, eksplicitno definiramo koordinate točaka pripadn  $(x(t), y(t))$  koje su na krivulji. To je jednostavnije fizikalno zamisliti ovako: Za svaki trenutak  $t$  iz nekog intervala bilježimo apscisu  $x(t)$  i ordinatu  $y(t)$  trenutne pozicije materijalne točke koja se giba po ravnini.

**Primjer 113.** Putanja točke koja se giba u koordinatnoj ravnini tako da joj je u svakom trenutku apscisa jednaka kosinusu tog trenutka (podijeljenog s odabranom mjernom jedinicom), a ordinata sinusom, je — po definiciji sinusa i kosinusa — jedinična kružnica.

Posebno je korisno zapamtiti parametarske jednadžbe kružnice i elipse u ravnini:

<sup>16</sup>Definicija krivulje u prostoru bit će dana na str. 241.



Slika 3.15: Jedan luk cikloide.

- Kružnica polumjera  $r$  sa središtem  $(p, q)$  ima parametarske jednadžbe  $x(t) = p + r \cos t$ ,  $y(t) = q + r \sin t$  za  $t \in [0, 2\pi]$ .
- Elipsa s poluosima  $a$  (horizontalna poluos) i  $b$  (vertikalna poluos) i središtem u ishodištu ima parametarske jednadžbe  $x(t) = a \cos t$ ,  $y(t) = b \sin t$  za  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Primjer 114.** Krivulja cikloida je putanja fiksirane točke na rubu „kotača” polumjera  $a$  koji se kotrlja po pravcu (slika 3.15). Parametarske jednadžbe cikloide su

$$\begin{aligned}x(t) &= a(t - \sin t), \\y(t) &= a(1 - \cos t),\end{aligned}$$

za  $t \in [0, +\infty)$ .

Neka je jednadžbama  $x = x(t)$  i  $y = y(t)$  parametarski zadana krivulja u ravnini, gdje je  $t$  iz intervala  $I$ . Što tada predstavljaju derivacije  $\dot{x}(t)$  i  $\dot{y}(t)$ ? U fizikalnoj interpretaciji krivulje kao trajektorije točke, u svakom trenutku  $t$  brojevi  $\dot{x}(t)$  i  $\dot{y}(t)$  predstavljaju iznose horizontalne odnosno vertikalne komponente brzine u trenutku  $t$ . Uređeni par  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  stoga predstavlja vektor brzine u tom trenutku (odnosno, vektor brzine je u tom trenutku  $\dot{x}(t) \vec{i} + \dot{y}(t) \vec{j}$ ). Iznos brzine u tom trenutku je  $\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}$ . Koeficijent smjera tangente u istoj točki (a na toj tangenti leži vektor brzine) je  $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ .

**Primjer 115.** Odredimo iznos brzine u proizvoljnoj točki cikloide. Imamo  $\dot{x}(t) = a(1 - \cos t)$  i  $\dot{y}(t) = a \sin t$  te je  $\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} = a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = a\sqrt{2 - 2\cos t}$ . Budući da kosinus poprima vrijednosti između  $-1$  i  $1$ , vidimo da iznos brzine varira od  $0$  (kad god je  $\cos t = 1$ , tj. za  $t = 2k\pi$ , a to su točke za koje je  $y = 0$ , dakle točke cikloide koje su na  $x$ -osi) do  $2a$  (kad god je  $\cos t = -1$ , dakle za  $t = (2k + 1)\pi$ , a to su točke za koje je  $y = 2a$ , tj. točke maksimuma).

**Zadatak 26.** *Provjerite da cikloida zadovoljava diferencijalnu jednadžbu  $(\dot{y})^2 = \frac{2a-y}{y}$ .*

Napomenimo da svaki graf funkcije  $y = f(x)$  možemo zapisati u parametarskom obliku: uzevši  $t = x$  parametarske jednadžbe tog grafa postaju  $x(t) = t$  i  $y(t) = f(t)$ .

**Primjer 116.** *Jednadžbu parabole  $y = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , možemo parametarski zapisati kao*

$$x = t, \quad y = t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$



**Ponovimo bitno...** Parametarske jednadžbe  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  ( $t \in I$ ) opisuju krivulju u Kartezijevom koordinatnom sustavu koja se sastoji od točaka  $(x(t), y(t))$ . Koeficijent smjera tangente u promatranoj točki iznosi  $\dot{y}(t)/\dot{x}(t)$ , a vektor brzine u toj točki je  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ . 🦆🦆🦆

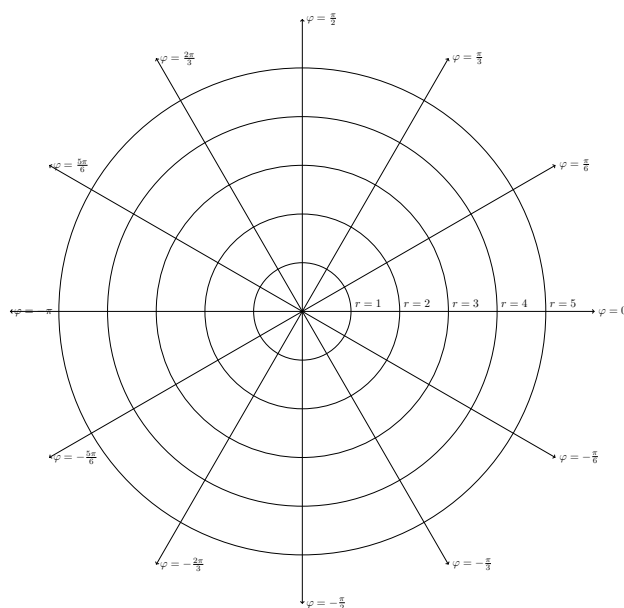
## 3.12 Polarne koordinate u ravnini

Treći važan način opisa krivulja u ravnini je pomoću polarnih koordinata. U osnovi ovo je isto kao trigonometrijski odnosno eksponencijalni prikaz kompleksnog broja (vidi odjeljak 1.4), samo što točke ravnine sad ne interpretiramo kao kompleksne brojeve.

Polarni koordinatni sustav u ravnini je koordinatni sustav u kojem se točke shvaćaju kao uređeni parovi dva broja, od kojih je prvi **polarna udaljenost**  $r$  do referentne točke (ishodišta  $O$ ), a drugi broj je **polarni kut**  $\varphi$ , mjeren u pozitivnom smjeru (tj. obrnuto od kazaljke na satu) između radij-vektora točke i polarne osi. Pritom, polarna os je polupravac s početkom u ishodištu. Ona se obično crta horizontalno, s usmjerenjem prema desno. Polarni kut  $\varphi$  se najčešće gleda unutar raspona  $\langle -\pi, \pi \rangle$  ili  $[0, 2\pi)$  (jedan puni krug), ali načelno  $\varphi$  može biti bilo koji realan broj, dok  $r$  ne može biti negativan.

Na slici 3.16 prikazan i polarni analog mreže horizontalnih i vertikalnih pravaca u pravokutnom koordinatnom sustavu (koja je za zadana jednadžbama  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$ , a ova s  $r = \text{const.}$ ,  $\varphi = \text{const.}$ ). Naime, jednadžba, primjerice,  $r = 2$  u polarnom koordinatnom sustavu predstavlja kružnicu polumjera 2 sa središtem u ishodištu, a jednadžba, primjerice,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  predstavlja vertikalni prema gore usmjeren polupravac. Želimo li u polarnom sustavu ucrtati npr. točku s koordinatama  $(r, \varphi) = (2, \pi/2)$ , nađemo kružnicu polumjera 2 oko ishodišta i na njoj točku koja se nalazi na polupravcu koji ima kut  $\pi/2$  prema polarnoj osi.





Slika 3.16: Polarni koordinatni sustav u ravnini.

Veza između polarnih i Kartezijevih koordinata u ravnini, uz pretpostavku zajedničkog ishodišta i preklapanja polarne osi s pozitivnim dijelom  $x$ -osi, dana je formulama:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

odnosno

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Primijetimo da zbog svojstava funkcije tangens isti kvocijent  $\frac{y}{x}$  određuje dva moguća polarna kuta  $\varphi$  unutar jednog kruga, pa ovisno o predznaku od  $x$  odabiremo pravi.

**Primjer 117.** Točka  $(-2, 1)$  ima polarne koordinate  $r = \sqrt{5}$  i  $\varphi = 180^\circ - 26,57^\circ$ .

Tehnički gledano, zadavanje krivulja u polarnim koordinatama je vrlo slično shvaćanju krivulje kao grafa realne funkcije jedne varijable, samo umjesto  $y = f(x)$  i shvaćanja para  $(x, y)$  kao točke u Kartezijevom koordinatnom sustavu sad imamo  $r = f(\varphi)$  i shvaćanje para  $(r, \varphi)$  kao točke u polarnom koordinatnom sustavu. U oba slučaja je  $f$  realna funkcija jedne varijable. Naravno, ovaj prikaz može se poopćiti na krivulje koje su u polarnom koordinatnom sustavu implicitno zadane jednadžbom oblika  $F(r, \varphi) = 0$ .

Kad kažemo da je krivulja opisana u polarnom sustavu s  $r = f(\varphi)$ , želimo reći da se ta krivulja sastoji od točaka s koordinatama<sup>17</sup>  $(\varphi, f(\varphi))$  za  $\varphi$  iz domene funkcije  $f$ . Primijetimo da, budući da mora vrijediti  $r \geq 0$ , ovakav prikaz grafa funkcije ima smisla *samo* za nenegativne funkcije  $f$ .

Polarne koordinate su osobito zgodne za opis kružnice sa središtem u ishodištu: ona ima jednadžbu oblika

$$r = R,$$

gdje je  $R$  polumjer kružnice, jer udaljenost točke na kružnici do njenog središta ne ovisi o polarnom kutu  $\varphi$ <sup>18</sup>.

**Primjer 118.** *Zadan je polupravac o s početkom u ishodištu  $O$ . Arhimedova spirala je putanja točke koja se od  $O$  jednoliko giba po  $o$ , ako pritom o jednoliko rotira oko  $O$ . Iz te definicije slijedi jednadžba Arhimedove spirale u polarnim koordinatama  $r = a\varphi$ .*

**Zadatak 27.** *Skicirajte nekoliko točaka hiperbolične spirale zadane jednadžbom  $r = 1/\varphi$ . Možete li naslutiti njen oblik?*

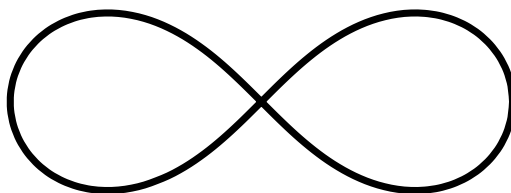
Zgodno je uočiti da vrijede sljedeća pravila za krivulje zadane jednadžbom  $r = f(\varphi)$  u polarnim koordinatama:

- Točke krivulje pojavljuju se samo unutar onih raspone kutova  $\varphi$  za koje je  $f$  nenegativna.
- Ako je  $f$  periodična s (ne nužno temeljnim) periodom  $2\pi$ , krivulja je zatvorena. Ako je  $f$  periodična s temeljnim periodom  $\frac{2\pi}{n}$ , gdje je  $n$  prirodan broj, onda je krivulja ne samo zatvorena, nego posjeduje o rotacijsku simetriju reda  $n$  oko  $O$ .<sup>19</sup>
- Ako je  $f$  parna funkcija, krivulja  $r = f(\varphi)$  je simetrična s obzirom na polarnu os.

<sup>17</sup>Zgodno je uočiti da se i ovdje radi o vizualizaciji grafa realne funkcije jedne varijable, samo na nestandardan način: Skup svih parova  $(X, f(X))$  kad je  $X$  element domene funkcije  $f$  je njen graf, koji uz interpretaciju  $X$  kao apscise i  $f(X)$  kao ordinate točke u pravokutnom koordinatnom sustavu poprima standardni izgled grafa funkcije, dok uz interpretaciju  $X$  kao polarnog kuta i  $f(X)$  kao udaljenosti od ishodišta poprima nestandardni oblik u polarnom koordinatnom sustavu.

<sup>18</sup>U duhu prethodne bilješke: Graf konstantne funkcije prikazan standardno u Kartezijevom koordinatnom sustavu je pravac paralelan s osi apscisa, dok prikazan nestandardno u polarnom koordinatnom sustavu poprima izgled kružnice sa središtem u ishodištu.

<sup>19</sup>Rotacijska simetrija reda  $n$  je rotacijska simetrija s kutem  $2\pi/n$ .



Slika 3.17: Bernoullijeva lemniskata.

- Ako je za sve  $\varphi$  iznos  $0 \leq m \leq f(\varphi) \leq M$ , onda se krivulja nalazi unutar prstena određenog kružnicama polumjera  $m$  i  $M$  (sa središtem u ishodištu).

**Primjer 119.** Odredimo oblik Bernoullijeve lemniskate  $r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$ .

Budući da je za smislenost jednadžbe  $r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$  nužno da je  $\cos(2\varphi) \geq 0$ , zaključujemo da se unutar jednog punog kruga (kojeg možemo opisati primjerice s  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) točke krivulje dobivaju samo ako je  $\cos(2\varphi) \geq 0$ , tj. za  $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  i za  $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$ .

Dalje, uočićimo da je  $\cos(2\varphi)$  parna funkcija kuta  $\varphi$ . Zbog parnosti je  $r(-\varphi) = r(\varphi)$ , primjerice za  $\varphi = \pi/6$  i  $\varphi = -\pi/6$  dobit ćemo isti  $r$ . Dakle, Bernoullijeva lemniskata je simetrična obzirom na polarnu os, odnosno dovoljno je odrediti njezin izgled za polarne kutove u rasponu  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , odnosno (uzevši u obzir prethodni odlomak) u rasponu  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  i  $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$ .

Nadalje,  $\cos(2\varphi)$  je periodična funkcija od  $\varphi$ , temeljnog perioda  $\pi$ . Budući kut  $\pi$  opisuje pola punog kruga, slijedi da se udaljenosti  $r$  ponavljaju svakih pola kruga, dakle se krivulja nakon pola kruga zatvori i unutar punog kruga imamo dva njena zatvorena dijela (povezana rotacijskom simetrijom s kutom  $180^\circ$ ). Stoga je dovoljno odrediti njezin izgled za polarne kutove u rasponu  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , odnosno uzevši u obzir prethodne odlomke, samo u rasponu  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ .

Ucertavanjem nekoliko točaka lemniskate za nekoliko  $\varphi$  u rasponu  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  te koristeći spomenute simetrije lemniskate možemo zaključiti da je izgled Bernoullijeve lemniskate takav kako je prikazano slikom 3.17.

**Zadatak 28.** Skicirajte sljedeće krivulje zadanih jednadžbama u polarnim koordinatama:

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos \varphi, \\ r &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \vartheta, \vartheta \in [0, 2\pi), \\ r &= \frac{\sqrt{10}}{4} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \vartheta \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Skicirajte ih i u pravokutnom  $(\varphi, r)$ -koordinatnom sustavu. Također, skicirajte i krivulje  $r = |f(\varphi)|$  za oba gornja slučaja.

Ako deriviramo funkciju  $r = f(\varphi)$  po  $\varphi$ , to je obično deriviranje funkcije jedne varijable. Primjerice, za  $r = a\varphi$  je  $r' = \frac{dr}{d\varphi} = a$ . No, interpretacija iznosa derivacije ovdje ne odgovara nagibu tangente na promatranu krivulju jer je to pojam vezan za prikaz u Kartezijevom koordinatnom sustavu.<sup>20</sup> Želimo li odrediti koeficijent smjera tangente na krivulju  $r = f(\varphi)$ , uz pretpostavku standardnog preklapanja polarnog i Kartezijevog koordinatnog sustava, u točki  $(r_0, \varphi_0)$  te krivulje, dobit ćemo ga formulom

$$k = \frac{r_0 + r'(\varphi_0)\operatorname{tg} \varphi_0}{r'(\varphi_0) - r_0\operatorname{tg} \varphi_0}.$$

Tu formulu dobijemo ovako:

$$k = y'(x_0) = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{r'(\varphi_0)\sin(\varphi_0) + r_0\cos(\varphi_0)}{r'(\varphi_0)\cos(\varphi_0) - r_0\sin(\varphi_0)} \cdot \frac{\cos(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)}.$$

Zbog veze polarnih i Kartezijevih koordinata, vidimo da je stoga jednadžba tangente na krivulju  $r = f(\varphi)$ , uz pretpostavku standardnog preklapanja polarnog i Kartezijevog koordinatnog sustava, u točki  $(r_0, \varphi_0)$  te krivulje dana s  $y - r_0 \sin \varphi_0 = k(x - r_0 \cos \varphi_0)$ .

**Zadatak 29.** Odredite jednadžbu tangente (u Kartezijevim koordinatama) na krivulju

$$r = \varphi \sin \varphi$$

u točki  $(r_0, \varphi_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .



**Ponovimo bitno...** Polarne koordinate u ravnini opisuju točke s dva broja  $r \geq 0$  i  $\varphi \in \mathbb{R}$ , od kojih prvi predstavlja udaljenost točke do ishodišta, a drugi kut spojnice točke s ishodištem prema polarnoj osi (polupravcu kroz ishodište). Jednadžba kružnice polumjera  $R$  sa središtem u ishodištu u polarnim koordinatama je  $r = R$ .



<sup>20</sup>Primijetimo da koeficijent smjera ima smisla samo ako se odnosi na pravac (ovdje tangentu) u Kartezijevom koordinatnom sustavu, te gornja formula podrazumijeva da krivulju  $r = f(\varphi)$  gledamo istovremeno u polarnom i Kartezijevom koordinatnom sustavu (sa zajedničkim ishodištem i polarnom osi koja se poklapa s pozitivnim dijelom osi apscisa).



## Poglavlje 4

# Limesi, asimptote i neprekidnost funkcija

### 4.1 Limesi funkcija

Limesi (granične vrijednosti) funkcija opisuju (procjenjuju) vrijednosti zadane funkcije u blizini neke(ih) vrijednosti njezine nezavisne varijable.

**Primjer 120.** Promotrimo sliku 4.1. Za funkciju čiji graf je prikazan na toj slici vrijedi: Kad su  $x$ -evi blizu  $-3$ , vidljivo je da su  $f(x)$ -evi blizu  $-1$ , iako je  $f(-3) = 3$ . S druge strane, kad su  $x$ -evi blizu  $0$ ,  $f(x)$ -evi su blizu  $-4 = f(0)$ .

Nadalje, vidljivo je da  $1$  nije u domeni funkcije jer ta apscisa nema pridružene točke na grafu, ali ipak možemo identificirati ordinatu negdje između  $-4$  i  $-3$  ( $-\frac{11}{3}$ ) kao onu za koju vrijedi da kad je  $x$  blizu  $1$ ,  $f(x)$ -evi su blizu nje.

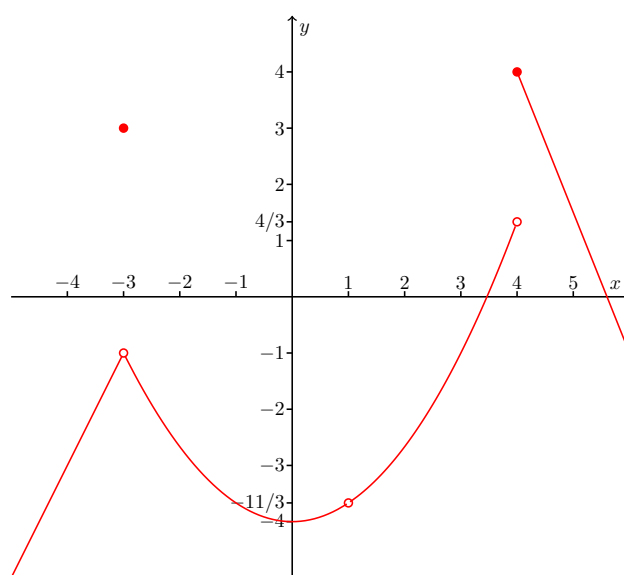
Pišemo:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{11}{3}.$$

Iz primjera 120 vidimo dvije stvari. Prvo, vrijednosti  $f(x)$  oko neke točke  $c$  iz domene funkcije mogu i ne moraju biti bliske vrijednostima  $f(c)$ . Drugo, ponekad se ima smisla pitati kakvi su  $f(x)$ -evi za  $x$ -eve blizu nekog  $c$  čak i ako  $c$  nije u domeni od  $f$ .



Slika 4.1: Ilustracija uz primjer 120.

**Primjer 121.** Činjenicu da što je množina  $n$  neke tvari bliža 1 mol, to je njena masa  $m$  bliža njenoj molarnoj masi  $M$  možemo matematički zapisati formulom

$$\lim_{\frac{n}{\text{mol}} \rightarrow 1} m = M.$$

Vidimo dakle da simbolika limesa ima opću strukturu oblika

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L. \quad (4.1)$$

Gornju formulu čitamo: Limes funkcije  $f$  kad  $x$  teži u  $c$  je  $L$ . Pritom je  $x$  nezavisna varijabla funkcije  $f$  (dakle,  $x$  je u domeni funkcije  $f$ ), a simboli  $c$  i  $L$  mogu biti realni brojevi ili neki od dva simbola  $\pm\infty$ .

### 4.1.1 Limes funkcije u točki

Pozabavimo se prvo slučajem kad je u formuli 4.1  $c$  realan broj. Oznaka  $x \rightarrow c$  (čita se: „ $x$  teži k  $c$ “) znači da se  $x$  približava k  $c$ . Pritom podrazumijevamo da  $x$  ne postiže vrijednost  $c$  ( $x \neq c$ ), ali da može doći proizvoljno blizu  $c$ . Drugim riječima, tražiti iznos limesa od  $f(x)$  kad  $x$  teži k  $c$  (u oznaci  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ) ima smisla uz uvjet da domena od  $f$  sadrži dva intervala, jedan tipa  $\langle a, c \rangle$  za neki  $a < c$ , a drugi tipa  $\langle c, b \rangle$  za neki  $b > c$  (kaže se i:  $f$  je definirana na nekom otvorenom intervalu oko  $c$  osim eventualno u  $c$ ).

**Primjer 122.** Za funkciju zadanu pravilom  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$  ima smisla tražiti  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  jer je domena te funkcije skup  $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -1, +\infty \rangle$  pa  $x$  može ostajući u domeni doći proizvoljno blizu  $-1$ .

S druge strane, nema smisla tražiti  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  za  $f(x) = \ln x$ , jer je domena te funkcije skup  $\langle 0, \infty \rangle$  pa nezavisna varijabla  $x$  ostajući u domeni ne može doći proizvoljno blizu  $-1$ .

Smisleni limes  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  može i ne mora imati određenu vrijednost  $L$ , tj. može i ne mora postojati. Pod limesom koji postoji podrazumijevamo samo smisleni limes kojemu na mjestu  $L$  možemo napisati realan broj, dakle kod kojeg možemo reći da je što je  $x$  (apscisa) bliži  $c$ , iznos  $f(x)$  (ordinata) je sve bliži broju  $L$ . Možemo pojednostavljeno „definirati”: Funkcija  $f$  ima limes  $L \in \mathbb{R}$  u točki  $c$  ako što je njezina nezavisna varijabla bliža  $c$ , bez da pritom poprimi vrijednost  $c$ , vrijednost funkcije  $f$  postaje sve bliže  $L$ . Stoga iznos limesa  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  grafički određujemo tako da nađemo ordinatu  $L$  (ako se takva može naći) sa svojstvom da sve točke grafa od  $f$  za  $x$  blizu  $c$  (osim eventualno točke s apscisom  $c$ ) imaju ordinate blizu  $L$ . Drugim riječima, ako je  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  točka  $(c, L)$  možda nije na grafu funkcije  $f$ , ali se u njoj spajaju dijelovi grafa malo lijevo i malo desno od nje.

Precizna matematička definicija limesa funkcije  $f$  u točki  $c \in \mathbb{R}$  glasi:

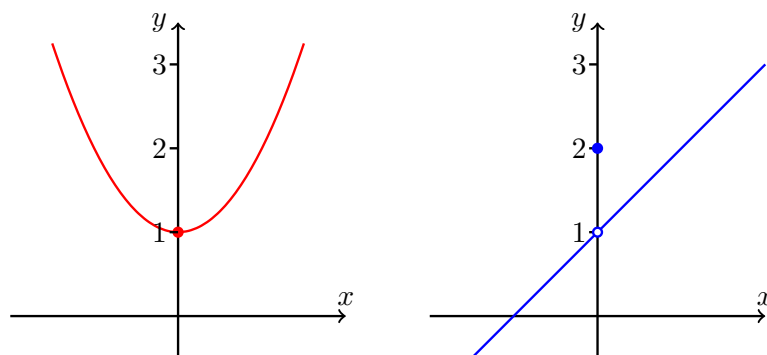
**Definicija 16 (Limes funkcije u točki).** Neka je  $f$  definirana na nekom otvorenom intervalu  $I$  oko  $c$ , osim eventualno u  $c$ . Kažemo da je broj  $L$  limes funkcije  $f$  u točki  $c$  ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da kad je  $x \in I$  i  $0 < |x - c| < \delta$  vrijedi  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . U tom slučaju pišemo  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ .

Podsjetimo se da je za dva realna broja  $x$  i  $y$  broj  $|x - y|$  jednak njihovo udaljenosti (na brojevnom pravcu). Smisao broja  $\varepsilon$  u prethodnoj definiciji je opis udaljenosti  $|f(x) - L|$  od  $f(x)$  do  $L$ , za koju želimo da može postati proizvoljno mala; zato u definiciji tražimo da „za svaki  $\varepsilon > 0$ ”, tj. za svaku zamislivu udaljenost od  $L$  možemo postići da udaljenost  $|f(x) - L|$  bude manja od nje. Pritom nas blizina  $f(x)$  i  $L$  zanima samo za  $x$  blizu točke  $c$  u kojoj tražimo limes. To je opisano srednjim dijelom definicije „postoji  $\delta > 0$  takav da kad je  $x \in I$  i  $0 < |x - c| < \delta$ ”: možemo naći  $x \neq c$  blizu  $c$  (udaljen za manje od nekog  $\delta$  od  $c$ ) tako da je  $f(x)$  na udaljenosti od  $L$  manjoj od na početku proizvoljno male zadane kao  $\varepsilon$ .

Dva korisna limesa funkcija u točki koja je korisno zapamtiti, ali ih nećemo dokazivati, su

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$





Slika 4.2: Primjer dviju funkcija s istim limesom, ali različitim vrijednostima u  $c = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Nikoja funkcija ne može imati dva različita limesa u istoj točki:

**Teorem 7 (Jedinstvenost limesa).** *Ako postoji broj  $L$  takav da je  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ , onda je taj broj jedinstven.*

S druge strane, dvije funkcije mogu u nekoj točki  $c$  imati različite vrijednosti, a ipak isti limes.

**Primjer 123.** Pogledajmo sliku 4.2 koja prikazuje grafove funkcija zadanih formulama  $f(x) = x^2 + 1$  (crveno) i

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

(plavo). Sa slike je vidljivo da obje te funkcije imaju limes 1 u točki 0 iako je  $f(0) = 1$ , a  $g(0) = 2$ .

Jedan izuzetno važan slučaj limesa u točki je egzaktna definicija derivacije.

**Definicija 17 (Derivacija).** *Ako je  $c$  točka domene funkcije  $f$  i postoji limes<sup>1</sup>*

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>Uočite da se radi o limesu koeficijenta smjera sekante kroz točke  $(c, f(c))$  i  $(x, f(x))$  u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

onda se taj limes zove derivacijom funkcije  $f$  u točki  $c$  i označava s  $f'(c)$  ili  $\frac{df}{dx}(c)$  i kažemo da je  $f$  derivabilna u  $c$ .

Funkcija koja je derivabilna u svakoj točki svoje domene zove se derivabilnom (ili diferencijabilnom) funkcijom.

Veza gornje definicije s prethodnim „definicijama“ derivacije, posebno onom da je derivacija u točki koeficijent smjera tangente na graf u toj točki, je prilično očigledna: Kvocijent  $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$  je koeficijent smjera pravca kroz točke  $(c, f(c))$  i  $(x, f(x))$ , dakle sekante grafa funkcije  $f$ , a što je  $x$  bliži  $c$ , ta sekanta će biti bliža tome da bude tangenta u točki  $(c, f(c))$ , odnosno taj koeficijent smjera teži, kad  $x \rightarrow c$ , koeficijentu smjera tangente, tj. k  $f'(c)$ .

**Napomena 11.** Kad se govori o derivaciji funkcije, bez da naglasimo u kojoj točki, misli se na funkciju  $f'$  koja je definirana u svakoj točki  $c$  u kojoj je  $f$  derivabilna i koja svakoj takvoj točki pridružuje iznos derivacije  $f'(c)$ .

Već smo rekli, moguće je i da  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  ne postoji. O tome govorimo kad god u gornjim definicijama ne možemo dobiti broj  $L$ . Jedan od mogućih razloga takve pojave vidimo na slici 4.1. Za  $x$ -eve koji su blizu 4 a koji su malo manji od 4, ordinate točaka grafa su blizu  $\frac{4}{3}$ , dok su za  $x$ -eve blizu 4 a koji su malo veći od 4 ordinate točaka grafa blizu 4. Dakle, limes  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  za funkciju čiji graf je prikazan na slici 4.1 ne postoji, no kad bismo se ograničili na približavanje  $x$ -eva k 4 samo s jedne (lijeve ili desne) strane mogli bismo identificirati po jednu ordinatu koja bi bila limes. Takve situacije opisuju se pomoću jednostranih limesa.

Ako promatramo što se dešava s  $f(x)$  kad su  $x$ -evi sve bliži  $c$ , ali isključivo manji (ili isključivo veći) od  $c$ , govorimo o jednostranim limesima. Približavanje  $x$ -eva broju  $c$  slijeva označavamo s

$$x \rightarrow c-,$$

a približavanje  $x$ -eva broju  $c$  zdesna označavamo s

$$x \rightarrow c+.$$

Limes funkcije  $f$  u točki  $c$  slijeva je (ako takav postoji) broj  $L$  takav da što je  $x$  bliži  $c$ , a da je pritom  $x < c$ , to je  $f(x)$  bliži  $L$ . Tada pišemo  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = L$ . Analogno, limes funkcije  $f$  u točki  $c$  zdesna je (ako takav postoji) broj  $L$  takav da što je  $x$  bliži  $c$ , a da je pritom  $x > c$ , to je  $f(x)$  bliži  $L$ . Tada pišemo  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = L$ .

Tako npr. za funkciju čiji graf je prikazan na slici 4.1 pišemo

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = \frac{4}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = 4.$$

Formalnije:

**Definicija 18 (Jednostrani limesi).** Neka je  $f$  definirana na nekom intervalu  $\langle a, c \rangle$ . Kažemo da je

$$\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = L,$$

ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da kad je  $x \in \langle a, c \rangle$  i  $0 < |x - c| < \delta$  vrijedi  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

Neka je  $f$  definirana na nekom intervalu  $\langle c, b \rangle$ . Kažemo da je

$$\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = L,$$

ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da kad je  $x \in \langle c, b \rangle$  i  $0 < |x - c| < \delta$  vrijedi  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

Ukratko, definicija jednostranih limesa funkcije  $f$  u točki  $c$  je jednaka definiciji limesa u točki  $c$ , uz dodatak  $x < c$  odnosno  $x > c$ .

Korisno je znati, a intuitivno je jasno da vrijedi:

**Teorem 8.** Limes  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  postoji ako i samo ako postoje oba jednostrana limesa  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$  i jednaki su. U tom slučaju vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c+} f(x).$$

**Primjer 124.** Neka je

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x + 2, & x \leq -1 \end{cases}$$

Odredimo jednostrane limese u  $c = 0$  i  $c = -1$ . Imamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = (\text{pravilo za } x < 0 \text{ je } x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = (\text{za } x \approx 0 \text{ je } x^2 \approx 0) = 0;$$

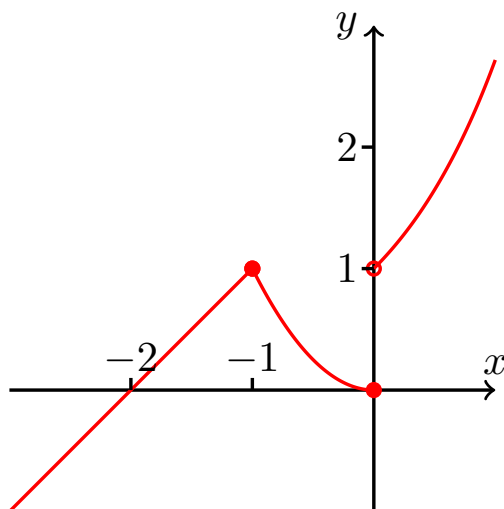
$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = (\text{pravilo za } x > 0 \text{ je } e^x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = (\text{za } x \approx 0 \text{ je } e^x \approx 1) = 1.$$

Dakle, ne postoji limes  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  jer se jednostrani limesi u nuli razlikuju. S druge strane,

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = (\text{pravilo za } x < -1 \text{ je } x+2) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+2) = (\text{za } x \approx -1 \text{ je } x+2 \approx 1) = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = (\text{pravilo za } x > -1 \text{ je } x^2) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = (\text{za } x \approx -1 \text{ je } x^2 \approx 1) = 1.$$

Dakle, postoji limes  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  i jednak je 1 jer su jednostrani limesi u  $-1$  jednaki. Odgovarajući graf prikazan je na slici 4.3.



Slika 4.3: Ilustracija uz primjer 124.

Primijetimo sad da se razlika u lijevom i desnom limesu u točki može dogoditi i u limesu iz definicije derivacije (formula 4.2).

**Primjer 125.** Funkcija apsolutne vrijednosti  $f(x) = |x|$  nije derivabilna u točki  $c = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x},$$

što je slijeva jednako  $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1$ , a zdesna  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$ .

Ukoliko je dakle  $\lim_{x \rightarrow c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = a \neq b = \lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ , onda oko  $c$  graf funkcije izgleda kao da slijeva ima tangentu koeficijenta smjera  $a$ , a zdesna tangentu drugog koeficijenta smjera  $b$ , odnosno dobivamo graf sa „špicom” u točki  $c$ . Analogno zaključujemo i u slučaju kad se domena od  $f$  može rastaviti na disjunktne<sup>2</sup> intervale od kojih su jedan ili više njih poluotvoreni ili zatvoreni. Tada ni u kojem od „zatvorenih” rubova  $c$  derivacija ne postoji, jer u  $c$  jedan od jednostranih limesa od  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  nema smisla, pa ne može postojati limes iz definicije 4.2. Dakle, sad smo potvrdili da za dva od četiri slučaja navedena na str. 100 derivacija ne postoji.

Osim slučaja kad se lijevi i desni limes u točki  $c$  razlikuju, postoji još jedna situacija kad ne možemo naći broj  $L$  takav da je  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ , tj. kad taj limes ne postoji, ali ipak postoji određena pravilnost ponašanja funkcije  $f$  blizu  $c$ .

<sup>2</sup>Disjunktan znači da nema zajedničkih elemenata s drugima.

**Primjer 126.** Za vrijednosti varijable  $x$  blizu nule vrijednosti funkcije  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  postaju proizvoljno velike — ma koliko velik broj  $M$  zamislili, možemo naći  $x \approx 0$  takav da je  $\frac{1}{x^2} > 0$ . Primjerice, za „preskočiti” vrijednost  $M = 1000$  možemo uzeti  $x = 0,01$  i dobit ćemo  $f(x) = f(0,01) = 10000 > 1000 = M$ . Analogno, za prirodne brojeve  $n$  limesi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n}$$

ne postoje, jer — kako je vidljivo sa slike 2.18 — ne možemo identificirati ordinatu (iznos) kojoj je  $\frac{1}{x^n}$  sve bliži ako se  $x$  približava k 0.

U slučajevima poput gornjeg se na mjestu  $L$  u formuli 4.1 može pisati neki od simbola  $+\infty$  ili  $-\infty$ . Primjerice, u situaciji iz prethodnog primjera ćemo pisati

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Odnosno, notacija

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$$

se koristi kad što je  $x$  bliži  $c$ , to iznos  $f(x)$  postaje sve veći, i pritom nema ograničenja na porast tog iznosa — on može postati proizvoljno velik. Analogno,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

znači da što je  $x$  bliži  $c$ , to iznos  $f(x)$  postaje sve manji (negativan), i pritom nema ograničenja na pad tog iznosa — on može postati proizvoljno malen. Matematički precizna definicija beskonačnih limesa je

**Definicija 19 (Beskonačni limesi u točki).** Kažemo da je  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$  ako vrijedi: za svaki  $M > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da kad god je  $0 < |x - c| < \delta$  vrijedi

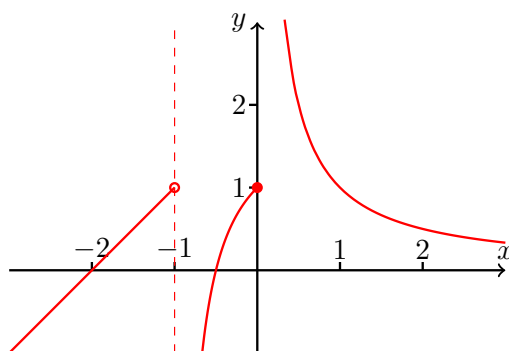
$$f(x) > M$$

odnosno

$$f(x) < -M.$$

Ideja gornje definicije je: Za proizvoljno zadanu granicu  $M > 0$  vrijednosti za funkciju možemo naći interval oko  $c$  (širine po  $\delta$  ulijevo i udesno) takav da uvrštavanje  $x$ -eva iz tog intervala u funkciju daje rezultate veće od  $M$  odnosno manje od  $-M$ .

Definiciju beskonačnog limesa u točki  $c$  uz ograničenje na  $x < c$  ili  $x > c$  lako prilagodimo u definiciju jednostranih beskonačnih limesa:  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$  ako što je  $x$  bliži  $c$  i pritom je  $x < c$ , to  $f(x)$  postaje sve veći. Analogno se mogu opisati ostale tri definicije. Potpuno precizno te definicije glase ovako:



Slika 4.4: Ilustracija uz primjer 127.

**Definicija 20 (Jednostrani beskonačni limesi).** Kažemo da je  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = +\infty$  ako vrijedi: za svaki  $M > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da kad god je  $0 < |x - c| < \delta$  i  $x < c$  vrijedi  $f(x) > M$ .

Kažemo da je  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = +\infty$  ako vrijedi: za svaki  $M > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da kad god je  $0 < |x - c| < \delta$  i  $x > c$  vrijedi  $f(x) > M$ .

Kažemo da je  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = -\infty$  ako vrijedi: za svaki  $M > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da kad god je  $0 < |x - c| < \delta$  i  $x < c$  vrijedi  $f(x) < -M$ .

Kažemo da je  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = -\infty$  ako vrijedi: za svaki  $M > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da kad god je  $0 < |x - c| < \delta$  i  $x > c$  vrijedi  $f(x) < -M$ .

**Primjer 127.** Za funkciju  $f$  čiji graf je prikazan slikom 4.4 imamo

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = +\infty.$$

Primijetimo da iz primjera 127 vidimo dvije bitne stvari: Prvo, moguće je da funkcija posjeduje vertikalnu asimptotu  $x = c$  čak i ako je  $c$  element domene od  $f$  (u primjeru 127  $c = 0$  je u domeni, a imamo vertikalnu asimptotu  $x = 0$ ). Drugo, moguće je da pravac  $x = c$  bude vertikalna asimptota za funkciju samo s jedne strane (u primjeru 127 to vrijedi i za  $x = 0$  i za  $x = 1$ ).

Usporedbom s ranijim opisom pojma vertikalnih asimptota vidimo da kao definiciju vertikalne asimptote sad možemo dati sljedeću:

**Definicija 21 (Vertikalne asimptote).** Pravac  $x = c$  je vertikalna asimptota za funkciju  $y = f(x)$  ako je bar jedan od jednostranih limesa  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$  jednak  $+\infty$  ili  $-\infty$ .

**Primjer 128.** Vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Od beskonačnih limesa, korisno je zapamtiti sljedeće:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{a}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}, a > 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{a}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}, n \text{ paran}, a > 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{a}{x^n} = -\infty \quad (n \in \mathbb{N}, n \text{ neparan}, a > 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = +\infty \quad (0 < a < 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = -\infty \quad (a > 1).$$

Vrijedi i: Ako je  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a \neq 0$  i  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ , onda je  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ .

To se kratko zapisuje s

$$\frac{a}{0} = \infty \quad (\text{za } a \neq 0).$$

Ovo naravno ne znači da je sad dozvoljeno dijeljenje s nulom, već oznaka  $\frac{a}{0}$  znači da se broj blizu  $a$  dijeli brojem koji je blizu 0, ali *nije* jednak 0.

**Primjer 129.** Uzmimo funkciju pravila  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  i izračunajmo za nju limes iz definicije derivacije:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{c}}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x - c}{(x - c)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xc} + \sqrt[3]{c^2})} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xc} + \sqrt[3]{c^2}}$$

(u prvom koraku smo kvocijent proširili s  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xc} + \sqrt[3]{c^2}$ , a u drugom smo smjeli kratiti jer gledamo limes kad  $x \rightarrow c$ , dakle  $x \neq c$ ).

Za  $x = 0$  gornji limes je tipa  $\frac{1}{0}$ , dakle je limes beskonačan: Funkcija trećeg korijena nije derivabilna u 0. Intuitivno, tu bi koeficijent smjera tangente bio „beskonačan”, odnosno, kao što već znamo, u 0 funkcija trećeg korijena ima vertikalnu tangentu.

Kao u primjeru vrijedi i općenito: Ako je limes iz definicije derivacije (formula 4.2) beskonačan, funkcija nije derivabilna u promatranoj točki (i ondje ima vertikalnu tangentu). Time smo potvrdili i treću od grafičkih situacija kad ne postoji derivacija funkcije u nekoj točki njezine domene.

Nadalje, ako je  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a \neq \pm\infty$  i  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty$ , onda je  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

To se kratko zapisuje s

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

(za  $a \in \mathbb{R}$ ). I ovo ne znači da je  $\infty$  broj s kojim možemo dijeliti, već oznaka  $\frac{a}{\infty}$  znači da broj blizu  $a$  dijelimo jako velikim ili jako malim brojem.

Kod racionalnih funkcija potencijalne vertikalne asimptote odnosno beskonačni limesi funkcije mogu se pojaviti u „rupama u domeni” (nultočkama nazivnika). Već smo rekli da će se vertikalna asimptota  $x = c$  kod racionalne funkcije pojaviti točno u onim slučajevima u kojima je nakon skraćivanja svih zajedničkih faktora brojnika i nazivnika broj  $c$  nultočka nazivnika, ali ne i brojnika. Skraćivanje<sup>3</sup> faktora  $(x - c)$  iz brojnika i nazivnika pod limesom je dozvoljeno jer u limesu  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  podrazumijevamo da je  $x$  blizu  $c$ , ali  $x \neq c$  te je  $x - c \neq 0$ . Stoga je skraćivanje zajedničkih faktora brojnika i nazivnika prvi korak u izračunavanju limesa racionalne funkcije u točki  $c$  koja je nultočka nazivnika.

**Primjer 130.** *Izračunajmo*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(x+2)^2}{x^2(x+5)}.$$

*Zajednički faktor brojnika i nazivnika je  $x$ , a on pri izračunavanju limesa u točki 0 nije jednak nuli. Stoga nakon skraćivanja dobivamo*

$$\frac{(x-1)(x+2)^2}{x(x+5)}.$$

*Brojnik tog izraza za  $x \approx 0$  je približno jednak  $(0-1)(0+2)^2 = -4$ , tj.*

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(x+2)^2 = -4.$$

*Nazivnik  $x(x+5)$  postaje sve bliži nuli što je  $x$  bliži nuli, tj.*

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(x+5) = 0.$$

*Stoga imamo*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(x+2)^2}{x(x+5)} = \left\{ \text{limes tipa } \frac{-4}{0} \right\} = \infty$$

---

<sup>3</sup>Skraćivanje razlomka je dijeljenje brojnika i nazivnika istim brojem, dakle možemo skratiti samo one faktore za koje smo sigurni da nisu jednaki nula.



i to  $+\infty$  slijeva (za  $x < 0$ , a blizu 0, je  $x(x+5)$  negativno, a i brojnik je negativan:  $-4$ ), a  $-\infty$  zdesna (za mali  $x > 0$  je  $x(x+5)$  pozitivno). Kratko ovaj račun obično pišemo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(x+2)^2}{x^2(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(x+2)^2}{x(x+5)} = \left\{ \frac{-4}{0} \right\} = \pm\infty.$$

Ukoliko je  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ , onda je  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  limes tipa  $\frac{0}{0}$  koji spada u tzv. neodređene izraze. To znači da limes  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  ovisno o funkcijama  $f$  i  $g$  može poprimiti različite vrijednosti.

**Primjer 131.** Limesi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x}$  i  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$  su oba tipa  $\frac{0}{0}$ . Za prvi imamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$$

(jer je  $x+1$  blizu 1 kad je  $x$  blizu 0), a za drugi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

(jer je  $\frac{1}{x+1}$  blizu  $\frac{1}{2}$  kad je  $x$  blizu 1). Vidimo dakle da limesi tipa  $\frac{0}{0}$  mogu davati različite konačne rezultate.

Vidimo dakle da limesi tipa  $\frac{0}{0}$  mogu davati različite konačne rezultate. Takve tipove limesa zovemo **neodređenim izrazima**. Osim  $\frac{0}{0}$  u neodređene izraze spadaju i  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$ ,  $0^\infty$ ,  $+\infty - \infty$ .



**Ponovimo bitno...** Limes funkcije  $f$  u nekoj točki  $c$  (koju gledamo na osi apscisa) je, ako postoji, broj  $L$  (kojeg vidimo na osi ordinata) takav da što je  $x$  bliži  $c$ , to je  $f(x)$  bliži  $L$ . Pritom je nebitno je li  $f$  definirana u  $c$  (ali mora biti definirana oko  $c$ ), a ako i jest, moguće je i da je  $f(c) = L$  i da  $f(c) \neq L$ .

U slučajevima da definiciju limesa funkcije u točki  $c$  možemo zadovoljiti uz dodatni uvjet da gledamo samo  $x < c$  ili samo  $x > c$ , govorimo o jednostranom — lijevom odnosno desnom — limesu funkcije u točki  $c$ . Ponekad oni postoje i različiti su; tada funkcija nema limes u točki  $c$ . Ako i lijevi i desni limes postoje i podudaraju se, onda postoji i „obični” obostrani limes i jednak im je (i obrnuto, ako znamo da limes od  $f$  u  $c$  postoji, onda postoje i oba jednostrana limesa u  $c$  i jednaki su mu).

Isto je reći da funkcija  $f$  ima vertikalnu asimptotu  $x = c$  i da je bar jedan od jednostranih limesa od  $f$  u točki  $c$  beskonačan. Kažemo da je limes od  $f$  u  $c$  beskonačan ako što je  $x$  bliži  $c$  (bez da je pritom  $x = c$ ) vrijednosti  $f(x)$  postaju proizvoljno velike ili proizvoljno male.

Derivacija funkcije  $f$  u točki  $c$  definirana je s

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$



### 4.1.2 Limes funkcije u beskonačnosti

Razmotrimo sad slučaj kad je u formuli 4.1  $c$  neki od simbola  $-\infty$  ili  $+\infty$ . Tada govorimo o limesu u beskonačnosti. Ako je  $c = -\infty$  ili  $c = +\infty$ , onda približavanje  $x \rightarrow c$  shvaćamo kao neograničeni rast odnosno pad nezavisne varijable („što je  $x$  veći/manji”), dakle domena od  $f$  mora sadržavati neki interval tipa  $\langle -\infty, b \rangle$  za prvi, odnosno  $\langle a, +\infty \rangle$  za drugi slučaj. Drugim riječima, formulom

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad (4.3)$$

bilježimo rečenicu „što je  $x$  veći, i pritom postaje neograničeno veći, to su vrijednosti  $f(x)$  bliže broju  $L$ ”. Analogno

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad (4.4)$$

znači „što je  $x$  manji, i pritom postaje neograničeno malen (negativan!), to su vrijednosti  $f(x)$  bliže broju  $L$ ”.

**Primjer 132.** *Limes  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(-x)$  nema smisla jer domena od  $f(x) = \ln(-x)$  ne sadrži nikoji interval tipa  $\langle a, +\infty \rangle$ .*

**Primjer 133.** *Tijekom kemijske reakcije množinska koncentracija  $c$  bilo kojeg njezinog produkta neće neograničeno rasti, nego će se s vremenom sve više približavati nekoj ravnotežnoj vrijednosti  $c_\infty$ : Što je vrijeme  $t$  veće (bez ograničenja!), to će  $c$  biti bliži  $c_\infty$ . Pišemo:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c = c_\infty.$$

Precizna definicija limesa funkcije u beskonačnosti glasi:

**Definicija 22 (Limes funkcije u beskonačnosti).** *Neka je  $f$  definirana na nekom intervalu  $\langle -\infty, b \rangle$ . Kažemo da je broj  $L$  limes funkcije  $f$  kad  $x$  teži*

u  $-\infty$  ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $M > 0$  takav da kad god je  $x < b$  i  $x < M$  vrijedi  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . U tom slučaju pišemo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ .

Neka je  $f$  definirana na nekom intervalu  $\langle a, +\infty \rangle$ . Kažemo da je broj  $L$  je limes funkcije  $f$  kad  $x$  teži u  $+\infty$  ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $M > 0$  takav da kad god je  $x > a$  i  $x > M$  vrijedi  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . U tom slučaju pišemo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ .

U oba dijela gornje definicije smisao broja  $\varepsilon$  je da opisuje udaljenost  $f(x)$  do  $L$  za koju želimo da bude proizvoljno mala, a da pritom možemo s  $x$  „otići dovoljno daleko” lijevo odnosno desno (što je regulirano postojanjem broja  $M$ ). Možemo to izreći i drugačije: Za proizvoljno zadanu maksimalnu grešku aproksimacije  $\varepsilon$  možemo naći vrijednost varijable ( $M$  odnosno  $-M$ ) počevši od koje (udesno odnosno ulijevo) aproksimacija vrijednosti  $f(x)$  s  $L$  daje grešku manju od zadane.

Kao i za limese u točki, teorem 7 vrijedi i ako je  $c = \pm\infty$ . Ako pak usporedimo upravo definirane limese u beskonačnosti s ranijim opisom horizontalnih asimptota, vidimo:

**Definicija 23 (Horizontalne asimptote).** Pravac  $y = L$  je horizontalna asimptota lijevo odnosno desno za funkciju  $y = f(x)$  ako vrijedi  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  odnosno  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ .

Od limesa u beskonačnosti, korisno je zapamtiti sljedeće:<sup>4</sup>

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} C = C,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n > 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \quad (0 < a < 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad (a > 1).$$

Limesom funkcije u beskonačnosti definira se i broj  $e$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Za racionalne funkcija lako je odrediti njihove limese u beskonačnosti. Naime, ako je  $x$  jako velik (ili jako mali), onda u iznosu polinoma dominira

---

<sup>4</sup>Uočimo da prvi od njih znači da je konstatna funkcija sama sebi horizontalna asimptota.

vodeći član (primjerice, ako je  $f(x) = x^2 + 3x + 2$ , onda za jako velike  $x$  imamo<sup>5</sup>  $x^2 \gg 3x + 2$  te je  $f(x) \approx x^2$ ). Stoga imamo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}.$$

Posljednji limes je 0 ako  $n < m$ , za  $n = m$  je jednak  $\frac{a_n}{b_m}$ , a inače ne postoji. To znači da vrijedi ono što smo već rekli: racionalna funkcija ima (obostranu) horizontalnu točno ako joj nazivnik nema manji stupanj od brojnika; ako je nazivnik većeg stupnja od brojnika ta asimptota je  $x$ -os (pravac  $y = 0$ ), a ako su brojnik i nazivnik istog stupnja horizontalna asimptota je  $y = \frac{a_n}{b_m}$  (kvocijent vodećih koeficijenata brojnika i nazivnika).

Kao i limesi u točki  $c \in \mathbb{R}$ , limesi u beskonačnosti također ne moraju postojati. Jedan takav slučaj su **beskonačni limesi u beskonačnosti**. Ako  $f(x)$  postaje proizvoljno velik (malen) što je  $x$  veći, pišemo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  odnosno  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ . Analogno,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  znači da što je  $x$  manji, to je  $f(x)$  veći i postaje proizvoljno velik, a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  znači da što je  $x$  manji, to je  $f(x)$  manji i postaje proizvoljno malen.

Od beskonačnih limesa u beskonačnosti, dobro je zapamtiti sljedeće:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty \quad \text{za paran } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \pm\infty \quad \text{za neparan } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \quad (0 < a < 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \quad (a > 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \quad (0 < a < 1).$$

Također, kao i kod limesa funkcije u točki, može se dogoditi da se nepostojeći limes funkcije u beskonačnosti ne može opisati niti kao beskonačan.

**Primjer 134.** *Limesi  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$  ne postoje u užem smislu riječi. Oni očito nisu beskonačni jer sinus poprima samo vrijednosti između  $-1$  i  $1$ , a ne postoje zbog periodičnosti (ne može se identificirati nikoji broj kojem bi se vrijednosti  $\sin x$  približavale za jako velike ili jako male vrijednosti varijable).*

---

<sup>5</sup>Simbol  $\gg$  čitamo „je puno veće od“.



**Ponovimo bitno...** Broj  $L$  je limes funkcije  $f$  u beskonačnosti ( $+\infty$  odnosno  $-\infty$ ) ako što je varijabla  $x$  veća odnosno manja, to je  $f(x)$  bliži  $L$ . Postojanje limesa u beskonačnosti istoznačno je s postojanjem horizontalne asimptote. 

### 4.1.3 Svojstva limesa funkcija

Osim jedinstvenosti (ako postoje), limesi imaju još neka bitna svojstva koja olakšavanju njihovo izračunavanje, a neka od njih smo prešutno već koristili u prethodna dva odjeljka. Intuitivno je jasno da ako su za  $x$  blizu broja  $c$  (ili pak postaje jako velik odnosno mali, tj.  $x \rightarrow \pm\infty$ ) vrijednosti  $f(x)$  blizu  $L_1$ , a  $g(x)$  blizu  $L_2$ , da je onda i  $f(x) \pm g(x)$  blizu  $L_1 \pm L_2$ ,  $f(x)g(x)$  blizu  $L_1L_2$  i  $\frac{f(x)}{g(x)}$  blizu  $\frac{L_1}{L_2}$  (ovo posljednje naravno samo za  $L_2 \neq 0$  jer su iznosi postojećih limesa realni brojevi, a za njih nije dozvoljeno dijeljenje s nulom). Navedena svojstva se stvarno mogu precizno matematički dokazati, odnosno vrijedi:

**Teorem 9.** *Neka postoje  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ , gdje je  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c = +\infty$  ili  $c = -\infty$ . U tom slučaju postoje i limesi  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x))$  i  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x))$  te vrijedi:*

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x),$$

i

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Ako dodatno vrijedi i  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$ , onda postoji i  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  i jednak je  $\frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ .

**Primjer 135.** Treba izračunati  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \exp(x)}{\cos x}$ . Kad je  $x$  blizu 0, kosinus mu je blizu 1 te je limes nazivnika 1 (kad  $x$  teži u nulu). Kad je  $x$  blizu nule, onda su  $x$  i  $x^2$  blizu nule, a  $e^x$  je blizu 1 te je brojnik blizu  $0 + 0 \cdot 1$  odnosno limes brojnika je 0 (kad  $x$  teži u nulu). Stoga je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 e^x}{\cos x} = \frac{0 + 0 \cdot 1}{1} = 0.$$

**Primjer 136.** Limes  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  ne postoji (u užem smislu riječi, tj. ne može se odrediti ni kao jednostrani ni kao beskonačni limes) jer kad  $x \rightarrow 0 \pm$ ,

onda  $\frac{1}{x} \rightarrow \pm\infty$ , a znamo da ne postoji limes funkcije sinus u beskonačnosti (primjer 134).

**Primjer 137.** Dokažimo svojstvo aditivnosti deriviranja. Neka su  $f$  i  $g$  derivabilne u  $c$  te neka je  $h = f + g$  tj. za sve  $x$  je  $h(x) = f(x) + g(x)$ . Tada iz definicijske formule 4.2 imamo:

$$\begin{aligned} h'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) + g(x) - f(c) - g(c)}{x - c} = \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = f'(c) + g'(c), \end{aligned}$$

tj. pokazali smo da je  $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$ .

**Zadatak 30.** Dokažite svojstvo homogenosti deriviranja, tj. formulu  $(Cf)'(c) = C f'(c)$  ( $C$  je konstanta,  $f$  je funkcija derivabilna u  $c$ , a  $Cf$  je funkcija definirana s  $(Cf)(x) = C \cdot f(x)$ ).

Kako biste izračunali limes  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\sin x}$ ? Nije primjenjivo nijedno od četiri pravila iz gornjeg teorema jer se ovdje radi o limesu kompozicije funkcija. No, opet će se potvrditi ono na što nas intuicija navodi: Kad je  $x$  blizu 0, onda je  $\sin x$  blizu 0 te je  $\sqrt{\sin x}$  blizu  $\sqrt{0} = 0$ , tj. naš limes iznosi nula. Preciznije, može se dokazati da vrijedi:

**Teorem 10.** Ako postoje limesi  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  i  $\lim_{y \rightarrow L} g(y) = L'$ , onda vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow c} f(x)) = L'.$$

Pomoću posljednja dva teorema mogu se izračunati mnogi limesi, no problemi nastaju ako pravila ne primjenjujemo u skladu s uvjetima tih, tj. ne pazimo na uvjet o postojanju pojedinih „podlimesa“.

**Primjer 138.** Neka je  $f(x) = \sin x$  i  $g(x) = \frac{1}{\sin x}$ . Za  $x \rightarrow \pm\infty$  ne postoji niti limes  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  niti  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$ , ali postoji  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 = 1$ .

Dakle, moguće je da postoji limes umnoška funkcija iako pojedinačni limesi ne postoje (jedan ili oba).

Ponekad indirektno možemo zaključiti koliki je limes, primjenom tzv. „teorema o sendviču“. Nećemo ga formalno iskazati, ali taj teorem u biti kaže da ako znamo da je za  $x$ -eve iz nekog intervala oko  $c$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

i ako znamo da je

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L,$$

onda je i

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L.$$

**Primjer 139.** Znamo da je za svaki  $x$

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

Stoga je i za sve  $x > 0$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Kako je  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  slijedi i da je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Analogno bi se vidjelo da je i

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$$

**Primjer 140.** Izračunajmo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$  i  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\sin \frac{x}{2}\right)}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \{y = \ln(1+x)\} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{(-x) \cdot (-1)}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^{-1}}{e} = \frac{1}{e^2}.$$



**Ponovimo bitno...** Limes zbroja/razlike/produkta/kvocijenta funkcija jednak je zbroju/ razlici/projektu/kvocijentu limesa tih funkcija (ako oni postoje).



### 4.1.4 Kose asimptote

Ponekad se za graf funkcije može uočiti pravac koji nije horizontalan, a ima svojstvo da se graf uz njega priljubljuje sve više što su vrijednosti varijable veće ili manje. Tada govorimo o kosoj asimptoti.

Kada će pravac  $y = kx + l$  biti kosa asimptota za funkciju  $y = f(x)$ , recimo desno? Prvo,  $f$  mora biti definirana za proizvoljno velike vrijednosti varijable  $x$  (domena od  $f$  mora sadržavati interval tipa  $\langle a, +\infty \rangle$ ). Drugo, želimo da vrijedi  $f(x) \approx kx + l$  za jako velike  $x$ , tj. da bude  $\frac{f(x)}{x} \approx k + \frac{l}{x} \approx k$  i  $f(x) - kx \approx l$  za jako velike  $x$ . Ako pritom dobijemo  $k = 0$ , nemamo kosu, nego horizontalnu asimptotu, odnosno horizontalne asimptote su specijalni slučaj kosih. Stoga imamo definiciju:

**Definicija 24 (Kose asimptote).** *Pravac  $y = kx + l$  je kosa asimptota desno za funkciju  $y = f(x)$  ako vrijedi*

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

i

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Ako gornja dva limesa postoje, ali je  $k = 0$ , asimptota desno nije kosa, nego horizontalna ( $y = l$ ).

Analogno, pravac  $y = kx + l$  je kosa asimptota lijevo za funkciju  $y = f(x)$  ako vrijedi

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

i

$$l = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx).$$

Ako gornja dva limesa postoje, ali je  $k = 0$ , asimptota lijevo nije kosa, nego horizontalna ( $y = l$ ).

**Primjer 141.** Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2+1}{x-5}$ . Tada je

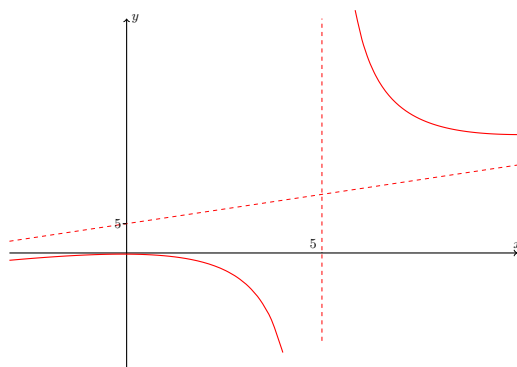
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-5x} = 1,$$

dakle  $k = 1$ . Sad možemo dalje računati

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2+1}{x-5} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x+1}{x-5} = 5,$$

tj.  $l = 5$ . Stoga je pravac  $y = x + 5$  kosa asimptota (i lijevo i desno) za funkciju  $f$ , što je ilustrirano slikom 4.5.





Slika 4.5: Primjer funkcije  $(f(x) = \frac{x^2+1}{x-5})$  s kosom asimptotom  $(y = x + 5)$ .

Napomenimo da se može desiti da se može izračunati  $k$ , ali ne može izračunati  $l$ . U tom slučaju funkcija naravno nema kosu asimptotu.

Za kraj priče o ponašanju funkcija u beskonačnostima, zaključimo: horizontalne i kose asimptote, ako postoje, omogućuju aproksimaciju funkcije konstantnom odnosno afinom funkcijom. Na jednoj (lijevoj ili desnoj) strani funkcija može imati najviše jednu asimptotu, dakle ne može imati istovremeno horizontalnu i kosu. S druge strane, lijeva i desna asimptota ne moraju se poklapati te imamo sljedeće moguće kombinacije:

- Funkcija nema ni horizontalnih ni kosih asimptota;
- Funkcija ima samo jednu horizontalnu ili kosu asimptotu za obje strane;
- Funkcija ima samo jednu horizontalnu ili kosu asimptotu, ali samo lijevo ili samo desno, a na drugoj strani nema asimptota;
- Funkcija ima dvije asimptote, jednu lijevu i jednu desnu, a svaka od njih je ili horizontalna ili kosa.

Ponovimo još jednom: horizontalne i kose asimptote nema smisla tražiti ako funkcija nije definirana za proizvoljno male vrijednosti varijable (tada nema smisla tražiti lijevu) odnosno za proizvoljno velike vrijednosti varijable (tada nema smisla tražiti desnu). Specijalno, imamo dva slučaja najčešća u primjenama,:

- ako je domena funkcije segment, ona ne može imati ni horizontalnih ni kosih asimptota;
- ako je funkcija definirana na  $\langle 0, +\infty \rangle$  ili na  $[0, +\infty)$ , onda može imati samo desnu horizontalnu ili kosu asimptotu.



**Ponovimo bitno...** Pravac  $y = kx + l$  je kosa asimptota funkcije  $f$  ako što je  $x$  veći i/ili manji, to je  $f(x) - kx$  bliži broju  $l$ . Postojanje kose asimptote lijevo odnosno desno znači da se za jako male odnosno velike vrijednosti  $x$  funkcija  $f$  može aproksimirati afinom funkcijom  $y = kx + l$ . 

### 4.1.5 L'Hôpitalovo pravilo

Čest problem pri izračunavanju limesa su tzv. neodređeni izrazi  $\frac{0}{0}$  i  $\frac{\infty}{\infty}$ . Već smo rekli da se ti izrazi nazivaju neodređenima jer daju različite konačne rezultate ovisno o funkcijama zbog kojih su se pojavili te nije moguće direktno zaključiti koji je konačni rezultat takvih limesa. U neodređene izraze spadaju i  $0 \cdot \infty$ ,  $+\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $0^\infty$  i još neki, no većina se uz određene manipulacije mogu svesti na tipove  $\frac{0}{0}$  i  $\frac{\infty}{\infty}$ . Iako se u nekim slučajevima, primjerice kod računanja limesa racionalnih funkcija, dosta lako „ispetljati” iz problema i izračunati takve limese do kraja, ipak se često radi o dosta mukotrpnim računima koji se obično mogu izbjeći korištenjem L'Hôpitalovog pravila<sup>6</sup>

**Teorem 11 (L'Hôpitalovo pravilo).** *Neka su oba limesa  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$  jednaka 0 ili su pak oba beskonačna (pri čemu je  $c \in \mathbb{R}$  ili  $c = \pm\infty$ ). Ako postoji limes  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  ili ako je jednak  $\pm\infty$ , te ako  $g'(x) \neq 0$  za  $x$ -eve iz nekog intervala oko  $c$ ,<sup>7</sup> onda vrijedi*

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Primjer 142.** Limes  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{x - 1}$  je tipa  $\frac{0}{0}$ . Primjena L'Hôpitalova pravila daje:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2.$$

U teoremu je bitan uvjet „ako postoji”. Naime, postoje situacije kad limes  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  ne postoji, ali ipak postoji limes  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

<sup>6</sup>Pravilo je nazvano po francuskom matematičaru Guillaume François Antoine Marquis de l'Hôpitalu (1661.–1704.), autoru prvog udžbenika diferencijalnog računa, u kojem se nalazi i ovo pravilo. Pravilo otkrio je zapravo otkrio švicarski matematičar Johann Bernoulli (1667.–1748.). Prezime l'Hôpital se često piše i l'Hospital, kako se pisalo u 17. i 18. stoljeću, te se pravilo nalazi i pod nazivom l'Hospitalovo pravilo.

<sup>7</sup>Funkcija  $g$  nije konstantna na nekom intervalu oko  $c$ .

**Primjer 143.** Pokušaj izračunavanja limesa

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

(koji je tipa  $\frac{\infty}{\infty}$ ) l'Hôpitalovim pravilom daje:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \cos x).$$

Posljednji limes ne postoji iako postoji  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x}$  i jednak je 1 (jer za jako velike  $x$  dodavanje sinusa - koji je broj između  $-1$  i  $1$  - nema bitan utjecaj na limes pa vrijedi  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1$ ).

Također, treba paziti na to da se l'Hôpitalovo pravilo smije primjenjivati samo na limese kvocijenata funkcija koji su tipa  $\frac{0}{0}$  ili  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Primjer 144.** Imamo  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 5} = -\frac{1}{4}$  jer je 1 u prirodnoj domeni funkcije kojoj računamo limes. Da smo išli primijeniti l'Hôpitalovo pravilo bez provjere uvjeta da se radi o limesu tipa  $\frac{0}{0}$  ili  $\frac{\infty}{\infty}$  (a ovdje to nije slučaj) dobili bismo krivi rezultat  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$ .

Pomoću l'Hôpitalova pravila možemo lako pokazati da eksponencijalna funkcija s bazom  $a > 1$  brže raste od svake potencije tj. da vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1). \quad (4.5)$$

**Primjer 145.** Molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena opisan je formulom

$$C_{V,m} = \frac{5}{2}R + \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{(e^{h\nu/(kT)} - 1)^2}.$$

Pritom su  $R$ ,  $h$ ,  $k$  i  $\nu$  konstante. Želimo li opisati molarni toplinski kapacitet pri vrlo niskim temperaturama, treba izračunati  $\lim_{\frac{T}{K} \rightarrow 0+} C_{V,m}$  tj.

$$\lim_{\frac{T}{K} \rightarrow 0+} \left( \frac{5}{2}R + \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{(e^{h\nu/(kT)} - 1)^2} \right) =$$

$$\frac{5}{2}R + \lim_{\frac{T}{K} \rightarrow 0+} \left( \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{(e^{h\nu/(kT)} - 1)^2} \right) = \diamond.$$

Radi lakšeg računanja supstituirajmo  $x = \frac{h\nu}{kT}$ . Ako  $\frac{T}{K} \rightarrow 0+$ , onda  $x \rightarrow +\infty$ . Stoga je

$$\begin{aligned} \diamond &= \frac{5}{2}R + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = (L'Hôpital) = \frac{5}{2}R + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + x^2)e^x}{2e^x(e^x - 1)} = \\ &= \frac{5}{2}R + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + x^2}{2e^x - 2} = (L'Hôpital) = \frac{5}{2}R + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 2x}{2e^x} = \\ &= (L'Hôpital) = \frac{5}{2}R + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2e^x} = \frac{5}{2}R + 0 = \frac{5}{2}R. \end{aligned}$$

Dakle, pri vrlo niskim temperaturama molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena iznosi približno  $\frac{5}{2}R$ .

**Zadatak 31.** Kakav je molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena za jako visoke temperature?

**Zadatak 32.** Ovisnost koncentracije  $c$  produkta  $P$  reakcije drugog reda (parcijalno prvog obzirom  $i$  na  $A$  i na  $B$ ) stehiometrije  $A + B \rightarrow P$  o vremenu dana je formulom

$$c(t) = a b \frac{1 - \exp((b - a) k t)}{a - b \exp((b - a) k t)}.$$

Pritom je  $a$  početna koncentracija reaktanta  $A$ ,  $b$  je početna koncentracija reaktanta  $B$ ,  $a k$  je koeficijent brzine reakcije (ima pozitivan iznos i jedinicu  $L \text{ mol s}^{-1}$ ). Odredite ravnotežnu koncentraciju  $c_\infty$  produkta  $P$ , tj. koncentraciju kad „reakcija ode do kraja”. Uputa: Odvojeno promatrajte slučajeve  $a > b$ ,  $a = b$  i  $a < b$ .



**Ponovimo bitno...** L'Hôpitalovo pravilo često pomaže kod traženja limesa kvocijenta dviju funkcija, ukoliko je taj limes tipa  $\frac{0}{0}$  ili  $\frac{\infty}{\infty}$ . Prema tom pravilu, ako umjesto početnog limesa izračunamo limes kvocijenta derivacija polaznih funkcija, taj limes jednak je početnom limesu. 🦆🦆🦆

## 4.2 Neprekidnost funkcija

Na početku ovog poglavlja, gledajući sliku 4.1, vidjeli smo da kad je točka  $c$  u kojoj tražimo limes funkcije  $f$  u domeni te funkcije, taj limes u  $c$  može i ne mora biti jednak vrijednosti funkcije u  $c$ . Tako smo sa slike 4.1 utvrdili da

je  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -1 \neq 3 = f(-1)$  te da  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  ne postoji, dok je  $f(4) = 4$ . S druge strane,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -4 = f(0)$ . Posljednja situacija je češća, a i „prirodnija“ — sa slike vidimo da pri crtanju grafa prolaskom kroz točku s apscisom 0 ne moramo podići ruku s papira odnosno da graf „prirodno“ prolazi kroz odgovarajuću točku. To svojstvo zove se neprekidnost u točki. Preciznije:

**Definicija 25 (Neprekidnost).** Funkcija  $f$  je neprekidna u točki  $c$  svoje domene ako vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c). \quad (4.6)$$

Ako je  $c$  u domeni od  $f$  i  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$ , onda kažemo da  $f$  ima prekid u  $c$  ( $c$  je točka prekida funkcije  $f$ ).

Funkciju koja je neprekidna u svakoj točki svoje domene jednostavno zovemo neprekidnom funkcijom.

Ako je funkcija  $f$  definirana na uniji intervala, od kojih su neki zatvoreni ili poluotvoreni, gornja definicija primjenjuje se samo s jednostranim limesom.<sup>8</sup>

**Primjer 146.** Neka je  $f(x) = \sqrt{x-2}$ . Prirodna domena te funkcije je  $[2, +\infty)$ . Ovdje nema smisla govoriti o  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  jer funkcija nije definirana lijevo od 2. No,

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \sqrt{2-2} = 0 = f(2),$$

pa je funkcija  $f$  neprekidna u točki 2.

Kao što vidimo iz definicije, ako u  $c$  imamo prekid funkcije  $f$ , onda je  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) - f(c) \neq 0$ , pa u definiciji derivacije brojnik ne teži u 0 (vidi str. 145). Stoga funkcije ne posjeduju derivacije u svojim točkama prekida. Time smo konačno do kraja argumentirali da  $f'(c)$  ne postoji točno u slučajevima koje smo naveli na str. 100. Vidimo dakle da bez neprekidnosti nema derivabilnosti, odnosno vrijedi:

**Teorem 12.** Ako funkcija ima derivaciju u nekoj točki, onda je ona i neprekidna u toj točki.

Obrat ne mora vrijediti, tj. postoje neprekidne funkcije koje nemaju derivaciju u nekoj točki. Najjednostavniji takav primjer je funkcija apsolutne vrijednosti, a malo kompliciraniji je primjer 149.

<sup>8</sup>Razlog je u tome što se neprekidnost funkcije na segmentu definira preko postojanja neprekidnog proširenja na neki veći otvoreni interval.

Primijetimo da se pitanje (ne)prekidnosti funkcije odnosi samo na elemente domene. Primjerice, funkcija sa slike 4.1 nema prekid u točki 1 jer tamo nije definirana.

**Primjer 147.** Funkcija  $f(x) = \frac{1}{x}$  nema prekid u 0 iako pri crtanju grafa kod apscise 0 moramo podići olovku s papira. Naime, 0 nije u domeni pa je besmisleno pitanje ima li ili nema  $f$  prekid u 0.

S obzirom na definiciju, postoje dva moguća uzroka prekida funkcije  $f$  u nekoj točki  $c$  iz domene:

- Ne postoji limes  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  pa ne može biti jednak  $f(c)$ . Primjer takvog prekida je u točki  $c = 4$  za funkciju čiji graf je prikazan slikom 4.1. Ako pritom postoje jednostrani limesi  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ , onda govorimo o **prekidu prve vrste (skoku)**, a ako bar jedan od ta dva jednostrana limesa ne postoji (ili je beskonačan), govorimo o **prekidu druge vrste (bitnom prekidu)**.
- Limes  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  postoji, ali je različit od  $f(c)$ . Primjer takvog prekida imamo u točki  $c = -3$  za funkciju čiji graf je prikazan slikom ???. U ovakvom slučaju govorimo o **uklonjivom prekidu** (jer bismo promjenom definicije  $f(c)$  iz trenutne vrijednosti u vrijednost  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  dobili funkciju neprekidnu u  $c$ ).

Važno i korisno je zapamtiti:

**Teorem 13.** Sve elementarne funkcije su neprekidne u svim točkama svojih domena.

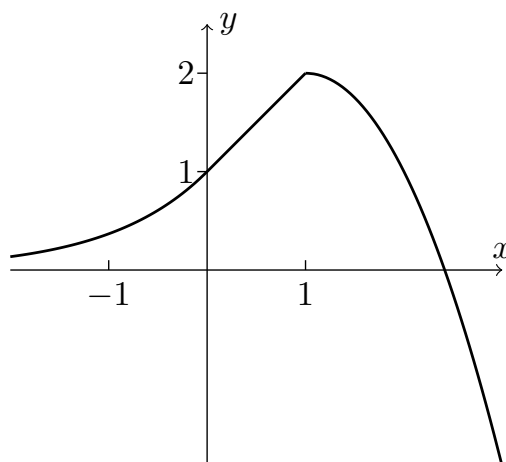
**Primjer 148.** Funkcija iz primjera 61 ima prekid samo u 0, kako je vidljivo i na slici 2.41. Naime, za  $x < 0$  njeno pravilo je elementarna funkcija, a tako i za  $x > 0$ , dakle je jedina moguća točka prekida 0.

Vrijednost funkcije u 0 je  $f(0) = e^0 = 1$ . Odredit ćemo lijevi i desni limes u 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

(za  $x < 0$  pravilo je  $f(x) = e^x$  pa kad računamo limes slijeva gledamo limes od  $e^x$ , dok je za  $x > 0$  pravilo  $f(x) = x^2$  pa za limes zdesna gledamo limes od  $x^2$ ). Vidimo da se lijevi i desni limes u 0 razlikuju, a 0 je u domeni, pa funkcija ima prekid (skok) u 0.



Slika 4.6: Primjer funkcije zadane po dijelovima koja je neprekidna i svuda osim u jednoj točki derivabilna.

Funkcija zadana po dijelovima može biti neprekidna, kao što je to primjerice funkcija apsolutne vrijednosti. Štoviše, funkcija zadana po dijelovima može biti i derivabilna.

**Primjer 149.** Drugi primjer neprekidne funkcije zadane po dijelovima je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana s

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - (x - 1)^2, & x > 1. \end{cases}$$

I za  $c = 0$  i za  $c = 1$  podudaraju se  $f(c)$ ,  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$  (provjerite to sami), dakle je funkcija neprekidna, što je vidljivo i iz njenog grafa na slici 4.6.

No, u 0 je ova funkcija i derivabilna, iako se tamo mijenja pravilo:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1) - 1}{x} = 1,$$

dakle je  $f'(0) = 1$ . U 1 funkcija nije derivabilna – provjerite to sami.

Posljedica svojstava limesa je da se neprekidne funkcije „pristojno” ponašaju kad ih kombiniramo. Preciznije:

**Teorem 14.** *Ako su funkcije  $f$  i  $g$  neprekidne u točki  $c$ , onda su i njihov zbroj, razlika i produkt funkcije neprekidne u  $c$ . Ako je uz to i  $g(c) \neq 0$ , onda je i kvocijent  $f/g$  također funkcija neprekidna u točki  $c$ .*

*Ako je funkcija  $f$  neprekidna u točki  $c$  i funkcija  $g$  neprekidna u točki  $f(c)$ , onda je i kompozicija  $g \circ f$  neprekidna u  $c$ .*

Najvažniji teorem o neprekidnim realnim funkcijama jedne varijable je **Bolzano-Weierstrašov teorem 5**, koji nam je bio temelj postupka za određivanje globalnih ekstrema za neprekidne funkcije zadane na segmentu: Neprekidna funkcija kojoj je domena segment  $[a, b]$  postiže svoj globalni minimum i globalni maksimum i sve međuvrijednosti između minimuma i maksimuma, a jedine moguće točke promjene predznaka funkcije su njezine nultočke.

Velika većina funkcija koje se pojavljuju u primjenama matematike u kemiji i fizici su neprekidne. Ipak, postoje i neke iznimke. One se najčešće pojavljuju u obliku skokova, tj. prekida prve vrste, jer se obično radi o nagloj promjeni vrijednosti neke fizikalne ili kemijske veličine. Najtipičnije točke prekida imamo na granicama faza odnosno pri faznoj tranziciji.

**Primjer 150.** *Promotrimo ovisnost gustoće  $\rho$  neke čiste tvari o temperaturi  $T$  (pri konstantnom tlaku). Tada  $\rho$  ima dvije točke prekida (skoka), i to pri temperaturama ledišta i vrelišta ( $T_f$  i  $T_b$ ). Skok (pad gustoće) pri  $T_f$  (razlika lijevog i desnog limesa od  $\rho$  u  $T_f$ ) je u pravilu manji od onog pri  $T_b$ . Unutar pojedine faze se gustoća mijenja neprekidno u ovisnosti o  $T$ .*

*Primijetimo ovdje da zbog mogućnosti supostojanja dviju faza ovdje nemamo pravu funkciju — temperaturama  $T_b$  i  $T_f$  pridružene su dvije gustoće koje odgovaraju dvjema supostojećima fazama promatrane tvari pri toj temperaturi.*

Gotovo sve funkcije koje susrećemo u primjenama su na većem dijelu domene neprekidne i imaju najviše konačno mnogo prekida. Takve funkcije zovemo **po dijelovima neprekidne funkcije**.



**Ponovimo bitno...** Funkcija je neprekidna u nekoj točki svoje domene ako je u toj točki svejedno računamo li limes ili ju uvrstimo u funkciju. U suprotnom govorimo o točki prekida. Nema smisla reći da je  $c$  točka prekida funkcije  $f$  (niti da je u  $c$  funkcija  $f$  neprekidna) ako  $c$  nije u domeni od  $f$ . Neprekidne funkcije su one koje su neprekidne u svim točkama domene. U primjenama najčešća vrsta prekida je skok, tj. prekid kod kojeg lijevi i desni limes u točki prekida postoje, ali su različiti. Svaka derivabilna funkcija je neprekidna, ali obrat ne mora vrijediti. 🦆🦆🦆





# Poglavlje 5

## Integralni račun za realne funkcije jedne varijable

### 5.1 Neodređeni i određeni integrali

Pogledajmo sljedeća dva naizgled vrlo različita pitanja:

- Koja funkcija derivirana daje funkciju  $F(x) = x^2$ ?
- Kolika je površina omeđena krivuljom  $y = x^2$  i pravcima  $y = 0$ ,  $x = -2$  i  $x = 2$ ?

Odgovor na prvo pitanje je lako pogoditi: Tražena funkcija je primjerice  $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ . Dakle, prvo pitanje se tiče nalaženja funkcije  $f$  ako joj znamo derivaciju.

**Definicija 26** (Antiderivacija (primitivna funkcija)). *Antiderivacija (primitivna funkcija) zadane funkcije  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  (gdje je  $I$  otvoren interval) je svaka funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sa svojstvom  $f'(x) = F(x)$  za sve  $x \in I$ .*

**Primjer 151.** *Funkcija  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana s  $F(x) = 3x^2$  kao antiderivaciju ima npr.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ . No, uočimo da su primjerice i  $f_2(x) = x^3 - 10$  i  $f_3(x) = x^3 + \pi$  također antiderivacije od  $F$ .*

Kao i u primjeru, tako i općenito vrijedi: Antiderivacija, ako postoji, nikad nije jedinstvena. To je lako dokazati. Naime, ako je  $f$  antiderivacija od  $F$ , tj.  $f'(x) = F(x)$  za sve  $x \in I$ , označimo s  $f_C$  funkciju definiranu s  $f_C(x) = f(x) + C$ . Zbog aditivnosti deriviranja za sve konstante  $C \in \mathbb{R}$  (njih beskonačno mnogo!) vrijedi

$$(f_C)'(x) = (f(x) + C)' = f'(x) + C' = F(x)$$

za sve  $x \in I$ , dakle je i  $f_C$  antiderivacija od  $F$ . No, vrijedi i više od upravo dokazanog:

**Teorem 15.** *Ako funkcija  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo. Ako je  $f$  jedna antiderivacija od  $F$ , onda su sve antiderivacije od  $F$  dane formulom  $f_C(x) = f(x) + C$ , gdje je  $C \in \mathbb{R}$  proizvoljna konstanta.*

Nije teško dokazati ni drugi dio iskaza gornjeg teorema. Taj dio dokaza se oslanja na jednu posljedicu Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti.<sup>1</sup> Ako je derivacija neke funkcije jednaka nuli na nekom intervalu, ta je funkcija na tom intervalu konstantna. Sad imamo sljedeći tok zaključivanja: Tvrdimo da  $F$  nema drugih antiderivacija osim onih oblika  $f_C$ . Neka je onda  $g$  bilo koja druga antiderivacija od  $F$  (dakle, znamo  $f' = g' = F$  i  $f, g$  i  $F$  su definirane na istom intervalu  $I$ ). Tvrdimo da je  $g$  oblika  $f_C$  za neko  $C$ . Pogledajmo funkciju  $g - f$ . Njena derivacija za  $x \in I$  je dana s  $(g - f)'(x) = g'(x) - f'(x) = F(x) - F(x) = 0$ . Prema gore spomenutom, zaključujemo da je  $g - f$  konstantna funkcija na  $I$ , tj. da je  $(g - f)(x) = C$  za sve  $x \in I$ . Dobili smo što smo htjeli:  $g(x) = f(x) + C$  za sve  $x \in I$ , i dokaz gornjeg teorema je završen.

Ovdje je bitno upozoriti na važnost jednog detalja iz definicije antiderivacije. U definiciji se zahtijeva da su funkcija i njena antiderivacija zadane na istom otvorenom intervalu  $I$ . Uvjet otvorenosti intervala je posljedica potrebe za deriviranjem antiderivacije (kako znamo, derivacije nisu definirane u „zatvorenim rubovima” intervala). No, ovdje je bitniji naglasak na *istom*, i to jednom, intervalu.

**Primjer 152.** *Uzmemo li funkciju  $F(x) = \frac{1}{x}$ , lako bismo pogodili da su njene antiderivacije oblika  $f_C(x) = \ln x + C$ . No,  $\ln$  je definiran na  $I = \langle 0, +\infty \rangle$ , a  $F$  za prirodnu domenu ima  $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$ !*

*Ovdje se ne radi samo o tome da želimo da po mogućnosti  $f$  i  $F$  imaju istu domenu (izgleda kao da smo pri antideriviranju „izgubili” pola domene). Da smo  $F$  gledali kao funkciju zadanu na  $I$ , onda bi  $f_C$  stvarno bile sve njene antiderivacije.*

*Budući da je  $F$  zadana na uniji dva intervala, ona na svakom od njih ima drugačiju formulu antiderivacije. Na  $I' = \langle -\infty, 0 \rangle$  jedna antiderivacija od  $F$  bila bi zadana formulom  $g(x) = \ln(-x)$  jer je  $g'(x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$  za  $x \in I'$ . Dakle, možemo definirati da su antiderivacije od  $F$  (na njezinoj prirodnoj domeni) dane s*

$$f_C(x) = \begin{cases} C + \ln x, & x > 0 \\ C + \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Dokažite tu tvrdnju!

ili kraće zapisano, antiderivacije su dane s

$$f_C(x) = C + \ln|x|, \quad x \in I' \cup I = \mathbb{R}.$$

Fizikalno interpretirano, postoji beskonačno mnogo funkcija pozicije u ovisnosti o vremenu ako nam je jedini poznati podatak o gibanju iznos brzine u svakom trenutku—to je razlog zašto se u takvim fizikalnim primjenama obično zadaje i početni uvjet koji omogućuje odabir točno jedne od svih antiderivacija.

**Primjer 153.** Ako je brzina čestice pri slobodnom padu dana s  $v_z(t) = -gt$ , onda se lako vidi da je pozicija opisana sa  $z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C$  za neku konstantu  $C$ . Ukoliko znamo da je početna pozicija (u trenutku  $t = 0$ ) bila  $z(0) = h$ , onda mora biti  $z(0) = 0 + C = C = h$  pa je antiderivacija (funkcija pozicije) koja zadovoljava taj početni uvjet jedinstveno određena sa  $z(t) = h - \frac{g}{2}t^2$ .

Sad možemo definirati prvi podvrstu integrala.

**Definicija 27 (Neodređeni integral).** Neodređeni integral funkcije  $F$  je skup svih njenih antiderivacija. Oznaka neodređenog integrala funkcije  $F$ , ako joj je varijabla označena s  $x$ , je

$$\int F(x) \, dx$$

Funkcija  $F$  zove se podintegralna funkcija.

Temeljem gornjeg teorema i definicije, trebali bismo pisati:  $\int F(x) \, dx = \{f_C : C \in \mathbb{R}\}$ . Iz praktičnih razloga uobičajen je jednostavniji zapis:

$$\int F(x) \, dx = f(x) + C.$$

**Primjer 154.** Pišemo npr.

$$\int 3x^2 \, dx = x^3 + C.$$

Tablicu neodređenih integrala sad možemo shvatiti kao tablicu derivacija

sa zamijenjenim stupcima, uz dodavanje **konstante integracije**  $C$ .

| $F(x)$                     | $\int F(x) dx$                      |
|----------------------------|-------------------------------------|
| $K$                        | $Kx + C$                            |
| $x^\alpha, \alpha \neq -1$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ |
| $\frac{1}{x}$              | $\ln x  + C$                        |
| $a^x$                      | $\frac{a^x}{\ln a} + C$             |
| $\sin x$                   | $-\cos x + C$                       |
| $\cos x$                   | $\sin x + C$                        |
| $\frac{1}{1+x^2}$          | $\arctg x + C$                      |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$   | $\arcsin x + C$                     |

**Napomena 12.** U slučaju neodređenog integrala konstantu integracije je nužno pisati. U suprotnom, ne samo da se ne poštuje smisao neodređenog integrala kao skupa svih antiderivacija, nego se mogu dobiti i krivi rezultati. Primjerice, ako je ubrzanje u svakom trenutku dano s  $a_z(t) = -g$ , onda je brzina opisana kao neodređeni integral  $v_z(t) = \int a_z(t) dt = -gt + C$ . Ako bismo ovdje izostavili konstantu integracije dobili bismo  $v_z(t) = -gt$ , što je točno samo ako je početna brzina nula.

Sjetimo li se da je deriviranje imalo svojstvo linearnosti (derivacija zbroja funkcija je zbroj derivacija i derivacija konstante pomnožene s funkcijom je ta konstanta pomnožena s derivacijom te funkcije) te uzeši u obzir da je neodređeni integral definiran preko antiderivacije, lako se vidi da vrijedi

**Teorem 16 (Linearnost neodređenog integrala).** Neka su funkcije  $F$  i  $G$  zadane na istom intervalu te  $K$  neka konstanta. Tada vrijedi:

$$\int (F(x) + G(x)) dx = \int F(x) dx + \int G(x) dx$$

(aditivnost integriranja) i

$$\int KF(x) dx = K \int F(x) dx$$

(homogenost integriranja).

Pod tabličnim integriranjem podrazumijeva se integriranje temeljem osnovne tablice integrala uz eventualno korištenje svojstva linearnosti i transformacija podintegralne funkcije formulama iz elementarnije matematike.

**Primjer 155.** Odredimo  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$ . Znamo da je  $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$  pa imamo

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C. \end{aligned}$$

**Napomena 13.** Iz prethodnog je vidljivo da su u određenom smislu deriviranje i integriranje međusobno inverzne operacije. Preciznije, vrijedi

$$\left( \int F(x) dx \right)' = F(x),$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C.$$

Uz oznaku deriviranja  $\frac{d}{dx}$  gornje formule poprimaju još lakše pamtljive oblike

$$\frac{d}{dx} \left( \int F(x) dx \right) = F(x),$$

$$\int \frac{df}{dx} dx = f(x) + C.$$

Posvetimo se sad drugom od pitanja s početka ovog poglavlja: Kolika je površina omeđena krivuljom  $y = x^2$  i pravcima  $y = 0$ ,  $x = -2$  i  $x = 2$  (slika 5.1)? To pitanje je primjer tzv. **problema površine**:

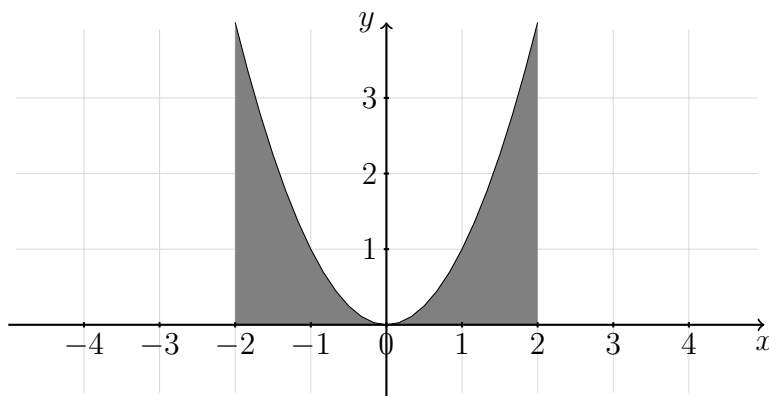
Kolika je površina koju s  $x$ -osi zatvara graf funkcije  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , a koja je omeđena vertikalama  $x = a$  i  $x = b$ ?

Uočimo da je problem površine lako rješiv za affine funkcije.

**Zadatak 33.** Koju površinu s  $x$ -osi zatvara graf funkcije  $F(x) = 3 - 2x$ , a koja je omeđena vertikalama  $x = -1$  i  $x = 5$ ?

Ako  $f$  nije afina, naizgled nema jednostavnog načina za izračunavanje tražene površine. Prije nego vidimo kako tada pristupiti problemu površine, pogledajmo još jedan primjer zadatka s istim tipom rješenja, ali ovaj put s fizikalnim i kemijskim kontekstom.

**Primjer 156.** Ravna cijev, duljine  $l$  i površine presjeka  $A$ , napunjena je nekom otopinom poznate množinske koncentracije  $c$ . Kolika je množina otopljene tvari koja se nalazi u cijevi?



Slika 5.1: Problem površine.

Ako bi otopina u cijevi posvuda imala jednaku koncentraciju, zadatak je elementaran:  $n = cV = cAl$ .

No, što ako  $c$  varira ovisno o poziciji uzduž cijevi? (Napomenimo ovdje da bi se mogao razmatrati i problem slučaja kad  $c$  varira ne samo uzdužno, nego u sva tri prostorna smjera, no to bi bio problem vezan za višestruke integrale, o kojima će biti riječi u poglavlju ??).

Ovdje dakle uzimamo da je za poziciju  $0 \leq x \leq l$  (gledanu od jednog kraja cijevi) koncentracija otopljene tvari jednaka  $c(x)$ . Kako sad dobiti  $n$ ?

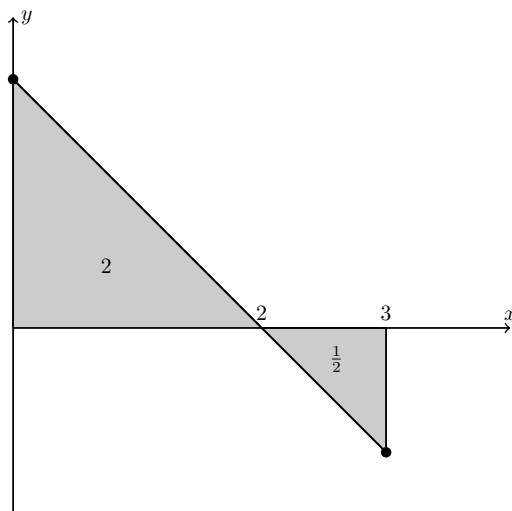
Rješenje problema površine naziva se **određenim integralom**, uz dogovor da se dijelovi površine koji se nalaze ispod  $x$ -osi pribrajaju s negativnim predznakom. Uvedimo prvo oznaku određenog integrala. Ona je slična oznaci neodređenog integrala, uz isticanje raspona nezavisne varijable na koji se odnosi integral:

$$\int_a^b F(x) dx$$

je određeni integral podintegralne funkcije  $F$  od  $a$  do  $b$ , dakle za  $x \in [a, b]$ . Segment  $[a, b]$  u ovom slučaju nazivamo i područjem integriranja, a njegov smisao je da za integriranje  $F$  ovdje zamišljamo da  $x$  prolazi sve vrijednosti od  $a$  do  $b$ .

Za *neprekidne* funkcije  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  s  $P^+$  označimo ukupnu površinu svih dijelova lika omeđenog s osi apscisa, vertikalama  $x = a$  i  $x = b$  te grafom  $y = F(x)$  koji se nalaze *iznad* osi apscisa, a s  $P^-$  ukupnu površinu onih koji se nalaze *ispod* osi apscisa. Tada je određeni integral od  $F$

$$\int_a^b F(x) dx = P^+ - P^-.$$



Slika 5.2: Razlika između određenog integrala i površine.

može se definirati kao površina omeđena s  $x$ -osi, pravcima  $x = a$  i  $x = b$  te grafom funkcije  $F$ . Ova definicija je dovoljna za većinu primjena integrala u kemiji i fizici, ali (poput „definicija” derivacije na početku poglavlja 3.1) nije sasvim egzaktna i uz to ima isti problem kao „definicija” derivacije kao koeficijenta smjera tangente: kaže nam smisao dobivenog rezultata, ali u općem slučaju ne pomaže za njegovo izračunavanje.

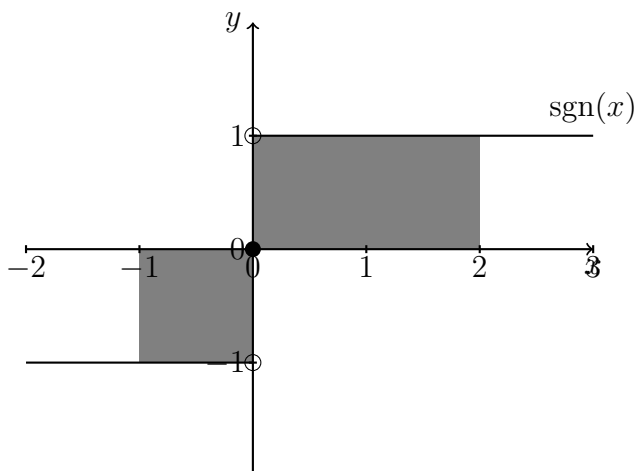
**Primjer 157.** Za funkciju zadanu s  $F(x) = 2 - x$  na  $[0, 3]$  površina omeđena njezinim grafom, vertikalama  $x = 0$  i  $x = 3$  te s osi apscisa iznosi  $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$  (vidi sliku 5.2), ali je  $\int_0^3 F(x) dx = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ .

Glavni nedostaci gornje „definicije” određenog integrala su da je ovisna o interpretaciji grafa funkcije u Kartezijevom koordinatnom sustavu, a uz to se određeni integrali mogu definirati i za mnoge funkcije s prekidima. Ako podintegralna funkcija ima samo konačno mnogo prekida unutar područja integriranja (od kojih nijedan nije bitni prekid), a takve su praktički sve funkcije u primjenama, lako je popraviti tu „definiciju”. Takve funkcije nazivamo **po dijelovima neprekidne funkcije**. Ako  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  po dijelovima neprekidna te ako su joj točke prekida  $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ , onda je

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^{c_1} F(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} F(x) dx + \dots + \int_{c_m}^b F(x) dx. \quad (5.1)$$

**Primjer 158.** Funkcija *signum*, oznaka  $\text{sgn}$ , je neelementarna funkcija definirana kao 1 za pozitivne vrijednosti nezavisne varijable,  $-1$  za negativne,





Slika 5.3: Primjer određenog integrala funkcije s konačno mnogo prekida

$a$  u 0 iznosi 0. Ona ima prekid u 0. Njen graf možete vidjeti na slici 5.3, a iz njega lako zaključujemo (rastavljanjem površine vertikalom  $x = 0$ ) da je

$$\int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x \, dx = -1 + 2 = 1.$$

**Zadatak 34.** Izračunajte

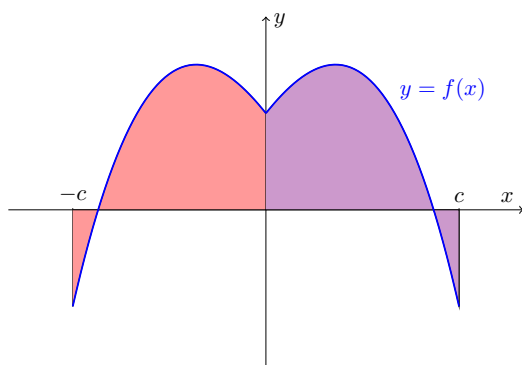
$$\int_{-2}^3 F(x) dx$$

ako je

$$F(x) = \begin{cases} 3 - 2x & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Prije nego pogledamo kako precizirati definiciju određenog integrala, osvrnimo se na osnovna **svojstva određenog integrala** koja su vidljiva već iz gornje neprecizne definicije (a mogu se dokazati i temeljem niže dane precizne):

- $\int_a^a F(x) dx = 0$  za svaku funkciju  $f$  definiranu u  $a$  (jer površina dužine iznosi 0);
- $\int_a^b F(x) dx = \int_a^c F(x) dx + \int_c^b F(x) dx$  za  $c \in [a, b]$  (površinu možemo razbiti na dva dijela vertikalom  $x = c$ , što nam u konačnici omogućuje



Slika 5.4: Za parnu  $F$  je  $\int_{-c}^c F(x) dx = 2 \int_0^c F(x) dx$ .

da za po dijelovima neprekidne funkcije njihove integrale računamo kako je opisano formulom 5.1);

- ne sasvim očito, ali također direktno iz definicije<sup>2</sup> slijedi i

$$\int_a^b F(x) dx = - \int_b^a F(x) dx$$

(zamjena granica integrala mijenja predznak određenog integrala).

Također, ako je  $F$  integrabilna na simetričnom segmentu  $[-c, c]$  i parna je ili neparna, imamo još dva korisna svojstva:

**Propozicija 2.** *Neka je  $F : [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna na  $[-c, c]$ . Ako je  $F$  parna, onda je*

$$\int_{-c}^c F(x) dx = 2 \int_0^c F(x) dx,$$

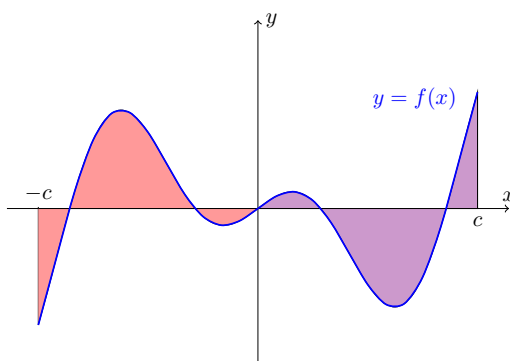
*a ako je  $F$  neparna, onda je*

$$\int_{-c}^c F(x) dx = 0.$$

**Primjer 159.** *Imamo  $\int_{-5}^5 xe^{-x^2} = 0$  i  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x = 2 \int_0^{\pi} \cos x$ .*

Dokaz nije težak (integral se rastavi na integrale od  $-c$  do 0 i 0 do  $c$  i u lijevom zamijeni  $x$  s  $-x$  te naravno koriste definicije parne i neparne funkcije), no umjesto preciznog dokaza, dajemo grafički dokaz uz interpretaciju određenog integrala kao površine, vidljiv na slikama 5.4 i 5.5.

<sup>2</sup>Radi se o sljedećem: U definiciji smo od  $a$  do  $b$  išli udesno, tj. svaki sljedeći  $x_i$  bio je veći, odnosno  $\Delta x$  je pozitivan. Ako pak trebamo ići od  $b$  do  $a$  moramo ići ulijevo, tj. dodavati negativan  $\Delta x$ .



Slika 5.5: Za neparnu  $F$  je  $\int_{-c}^c F(x) dx = 0$ .

Kao što smo rekli, opisana „definicija“ određenog integrala nije precizna. Također, željeli bismo određeni integral funkcije  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definirati (odnosno, riješiti problem površine) za što širu klasu funkcija. Prava definicija temelji se na Arhimedovoj<sup>3</sup> ideji određivanja površina likova zakrivljenog ruba rastavljanjem na sve više manjih likova jednostavnijeg oblika.

Osnovni uvjet da bi se određeni integral funkcije  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mogao definirati je da je ona **ograničena**, tj. da postoje realni brojevi  $m < M$  takvi da je

$$m \leq F(x) \leq M$$

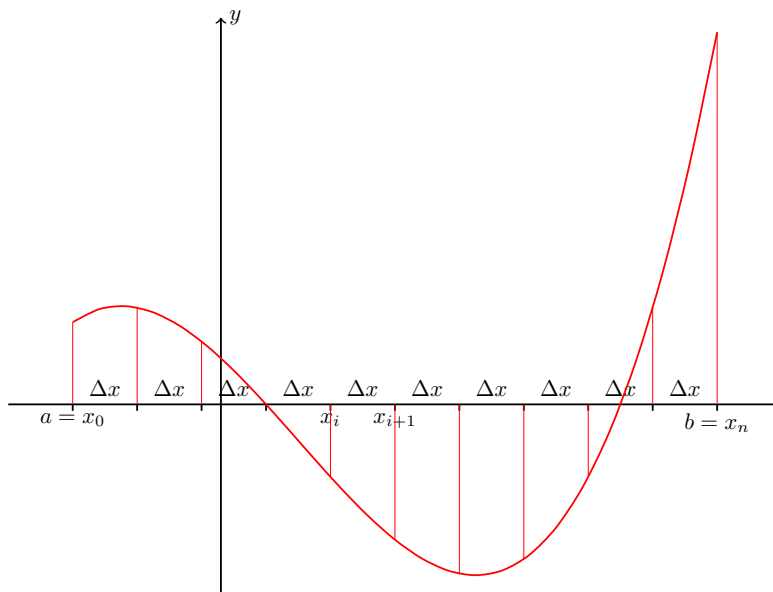
za sve  $x \in [a, b]$ . Interpretirano grafički to znači da se cijeli graf funkcije  $F$  nalazi unutar nekog pravokutnika. Primijetimo da su neprekidne funkcije i po dijelovima neprekidne funkcije zbog Bolzano-Weierstraßovog teorema sigurno ograničene.

Opisanu „površinu“ (dakle, površinu omeđenu s grafom funkcije  $F$ , vertikalama  $x = a$  i  $x = b$  i s osi apscisa, uz dogovor da se dijelovi površine ispod osi apscisa uzimaju s negativnim predznakom) rastavljamo na što više što užih pravokutnika. Pritom, ti pravokutnici imaju po dvije stranice okomite na os apscisa i jednu na osi apscisa. Dakle, rastav na (neke) pravokutnike bit će određen **subdivizijom**  $\sigma$  segmenta  $[a, b]$  na  $n \in \mathbb{N}$  dijelova:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Na slikama 5.7 i 5.6 to je ilustrirano )za tzv. ekvidistantnu subdiviziju, tj. subdiviziju sa svojstvom da je  $x_{i+1} - x_i$  jednako za sve  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  (pa se taj iznos označi s  $\Delta x$ ). Općenito, subdivizija ne mora biti ekvidistantna,

<sup>3</sup>Arhimed iz Sirakuze, starogrčki matematičar i fizičar, 3. st. pr. Kr.



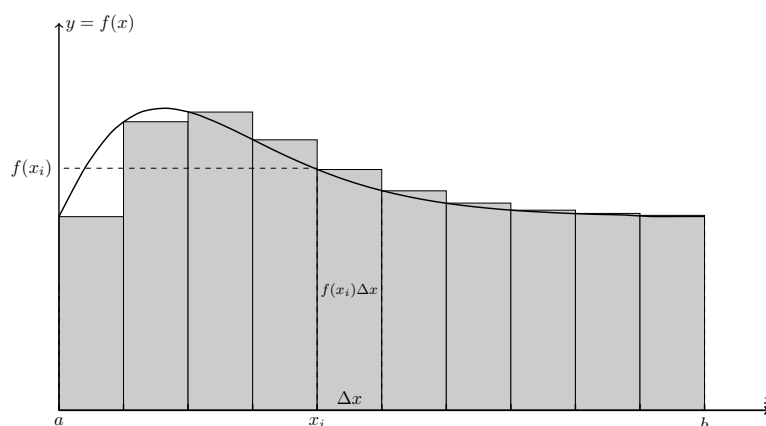
Slika 5.6: Prvi korak definicije određenog integrala.

a s  $d_\sigma$  označit ćemo najveću širinu podintervala te subdivizije, tj. najveći od iznosa  $x_{i+1} - x_i$  za  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Ostaje pitanje visine tih pravokutnika.

Jedna opcija je dozvoliti da je visina svakog pravokutnika jednaka  $F(t)$  za po jedan  $t$  iz svakog podintervala. Mi ćemo ovdje odabrati drugu, standardniju opciju, preko tzv. donjih i gornjih pravokutnika. Označimo s  $m_i$  „najmanju“ vrijednost od  $F$  na  $S_i$ , a s  $M_i$  „najveću“ (uočite da obje te vrijednosti ili pak samo  $m_i$  mogu).<sup>4</sup> Uočimo da ako je funkcija na ikojem podintervalu negativna, odgovarajući  $m_i$ , a eventualno i  $M_i$  će biti negativan, tj. u sumi ćemo umjesto površine pravokutnika imati njegovu suprotnu vrijednost: Dijelovi površine ispod  $x$ -osi pribrajat će se s negativnim predznakom. Primijetimo da to nije kompliciranje, nego olakšanje, jer bismo inače morali još uključivati podatke o predznacima funkcije na svim podintervalima za sve subdivizije. Uz te oznake je  $m_i$  „visina“  $i$ -tog **donjeg pravokutnika**, a  $M_i$  je „visina“  $i$ -tog **gornjeg pravokutnika**. Stoga  $i$ -ti donji pravokutni ima „površinu“  $p_i = m_i(x_{i+1} - x_i)$ , a gornji  $P_i = M_i(x_{i+1} - x_i)$ . Definiramo gornju i donju **integralnu sumu**<sup>5</sup> funkcije  $F$  za danu subdiviziju  $\sigma$  (usp. slike

<sup>4</sup>Strogo matematički,  $m_i$  je tzv. infimum (najveća donja međa), a  $M_i$  supremum (najmanja gornja međa) od  $F$  na pojedinom podintervalu. Oni za ograničene funkcije sigurno postoje, dok najmanja i najveća vrijednost ne moraju postojati za svaku ograničenu funkciju.

<sup>5</sup>Strogo matematički one se nazivaju Darbouxove sume.



Slika 5.7: Površina kao limes zbroja površina pravokutnika.

5.8 i 5.9):

$$s_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} p_i, \quad S_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} P_i.$$

Uočimo da za svaku subdiviziju  $\sigma$  vrijedi

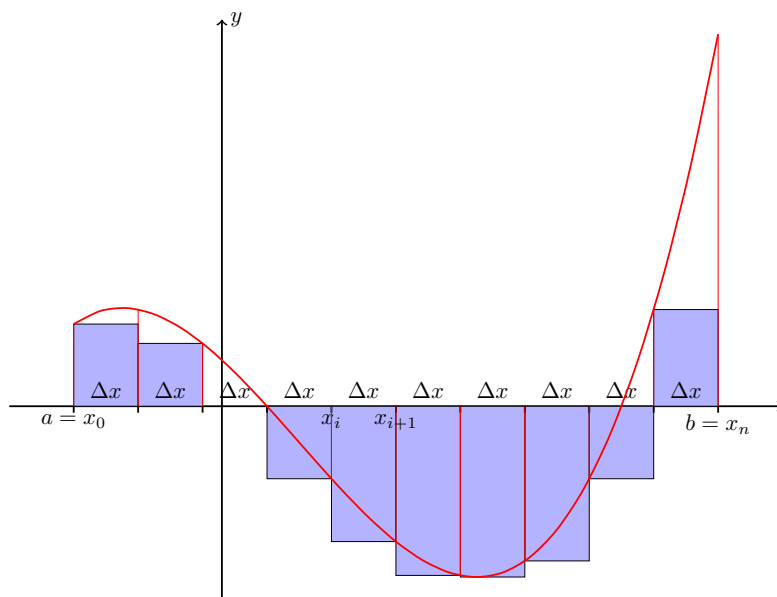
$$m(b-a) \leq s_\sigma \leq S_\sigma \leq M(b-a).$$

**Zadatak 35.** Za funkciju čiji graf i jedna subdivizija s pripadnom subdivizijom su prikazane slikama 5.6, 5.8 i 5.9 odredite  $n$  i predznake svih  $m_i$  i  $M_i$ .

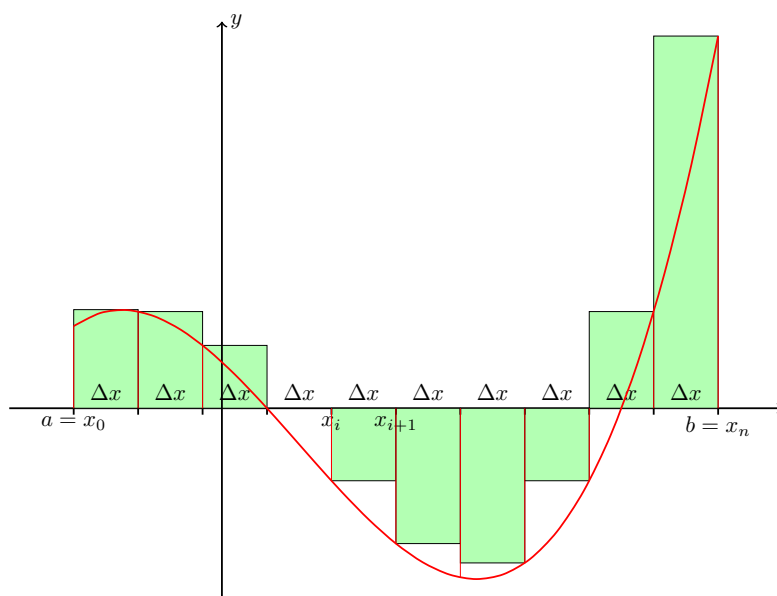
Posljednji korak u definiciji određenog integrala je da radimo subdivizije sa sve više što užih pravokutnika (dakle, pustimo da  $n \rightarrow +\infty$  i istovremeno  $d_\sigma \rightarrow 0$ ). Uz te uvjete postojat će limesi<sup>6</sup>  $\underline{I}$  svih donjih i  $\bar{I}$  svih gornjih integralnih suma i vrijedit će  $\underline{I} \leq \bar{I}$ .

**Definicija 28 (Određeni (Riemannov) integral).** Ako je  $\bar{I} = \underline{I}$ , onda se njihov zajednički iznos zove određenim (ili Riemannovim) integralom funkcije  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i označava s  $\int_a^b F(x) dx$ . Tada kažemo da je podintegralna funkcija  $F$  (Riemann-)integrabilna na segmentu  $[a, b]$ . Brojevi  $a$  i  $b$  zovu se granice (donja i gornja) određenog integrala  $\int_a^b F(x) dx$ , odnosno segment  $[a, b]$  se zove područjem integriranja.

<sup>6</sup>Zapravo, infimum gornjih i supremum gornjih integralnih suma.



Slika 5.8: Donja integralna suma.



Slika 5.9: Gornja integralna suma.

Osvrnimo se tren na mjerne jedinice. Ideja oznake  $\int_a^b F(x) dx$  je da bude limes sumacija poput onih u prva dva primjera ovog poglavlja. U tim sumacijama zbrajamo umnoške vrijednosti od  $F$  i raspona za  $x$ . Stoga će u slučaju varijabli s jedinicama jedinica od  $\int_a^b F(x) dx$  biti umnožak jedinica zavisne i nezavisne varijable.

Primijetimo da su po Bolzano-Weierstraßovom teoremu sve neprekidne funkcije na segmentu ograničene, a na svakom podsegmentu u subdivizijama iz definicije postižu i minimume i maksimume. Za neprekidne funkcije dokazuje se da im se donji i gornji integral uvijek poklapaju, pa je svaka funkcija koja je neprekidna na  $[a, b]$  ujedno i integrabilna na  $[a, b]$ . Štoviše, svaka monotona (dakle, rastuća ili padajuća) funkcija na  $[a, b]$  je integrabilna.

S druge strane, znamo da ako je funkcija derivabilna na nekom otvorenom intervalu, onda je na njemu i neprekidna, odnosno derivabilnost povlači neprekidnost, a neprekidnost integrabilnost. Preciznije:

**Propozicija 3.** *Neka je  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija zadana na otvorenom intervalu  $I$ . Ako je ona na tom intervalu derivabilna, onda je na njemu neprekidna i integrabilna na svakom  $[a, b] \subset I$ .*

Obrnuto, već smo vidjeli da postoje funkcije koje su neprekidne, a nisu derivabilne, a i da postoje funkcije s prekidima (npr. sve po dijelovima neprekidne funkcije) koje su integrabilne, a nisu neprekidne. Zapravo su sve uobičajene funkcije na svakom podsegmentu svoje domene integrabilne i teško je naći primjer ograničene funkcije (dakle, funkcije za koju definicija određenog integrala ima smisla), a koja nije integrabilna. Najpoznatiji je sljedeći, kemičarima zasigurno čudan, primjer:

**Primjer 160.** *Dirichletova funkcija definirana je na segmentu  $[0, 1]$  tako da u racionalnim brojevima ima vrijednost 0, a u iracionalnim 1. S obzirom da postiže samo dvije vrijednosti, očigledno je ograničena. No, kako između svaka dva racionalna broja postoji iracionalan i obrnuto, ma kako mali  $\Delta x$  uzeli,  $m_i$ -ovi će uvijek svi biti 0, a  $M_i$ -ovi će svi biti 1. Stoga je  $\underline{I} = 0 \neq 1 = \bar{I}$ , pa Dirichletova funkcija nije integrabilna.*



**Ponovimo bitno...** Antiderivacija funkcije je funkcija koja derivirana daje zadanu funkciju; obje moraju biti definirane na istom intervalu. Ako funkcija posjeduje antiderivaciju  $f$ , onda su sve njene antiderivacije oblika  $f$  plus konstanta te ih ima beskonačno mnogo. Neodređeni integral funkcije je skup svih njenih antiderivacija.

Određeni integral  $\int_a^b F(x) dx$  funkcije  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se za slučaj nenegativne neprekidne funkcije  $F$  može definirati kao površina omeđena vertikalama  $x = a$  i  $x = b$ , s  $x$ -osi i grafom funkcije  $F$ . Ukoliko funkcija  $F$  postiže i negativne vrijednosti na  $[a, b]$ , dijelovi površine ispod  $x$ -osi se u  $\int_a^b F(x) dx$  pribrajaju s negativnim predznakom.

Sve funkcije koje su neprekidne ili imaju konačno mnogo prekida u  $[a, b]$  su integrabilne na  $[a, b]$ . Integral  $\int_{-c}^c f(x) dx$  je za neparne, na  $[-c, c]$  integrabilne, funkcije  $f$  jednak nuli. Integral kojem se gornja i donja granica poklapaju je također jednak nuli. 🐣🐣🐣

## 5.2 Newton-Leibnizova formula (ili: Zapravo je samo jedan integral)

Neodređeni i određeni integrali osim simbolike na prvi pogled nemaju puno toga zajedničkog. Zašto se onda u oba slučaja govori o integralima? Također, očigledno definicija određenih integrala nije prikladna za njihovo izračunavanje. Kako računati određene integrale?

Odgovor na oba gore postavljena pitanja za neprekidne funkcije daje tzv. osnovni teorem infinitezimalnog računa, poznat i kao Newton-Leibnizova<sup>7</sup> formula. Ovaj teorem zove se osnovnim teoremom infinitezimalnog računa jer iskazuje međusobnu inverznost deriviranja i integriranja. Uz to, on povezuje određene s neodređenim integralima te omogućuje računanje određenih integrala preko neodređenih i obrnuto:

**Teorem 17 (Osnovni teorem infinitezimalnog računa).** *Neka je realna funkcija  $f$  neprekidna na segmentu  $[a, b]$ . Tada je formulom*

$$f(x) = \int_a^x F(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

*definirana funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i ona je antiderivacija funkcije  $F$  na  $\langle a, b \rangle$ .*

*Nadalje, za svaku antiderivaciju  $f$  od  $F$  vrijedi Newton-Leibnizova formula*

$$\int_a^b F(x) dx = f(x)|_a^b = f(b) - f(a).$$

---

<sup>7</sup>Formula je dobila ime po sir Isaacu Newtonu (1642.–1728.) i Gottfriedu Wilhelmu Leibnizu (1646.–1716.), koji su neovisno jedan o drugom krajem 17. stoljeća otkrili međusobnu inverznost deriviranja i integriranja, tj. upravo tu formulu.



**Korolar 1.** Za realnu funkciju  $F$  neprekidnu na  $[a, b]$  i bilo koju njenu anti-derivaciju  $f$  na  $\langle a, b \rangle$  vrijedi

$$f(x) = f(a) + \int_a^x F(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

i

$$F(x) = \left( \int_a^x F(t) dt \right)', \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

U terminima neodređenih integrala, činjenice iz gornjeg korolara možemo zapisati i kao

$$\frac{d}{dx} \left( \int F(x) dx \right) = F(x),$$

$$\int \frac{df}{dx} dx = f(x) + C.$$

Posljedica Newton-Leibnizove formule je da i određeni integral, kao i neodređeni, ima svojstvo<sup>8</sup> linearnosti:

$$\int_a^b (F(x) + G(x)) dx = \int_a^b F(x) dx + \int_a^b G(x) dx,$$

$$\int_a^b K F(x) dx = K \int_a^b F(x) dx.$$

**Primjer 161.** Izračunajmo  $\int_1^2 \frac{5 dx}{x}$ :

$$\int_1^2 \frac{5 dx}{x} = 5 \int_1^2 x^{-1} dx = (5 \ln |x|)|_1^2 = 5 \ln 2 - 5 \ln 1 = \ln 25.$$

Primijetimo da Newton-Leibnizova formula vrijedi samo za neprekidne funkcije, no može se (temeljem formule 5.1) primijeniti i na po dijelovima neprekidne funkcije ili općenitije na funkcije zadane po dijelovima elementarnim funkcijama.

**Primjer 162.** Za

$$F(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x + 2, & x \leq -1 \end{cases}.$$

---

<sup>8</sup>Zapravo, temeljem Newton-Leibnizove formule to direktno vidimo samo za neprekidne podintegralne funkcije, ali se linearnost određenog integrala može dokazati za sve integrabilne funkcije.

je prvo

$$\int_{-2}^2 F(x) \, dx = \int_{-2}^{-1} F(x) \, dx + \int_{-1}^0 F(x) \, dx + \int_0^2 F(x) \, dx,$$

jer se u  $-1$  i  $0$  mijenja pravilo pa je to potencijalna točka prekida. Dalje imamo

$$\int_{-2}^{-1} F(x) \, dx = \int_{-2}^{-1} (x+2) \, dx = \left( \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{2},$$

$$\int_{-1}^0 F(x) \, dx = \int_{-1}^0 x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^2 F(x) \, dx = \int_0^2 e^x \, dx = e^x \Big|_0^2 = e^2 - 1,$$

pa je

$$\int_{-2}^2 F(x) \, dx = e - \frac{1}{6}.$$



**Ponovimo bitno...** Newton-Leibnizova formula (osnovni teorem infinitezimalnog računa) iskazuje međusobnu inverznosti deriviranja i integriranja, odnosno iskazuje ekvivalenciju određenih i neodređenih integrala: Za neprekidne funkcije se neodređeni integral (antiderivacija) može računati pomoću određenog i obrnuto. 🦆🦆🦆

## 5.3 Osnovne metode integriranja

### 5.3.1 Metoda parcijalne integracije

Ni u jednoj tablici osnovnih integrala ne može se naći integral logaritamske funkcije. Razlog je u tome što u tablici derivacija nema nijedne funkcije koja derivirana daje logaritamsku funkciju (ne znamo napamet nijednu funkciju  $f$  takvu da je  $f'(x) = \log_a x$ ). S druge strane, nije nezamislivo da bi nam moglo biti korisno znati izračunati primjerice  $\int \ln x \, dx$ . U ovom, a i mnogim drugim slučajevima, pomaže metoda parcijalne integracije, koja se izvodi iz formule za derivaciju produkta funkcija:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Stoga je

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - \frac{du}{dx} \cdot v.$$

Integriranje zadnje jednakosti po  $x$  daje

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du,$$

pri čemu koristimo skraćeni zapis

$$df = f'(x) \, dx.$$

Drugi, ekvivalentni, oblike te formule je

$$\int u(x) v'(x) \, dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) \, dx.$$

To je **formula parcijalne integracije**. Njena glavna primjena na rješavanje integrala pojavljuje se kad pod integralom prepoznamo jednu funkciju ( $u = u(x)$ ) pomnoženu s derivacijom neke druge ( $v'(x)$ ) koje su takve da je  $v'$  lako integrirati, a da pritom nakon deriviranja funkcije  $u$  dobijemo lakši integral  $\int v \, du = \int u'(x)v(x) \, dx$ . Najtipičniji slučajevi primjene ovog pravila su sljedeći:

- Funkcija  $u$  ima relativno jednostavnu derivaciju, a  $v'(x) = 1$ ;
- Funkcija  $u$  je potencija od  $x$  (u pravilu  $u(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ), a  $v'$  je eksponencijalna ili trigonometrijska funkcija;
- Funkcija  $u$  je neka logaritamska funkcija, a  $v'$  je oblika  $v'(x) = x^a$  za  $a \in \mathbb{R}$ .

Dajemo primjere za sva tri navedena tipična slučaja.

### Primjer 163.

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \left\{ u(x) = \ln x, \, du = \frac{dx}{x}; \, dv = dx, \, v(x) = x \right\} = \\ &= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C. \end{aligned}$$

**Primjer 164.**

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x dx &= \{u(x) = x^2, du = 2x dx; dv = e^x dx, v(x) = e^x\} = \\
&= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \{u(x) = x, du = dx; dv = e^x dx, v(x) = e^x\} = \\
&= x^2 e^x - 2 \left( x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.
\end{aligned}$$

**Primjer 165.**

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left\{ u(x) = \ln x, du = \frac{dx}{x}; dv = x^{-2} dx, v(x) = -x^{-1} \right\} = \\
&= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-1} \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.
\end{aligned}$$

U kontekstu određenih integrala, formula parcijalne integracije poprima oblik

$$\int_a^b u(x) dv = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x) du.$$

**Primjer 166.** Izračunajmo  $\int_0^\pi \sin^2 x dx$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2 x dx &= \{u = \sin x, dv = \sin x dx\} = -\sin x \cos x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x dx = \\
&= (-0+0) + \int_0^\pi \cos^2 x dx = \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) dx = x|_0^\pi - \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi - \int_0^\pi \sin^2 x dx.
\end{aligned}$$

Označimo li  $I = \int_0^\pi \sin^2 x dx$ , dobili smo jednadžbu

$$I = \pi - I$$

te je

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = I = \frac{\pi}{2}.$$



**Ponovimo bitno...** Analog formule za deriviranje produkta funkcija u kontekstu integrala je formula parcijalne integracije  $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$  koja opisuje kako integrirati produkt dvije funkcije od kojih je bar jedna prepoznatljiva kao derivacija neke druge funkcije. 🦆 🦆



### 5.3.2 Metoda supstitucije

Promotrimo sljedeći integral:

$$\int \frac{dx}{ax+b}.$$

On podsjeća na integral  $\int \frac{dx}{x}$ , no ako bismo pretpostavili da je  $\int \frac{dx}{ax+b} = \ln|ax+b| + C$ , lako bismo se deriviranjem uvjerali da nismo dobili točan rezultat. Prirodna ideja bila bi zamijeniti „problematični” nazivnik  $ax+b$  novom varijablom  $y$ , no time integral poprima oblik  $\int \frac{dx}{y}$ , što nije smisleno jer smo dobili dvije varijable ( $y$  i varijablu po kojoj integriramo, tj.  $x$ ). Stoga se pri takvoj supstituciji  $y = ax+b$  treba zamijeniti i  $dx$ . Kako? Ideja je jednostavna:  $y' = a$ , tj.

$$\frac{dy}{dx} = a$$

te je  $dx = \frac{1}{a} dy$ . Stoga je

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \{y = ax+b, dy = a dx\} = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{dy}{y} = \frac{1}{a} \ln|y| + C = \frac{\ln|ax+b|}{a} + C.$$

Takva supstitucija zove se linearna<sup>9</sup> supstitucija: Izraz oblika  $ax+b$  zamjenjujemo novom varijablom  $y$ , s time da onda zamjenjujemo i diferencijal  $dx$ . Ukoliko je podintegralna funkcija općenitija kompozicija<sup>10</sup> afine funkcije  $g(x) = ax+b$  s nekom funkcijom  $f$ , istom supstitucijom dobivamo opću formulu linearne supstitucije:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(y) dy.$$

**Zadatak 36.** Izračunajte integral  $\int \sin(5-3x) dx$ .

Gornji slučaj je specijalni slučaj općenitije metode integriranja poznate pod imenom metoda supstitucije. Vidjeli smo da je metoda parcijalne integracije analog formule za derivaciju produkta u kontekstu integrala. Analog lančanog pravila za derivaciju kompozicije funkcija kod računanja integrala je metoda supstitucije. Kao što znamo, jedan zapis lančanog pravila za deriviranje je oblika

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Neka je  $\frac{df}{dy} = F(y)$ , tj.  $f$  je antiderivacija od  $F$ , pri čemu je  $y = y(x)$ . Tada gornju formulu možemo zapisati u obliku  $df = F(y(x))y'(x) dx$  odnosno (jer  $df = F(y) dy$ )  $\int F(y) dy = \int F(y(x))y'(x) dx$ . Time smo izveli<sup>11</sup> formulu

<sup>9</sup>Prikladniji naziv bio bi afina supstitucija.

<sup>10</sup>Primijetimo da je  $h(x) = \frac{1}{ax+b}$  kompozicija  $h = f \circ g$ , gdje je  $g(x) = ax+b$  i  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

<sup>11</sup>Izvod nije sasvim precizan, već se zapravo radi o ideji izvoda formule.

metode supstitucije za neodređene integrale:

$$\int F(y(x))y'(x) dx = \int F(y) dy.$$

Uobičajena primjena ove formule je u situacijama kad pod integralom uočimo neku funkciju i njenu derivaciju (do na multiplikativnu konstantu). Pritom redovno koristimo činjenicu

$$dy = y'(x) dx.$$

**Primjer 167.** Izračunajmo  $\int x \exp(-x^2) dx$ . Budući da (do na konstantu  $-2$ )  $x$  možemo shvatiti kao derivaciju od  $-x^2$ , pokušaj supstitucije najsmisleniji je s  $y = -x^2$ . U tom slučaju je  $dy = -2x dx$ , tj.  $x dx = -\frac{1}{2} dy$ , te je

$$\int x e^{-x^2} dx = \int -\frac{1}{2} e^y dy = -\frac{1}{2} e^y + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

U rjeđim situacijama formulu metode supstitucije zgodno je čitati „udesno”.

**Primjer 168.** Promotrimo integral  $\int \sin(\sqrt{x}) dx$ . Kod njega nema vidljive kombinacije funkcije i njene derivacije. Pokušajmo vidjeti što bi nam dao jedini mogući pokušaj supstitucije u ovom integralu:  $y = \sqrt{x}$ , tj.  $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ . Prema posljednjem imamo  $dx = 2\sqrt{x} dy = 2y dy$ . Dobili bismo

$$\int \sin(\sqrt{x}) dx = \int 2y \sin y dy.$$

Posljednji integral je rješiv metodom parcijalne integracije — riješite ga do kraja!

**Zadatak 37.** Izračunajte  $\int \sin^{10} x \cos x dx$ .

Za određene integrale formula za supstituciju glasi:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy.$$

Pritom je bitno da je i derivacija od  $g$  neprekidna na segmentu  $[a, b]$ .

**Primjer 169.** Integral  $\int_2^3 \frac{dx}{3-2x}$  jednak je

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dx}{3-2x} &= \{y = 3-2x, dy = -2 dx, y(2) = -1, y(3) = -4\} = \\ &= \int_{-1}^{-4} -\frac{1}{2} \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} \ln |y| \Big|_{-1}^{-4} = -\frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 1) = -\ln 4^{1/2} = -\ln 2. \end{aligned}$$



**Ponovimo bitno...** Metoda supstitucije za integrale opisana je formulom

$$\int f(y(x))y'(x) dx = \int f(y) dy.$$

Ona u mnogim slučajevima omogućuje da se u slučaju kad se u podintegralnoj funkciji pojavljuje izraz ovisan o  $x$  i njegova derivacija supstitucijom tog izraza novom varijablom  $y$  integral pojednostavi. 

### 5.3.3 Integriranje racionalnih funkcija

Svaku racionalnu funkciju moguće je integrirati, pri čemu prvo podintegralnu funkciju pogodno preoblikujemo.

Ako je brojnik racionalne funkcije stupnja većeg ili jednakog stupnju nazivnika, prvo treba podijeliti brojnik s nazivnikom kako bismo izdvojili polinomijalni dio. Taj polinomijalni dio je onda lako integrirati.

**Primjer 170.** *Uzmimo  $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx$ . Prvo dijelimo*

$$x^3 : (x^2 - 1) = x$$

*i ostatak je  $x$  te je*

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1},$$

*dakle*

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^2-1} dx.$$

Stoga je pravo pitanje kako integrirati racionalne funkcije kojima je brojnik manjeg stupnja nego nazivnik (tzv. **prave racionalne funkcije**). Metoda preoblikovanja takve racionalne funkcije u oblik koji se lako integrira zove se **rastav na parcijalne razlomke**. Radi se o zapisu prave racionalne funkcije  $\frac{p(x)}{q(x)}$  u obliku zbroja razlomaka koji su oblika

$$\frac{A}{(ax+b)^k}$$

ili oblika

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$$

za koje treba odrediti koeficijente njihovih brojnika. U slučaju da nazivnik  $q(x)$  nema ne-realnih nultočaka dovoljni su razlomci prvog tipa, pri čemu su izrazi  $ax+b$  faktori na koje možemo rastaviti  $q(x)$ .

Najjednostavniji slučaj imamo kad  $q(x)$  ima točno onoliko (različitih) realnih nultočaka koliki mu je stupanj (u daljnjem ćemo stupanj od  $q$  označiti s  $n$ ), tj. kad ima  $n$  različitih jednostrukih realnih nultočaka. U tom slučaju možemo rastav na parcijalne razlomke bit će oblika

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{a_i x + b_i},$$

gdje su  $a_i x + b_i$  različiti faktori nazivnika, a treba odrediti konstantne brojnike  $A_1, \dots, A_n$ . Oni se određuju tako da cijelu jednakost pomnožimo s  $q(x)$ , čime dobijemo jednakost polinoma. Koeficijenti brojnika se sad mogu odrediti iz sustava kojeg dobijemo koristeći činjenicu da su dva polinoma jednaka točno ako im se svi koeficijenti uz odgovarajuće potencije podudaraju. Alternativno, možemo redom uvrstiti nultočke<sup>12</sup>  $-b_i/a_i$  pojedinih faktora i tako dobiti tražene koeficijente. Postupak je najlakše opisati primjerom te ćemo nastaviti s primjerom 170.

**Primjer 171.** *Potrebno je  $\frac{x}{x^2-1}$  rastaviti na parcijalne razlomke. Faktorizirani oblik nazivnika je  $(x-1)(x+1)$  te pišemo*

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

*Potrebno je odrediti  $A$  i  $B$ . Pomnožimo li zadnju jednakost s  $x^2-1$  dobivamo jednakost*

$$x = A(x+1) + B(x-1).$$

*U nju uvrstimo  $x=1$  i  $x=-1$  (nultočke od  $x^2-1$ ) i dobivamo*

$$1 = 2A,$$

$$-1 = -2B.$$

*Stoga je  $A = B = \frac{1}{2}$  i*

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$$

*te je*

$$\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln|x-1| + \ln|x+1|) = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C.$$

*Početni integral iz primjera 170 stoga je jednak*

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C.$$

---

<sup>12</sup>Zapravo, potrebno je uvrstiti onoliko različitih vrijednosti  $x$  koliko imamo nepoznanica, tj. njih  $n$ , no najjednostavnije jednadžbe dobivamo uvrštavanjem nultočki od  $q(x)$ .



Nešto teži slučaj imamo ako  $q(x)$  ima višestrukih realnih nultočki, tj. ako se u  $q(x)$  neki faktor  $a_i x + b_i$  pojavljuje s potencijom  $k$  većom od 1, ali je zbroj svih kratnosti  $n$  (tj.  $q$  nema ne-realnih nultočaka). U tom slučaju svakom takvom faktoru ne odgovara jedan, nego  $k$  parcijalnih razlomaka

$$\frac{B_1}{ax+b} + \frac{B_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{B_{k-1}}{(ax+b)^{k-1}} + \frac{B_k}{(ax+b)^k}.$$

Dakle, pojedinom faktoru nazivnika odgovara onoliko parcijalnih razlomaka koliki je eksponent tog faktora (kratnost nultocke  $-b_i/a_i$ ), pri čemu su svi brojnici tih razlomaka nepoznate konstante, a nazivnici su redom potencije tog faktora od prve do one s kojom se on pojavljuje u  $q(x)$ .

**Primjer 172.** *Izračunajmo integral*

$$\int \frac{x}{(2x+3)(x-3)^2} dx.$$

*Prvi faktor nazivnika je  $(2x+3)$  i on je potencije 1 pa njemu odgovara jedan parcijalni razlomak oblika  $\frac{A}{2x+3}$ . Drugi faktor  $(x-3)$  je potencije 2 pa njemu odgovaraju 2 parcijalna razlomka s nazivnicima  $(x-3)$  i  $(x-3)^2$ . Dakle, pretpostavljamo rastav podintegralne funkcije na parcijalne razlomke.*

$$\frac{x}{(2x+3)(x-3)^2} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x-3}.$$

*Množenje s  $(2x+3)(x-3)^2$  daje*

$$x = A(x-3)^2 + B(2x+3) + C(x-3)(2x+3).$$

*Uvrstimo  $x = 3$  i  $x = -3/2$  (nultočke nazivnika polazne funkcije) i dobijemo*

$$3 = 9B,$$

$$-\frac{3}{2} = \frac{81}{4}A$$

*tj.  $A = -\frac{2}{27}$  i  $B = \frac{1}{3}$ . Da bismo odredili  $C$  uvrstimo još bilo koji  $x$ , recimo  $x = 0$ :*

$$0 = 9A + 3B - 9C$$

*iz čega dobivamo  $C = \frac{1}{27}$ . Imamo dakle*

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(2x+3)(x-3)^2} dx &= \int \left( \frac{-2/27}{2x+3} + \frac{1/3}{(x-3)^2} + \frac{1/27}{x-3} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{27} \ln|2x+3| - \frac{1}{3(x-3)} + \frac{1}{27} \ln|x-3| + C = \frac{1}{27} \ln \left| \frac{x-3}{2x+3} \right| - \frac{1}{3(x-3)} + C. \end{aligned}$$

Primijetimo: Kad god  $q(x)$  ima ukupno  $n$  realnih nultočki (gdje mu je  $n$  stupanj),  $\frac{p(x)}{q(x)}$  se rastavlja na ukupno  $n$  parcijalnih razlomaka tipa  $\frac{A}{(ax+b)^k}$ . Time se integriranje svodi na integriranje funkcija oblika  $(ax+b)^{-k} dx$  koje je lako integrirati linearnom supstitucijom.

U slučaju da  $q(x)$  nema samo realne nultočke u rastavu se po sličnom principu pojavljuju parcijalni razlomci oblika  $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ , tj. parcijalni razlomci kojima su brojnici affine funkcije, a nazivnici potencije kvadratnog faktora bez realnih nultočaka.

**Primjer 173.** Rastavimo  $\frac{1}{(x^2+1)(x-1)}$  na parcijalne razlomke. Faktor  $(x^2+1)$  nema realnih nultočaka i pojavljuje se s potencijom 1 pa njemu odgovara jedan parcijalni razlomak oblika  $\frac{Ax+B}{x^2+1}$ . Faktoru  $(x-1)$  kao ranije odgovara parcijalni razlomak oblika  $\frac{C}{x-1}$ . Dakle:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Množenje s  $(x^2+1)(x-1)$  daje

$$1 = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

Imamo 3 neodređena koeficijenta  $A, B, C$ , a samo jednu realnu nultočku nazivnika (to je 1) pa ćemo osim 1 u zadnju jednakost morati uvrstiti još dva broja, primjerice 0 i 2. Ako redom uvrstimo  $x = 0, 1, 2$  u zadnju jednadžbu dobijemo sustav

$$2C = 1,$$

$$-B + C = 1,$$

$$2A + B + 5C = 1.$$

Rješenje tog sustava je  $A = -\frac{1}{2}$ ,  $B = -\frac{1}{2}$ ,  $C = \frac{1}{2}$  tj.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{-x-1}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} \right).$$

**Zadatak 38.** Koristeći rastav na parcijalne razlomke određen u gornjem primjeru izračunajte  $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)}$ .



**Ponovimo bitno...** Integrali racionalnih funkcija računaju se pomoću rastava na parcijalne razlomke, u kojem svakom faktoru nazivnika koji je oblika  $(x-c)^k$  odgovara  $k$  parcijalnih razlomaka oblika konstanta  $A_i$  kroz  $(x-c)^i$ , za potencije  $i$  od 1 do  $k$ . U slučaju da nazivnik ima kvadratne faktore bez realnih nultočki, na njih se primjenjuje analogan postupak, s tim da su pripadni brojnici affine funkcije.



## 5.4 Nepravi integrali

Promotrimo integral

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

Na prvi pogled radi se o običnom određenom integralu za koji bi formalni račun dao  $\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2} \Big|_1^5 = -\frac{4}{3}$ . To rješenje je krivo! Zašto? Ako je to određen integral, onda bi broj  $-\frac{4}{3}$  trebao odgovarati razlici površina iznad i ispod  $x$ -osi koje graf podintegralne funkcije  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$  zatvara s  $x$ -osi, između vertikalna  $x = 1$  i  $x = 5$ . Posebno, budući da je iznos integrala ispao negativan, to bi značilo da  $f$  između  $x = 1$  i  $x = 5$  daje veći dio površine ispod, nego iznad  $x$ -osi. No,  $f$  je očigledno svuda pozitivna?! Problem je da u gornjem integralu podintegralna funkcija nije ograničena na intervalu na kojem integriramo, a određeni (Riemannov) integral je definiran samo za funkcije ograničene na području integriranja. Stoga gornji integral *nije* određeni integral.

Nepravi integrali su integrali koji podsjećaju na određene (Riemannove) integrale jer su im definirane granice integriranja, ali je funkcija na intervalu integriranja neograničena ili je pak interval integriranja neograničen. Primjeri nepravih integrala su:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1}, \int_0^1 \ln x \, dx, \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{tg} x \, dx,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \int_{-\infty}^5 \frac{dx}{1+x^2}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx.$$

Prva tri imaju ograničena područja integriranja, ali su podintegralne funkcije unutar područja integriranja neograničene (imaju vertikalnu asimptotu), a zadnja tri imaju neograničena područja integriranja, ali su podintegralne funkcije na tim područjima ograničene (sve tri unutar navedenih intervala poprimaju vrijednosti isključivo između 0 i 1). Dakle, neprave integrale možemo podijeliti u dvije vrste: one s neograničenom podintegralnom funkcijom na ograničenom području integriranja i one s ograničenom podintegralnom funkcijom na neograničenom području integriranja. Posljednji tip je čest u primjenama vezanim za vjerojatnost (i stoga za kvantnu fiziku).

Prvo što bi nematematičar mogao pomisliti je da se takvim integralima ne mogu pridružiti brojevi kao iznosi, jer predstavljaju površine koje su vertikalno ili horizontalno neograničene. No, neograničeno ne znači uvijek i beskonačno. Primjerice, ako je površina nečega opisiva kao  $P(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$ , onda ona za rastući  $x > 0$  ne postaje beskonačno velika iako s rastućim  $x$  i

ona raste. U osnovi, radi se o razlici između rastućih funkcija s horizontalnom asimptotom (ograničene) i neograničeno rastućih funkcija.

Idemo prvo vidjeti kako definirati nepravu integrale s neograničenom podintegralnom funkcijom na ograničenom području integriranja. Ideja definicije je da se pri pokušaju računanja površine malo (za  $\varepsilon > 0$ ) odmaknemo ulijevo ili udesno od točke u kojoj imamo vertikalnu asimptotu, računamo određeni integral s tako pomaknutom granicom i zatim pomalo smanjujemo odmak  $\varepsilon$  prema 0.

**Definicija 29** (Nepravi integrali neograničenih funkcija). Integral  $\int_a^b f(x) dx$  za  $f$  koja unutar  $[a, b]$  ima vertikalnu asimptotu se definira na sljedeći način:

- Ako je  $x = a$  vertikalna asimptota za  $f$ ,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

- Ako je  $x = b$  vertikalna asimptota za  $f$  (vidi i sliku 5.10),

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

- Ako je za neki  $c \in (a, b)$  pravac  $x = c$  VA za  $f$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

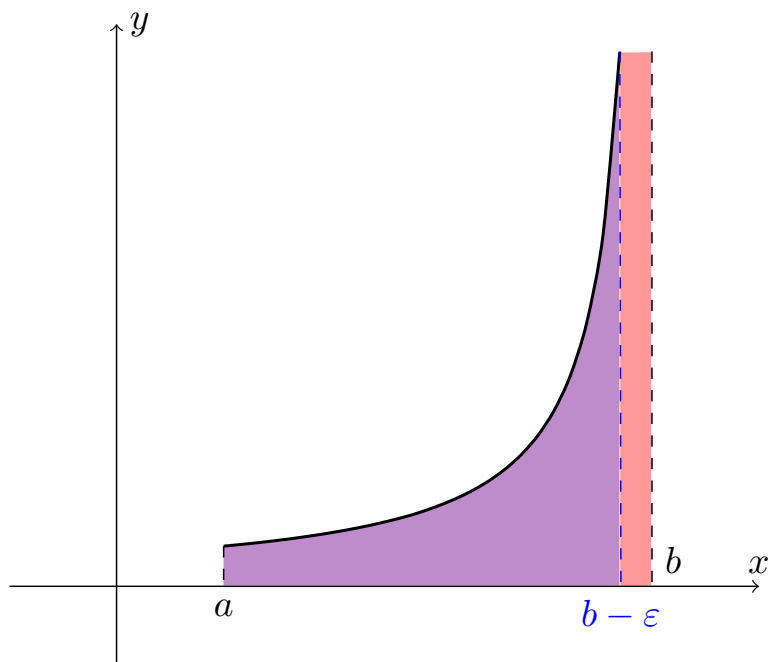
Ako je rezultat računanja nepravog integrala realan broj, kažemo da integral konvergira, u suprotnom da divergira.

**Primjer 174.** Promotrimo integrale tipa

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a},$$

gdje je  $a$  realan broj. Primijetimo prvo da su to u slučaju  $a \leq 0$  ( $-a \geq 0$ ) obični određeni integrali:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \int_0^1 x^{-a} dx = \left. \frac{x^{1-a}}{1-a} \right|_0^1 = \frac{1}{1-a}, \quad a \leq 0.$$



Slika 5.10: Nepravi integrali neograničenih funkcija.

Za  $a > 0$  podintegralna funkcija ima vertikalnu asimptotu u lijevom rubu integriranja pa su onda to nepravi integrali. Stoga je

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^a}.$$

Integrali  $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^a}$  sad su određeni integrali. Imamo dva slučaja, ovisno o tome je li  $a = 1$  ili nije. Za  $a = 1$  dobivamo

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^a} = \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = -\ln(\varepsilon)$$

i stoga

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (-\ln(\varepsilon)) = +\infty.$$

Dakle, za  $a = 1$  imamo divergentan nepravi integral.

Za pozitivan  $a \neq 1$  imamo

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^a} = \frac{x^{1-a}}{1-a} \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{1-a} - \frac{\varepsilon^{1-a}}{1-a}.$$

Ako je  $a > 1$ , onda je  $1 - a < 0$  pa je  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon^{1-a} = +\infty$  pa je stoga

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{1-a} - \frac{\varepsilon^{1-a}}{1-a} = -\infty.$$

Ako je pak  $a > 1$ , onda je  $1 - a > 0$  pa je  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon^{1-a} = 0$  i stoga je

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{1-a} - \frac{\varepsilon^{1-a}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

Zaključujemo: Integrali  $\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$  su za  $a \leq 0$  određeni, za  $0 < a < 1$  konvergentni nepravni i za  $a \geq 1$  divergentni nepravni integrali.

**Zadatak 39.** Izračunajte  $\int_0^1 \log_a x \, dx$ .

Već smo rekli da su u primjenama češći nepravni integrali drugog tipa, kojima je jedna ili obje granice integriranja beskonačna. I u njihovoj definiciji se koriste limesi: Beskonačna se granica zamjenjuje konačnom, ali varijabilnom, čime integral postaje određeni, a nakon integriranja s ta nova granica pusti da teži u odgovarajuću beskonačnost. Preciznije:

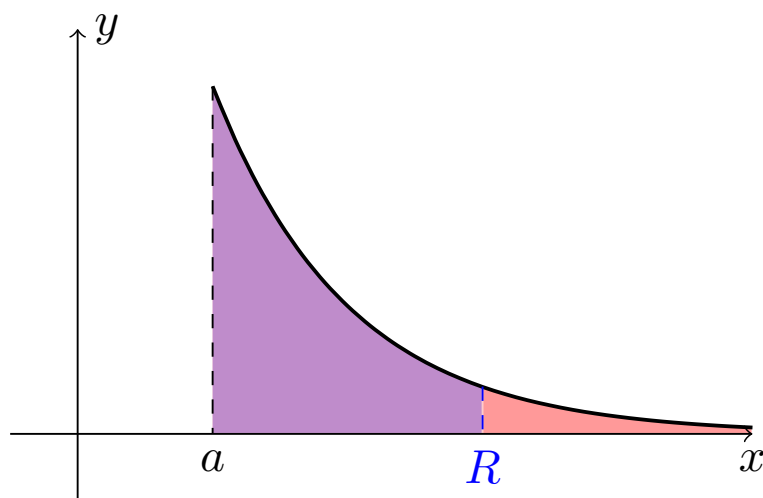
**Definicija 30** (Nepravni integrali s neograničenim područjem integriranja).

Integrali  $\int_a^b f(x) \, dx$  kod kojih je  $a = -\infty$  ili  $b = +\infty$  definiraju se ovako:

- $\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^b f(x) \, dx.$
- $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) \, dx$  (vidi i sliku 5.11).
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^c f(x) \, dx + \int_c^{+\infty} f(x) \, dx$  za bilo koji  $c$  za koji integrali na desnoj strani konvergiraju.

Ako je konačni rezultat izračunavanja potrebnog limesa realan broj, kažemo da nepravni integral konvergira, a u suprotnom da divergira.

**Napomena 14.** Integrali s neograničenim područjem integriranja na kojem funkcija nije ograničena, primjerice  $\int_0^{\infty} \ln x$  ili  $\int_{-\infty}^1 x^2$ , sigurno ne konvergiraju.



Slika 5.11: Nepravi integrali s neograničenim područjem integriranja.

**Primjer 175.** Promotrimo integrale tipa

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a},$$

gdje je  $a$  realan broj. Primijetimo prvo da oni u slučaju  $a \leq 0$  ( $-a \geq 0$ ) sigurno divergiraju jer u tom slučaju podintegralna funkcija nije ograničena na području integriranja (vidi prethodnu napomenu).

Za  $a > 0$  podintegralna funkcija ima  $x$ -os kao desnu horizontalnu asimptotu pa je ograničena na intervalu  $[1, +\infty)$ . Po definiciji je tad

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^a}.$$

Integrali  $\int_1^R \frac{dx}{x^a}$  sad su određeni integrali. Opet imamo dva slučaja, ovisno o tome je li  $a = 1$  ili nije. Za  $a = 1$  dobivamo

$$\int_1^R \frac{dx}{x^a} = \int_1^R \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^R = \ln R$$

i stoga

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R = +\infty.$$

Dakle, za  $a = 1$  imamo divergentan nepravi integral.

Za pozitivan  $a \neq 1$  imamo

$$\int_1^R \frac{dx}{x^a} = \frac{x^{1-a}}{1-a} \Big|_1^R = \frac{R^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a}.$$

Ako je  $a > 1$ , onda je  $1-a < 0$  pa je  $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1-a} = 0$  pa je stoga

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} = \frac{1}{a-1}.$$

Ako je pak  $a < 1$ , onda je  $1-a > 0$  pa je  $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1-a} = +\infty$  i stoga je

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} = +\infty.$$

Zaključujemo: Integrali  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$  su za  $a \leq 1$  divergentni nepravni i za  $a > 1$  konvergentni nepravni integrali.

**Zadatak 40.** Izračunajte  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ .

Za slučaj integrala tipa  $\int_{-\infty}^{+\infty}$ , po definiciji treba ih „razbiti” u nekoj točki  $c$ , a najčešće se bira  $c = 0$ . Ukoliko je funkcija  $f$  parna (ili neparna) i ako nepravni integral  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  konvergira, možemo primijeniti pravila za takve funkcije iz određenih integrala, tj. za parnu funkciju je tada  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx$ , a za neparnu  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$ .

**Primjer 176.** Odredimo  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ . Po definiciji on je jednak  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ . Podintegralna funkcija je parna. Odredimo  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ . Imamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \arctg(R) = \frac{\pi}{2}.$$

Stoga je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Uočimo korisnu činjenicu: Integrali tipa  $\int_a^\infty f(x) dx$  sigurno divergiraju ne samo ako je  $f$  neograničena, nego i kad ima desnu horizontalnu asimptotu različitu od  $x$ -osi. U tom je slučaju naime u površinu koja je opisana takvim integralom uključen pravokutnik beskonačne širine i fiksne visine (koja je jednaka ordinati te asimptote), a ta površina ne može biti konačna. Analogno, integrali tipa  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  sigurno divergiraju čim  $f$  nema  $x$ -os za lijevu horizontalnu asimptotu.



Pomoću nepravih integrala s neograničenim područjem integriranja definiraju se neke tzv. specijalne funkcije, među kojima je najpoznatija **gama-funkcija**  $\Gamma$ . Njen smisao je poopćenje faktoriijela<sup>13</sup> na realne brojeve<sup>14</sup>. dakle primjerice  $\Gamma(4) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ . Općenito se definira

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Gama-funkcija kao prirodnu domenu ima skup realnih brojeva bez skupa negativnih cijelih brojeva. Za prirodne brojeve  $n$  vrijedi

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

pa uvrštavajući  $x = n$  u definiciju gama-funkcije dobivamo jednu formulu koja olakšava izračunavanje nekih integrala koji se pojavljuju u kvantnoj fizici i kemiji:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}. \quad (5.2)$$

S druge strane, neki nepravi integrali se ne mogu izračunati preko definicije jer nije određiva formula antiderivacije. Za neke od njih su drugim matematičkim metodama izračunate vrijednosti. Među njima je korisno znati jedan, koji se često pojavljuje u računima vezanim za vjerojatnost, primjerice u kvantnoj teoriji:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (5.3)$$



**Ponovimo bitno...** Nepravi integrali poopćuju određene integrale na slučajeve kad ili područje integriranja ili podintegralna funkcija nije ograničena. U oba slučaja problematični rubovi se zamjenjuju varijabilnim, čime se dobije određeni integral s varijabilnim rubom, te se vrijednost nepravog integrala računa kao limes određenog integrala kad uvršteni varijabilni rub teži prema problematičnom. 🦆🦆🦆

## 5.5 Primjene integrala u kemiji i fizici

Primjene integrala su vrlo raznolike, a ugrubo ih možemo podijeliti na četiri tipaa:

<sup>13</sup>Za prirodan broj  $n$ ,  $n$  faktoriijela je broj  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Po definiciji je  $0! = 1$ .

<sup>14</sup>Gama-funkcija omogućuje poopćenje faktoriijela i na kompleksne brojeve

1. Određivanje neke vremenske ovisnosti iz poznavanja brzine njene promjene.
2. Izračunavanje izvršenog rada i iznosa drugih fizikalnih veličina koje se definiraju preko određenih integrala.
3. Izračunavanje prosječne vrijednosti funkcije zadane na segmentu.
4. Integrali s vjerojatnosnom interpretacijom.

Sve tipove primjena ćemo ilustrirati primjerima i osvrnuti se na glavne principe. Osim ovih primjena, u literaturi se lako nađu standardne geometrijske primjene integrala na određivanje duljine luka krivulje, površina i volumena.

U fizikalnim i fizikalnokemijskim primjenama često se pojavljuju neodređeni integrali, u pravilu uz tzv. početni uvjet. U osnovi se svi takvi svode na sljedeću tipsku situaciju: Neka je  $Y$  neka veličina ovisna o vremenu  $t$  (pozicija na pravcu, koncentracija, ...). Ukoliko je poznata ovisnost  $V(t) = Y'(t)$  (brzina promjene veličine  $Y$ ), onda je

$$Y(t) = \int V(t) dt.$$

Da bismo mogli odrediti konstantu integriranja, potreban je početni uvjet, tj. dodatno poznavanje iznosa  $Y$  u nekom trenutku, najčešće u trenutku 0 (početna pozicija, početna koncentracija, ...). Alternativno, iz Newton-Leibnizove formule, ako je  $V$  neprekidna (a u pravilu jest) imamo

$$\int_0^t V(\tau) d\tau = Y(t) - Y(0),$$

odnosno

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t V(\tau) d\tau.$$

**Primjer 177.** Ako objekt mase  $m$  slobodno pada s pozicije 0, onda je do trenutka  $T$  prešlo put duljine

$$s = \int_0^t g\tau d\tau = \frac{g}{2} t^2.$$

**Primjer 178.** Za sve reakcije vrijedi: koncentracija  $c$  bilo kojeg sudionika reakcije (čiji stehiometrijski koeficijent je  $\nu$ , pozitivan ako se radi o produktu, a negativan ako se radi o reaktantu, te početna koncentracija  $c_0$ ) je dana s

$$c = c_0 + \nu x, \quad (5.4)$$

gdje je  $x$  tzv. koncentracija izvedenih pretvorbi.<sup>15</sup> Ona je funkcija vremena i povezana s brzinom reakcije:

$$v = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{dc}{dt} = \frac{dx}{dt}.$$

S druge strane, poznato je i da je brzina reakcije uvijek razmjerna umnošku određenih potencija koncentracija svojih reaktanata. To se zove zakonom brzine reakcije. Konstanta proporcionalnosti u njemu zove se koeficijent brzine reakcije i pri stalnoj temperaturi on je konstantan.

Promotrimo reakciju stehiometrije  $A + B \rightarrow P$ . Ako je naša reakcija drugog reda, i to tako da je prvog obzirom na svaki od dva reaktanta, onda zakon brzine reakcije ima oblik

$$v = kc_Ac_B.$$

Označimo s  $a$  i  $b$  početne koncentracije od  $A$  i  $B$ . Spojimo li definiciju brzine reakcije sa zakonom brzine i uzmemo u obzir da su u našem slučaju stehiometrijski koeficijenti oba reaktanta jednaki  $-1$ , koristeći formulu 9.1 dobivamo

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x).$$

Primijenimo pravilo  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$  i dobijemo

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{k(a-x)(b-x)}.$$

Desna strana može se rastaviti na parcijalne razlomke i zatim se obje strane mogu integrirati po  $x$ . Dobijemo

$$t + C = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{b-x}{a-x}$$

(neodređenim integralom). Kad je  $t = 0$ ,  $x$  je uvijek jednako 0 pa je  $C = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{b}{a}$ , odnosno

$$t + C = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{b-x}{a-x} - \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{ac_B}{bc_A}.$$

Alternativno, ako integriramo od 0 do  $t$ , čemu na desnoj strani odgovara integriranje od  $x(0) = 0$  do  $x(t)$ , dobijemo

$$t - 0 = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{b-x}{a-x} \Big|_0^{x(t)}$$

---

<sup>15</sup>Veličina  $x$  definira se kao  $x = \frac{\xi}{V}$ .

Opet dobivamo isti rezultat, tzv. integrirani zakon brzine

$$t = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{ac_B}{bc_A}.$$

**Zadatak 41.** Ako znamo da je u svakom trenutku  $t$  (u sekundama) ubrzanje protona u nekom električnom polju jednako  $a = -20(1 + 2t)^{-2}$  (akceleracija u  $\text{cm s}^{-2}$ ), odredite brzinu protona u tom polju nakon 3600 sekundi ako je u početnom trenutku brzina iznosila  $30 \text{ cm s}^{-1}$ . Uputa: Ubrzanje je brzina brzine, tj. derivacija brzine po vremenu,

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Slično kao što put iz brzine i brzinu iz akceleracije možemo odrediti integriranjem, možemo odrediti i preneseni naboj  $q$  ako znamo ovisnost jakosti struje  $i$  o vremenu ( $q = \int i dt$ ), s tim da je tu u pravilu početni uvjet  $q(0 \text{ s}) = 0 \text{ C}$  pa kao konstantu integriranja dobivamo nulu (nula kulona). Integriranjem se određuju i momenti inercije ne-diskretnih objekata, ukupna masa i dr.

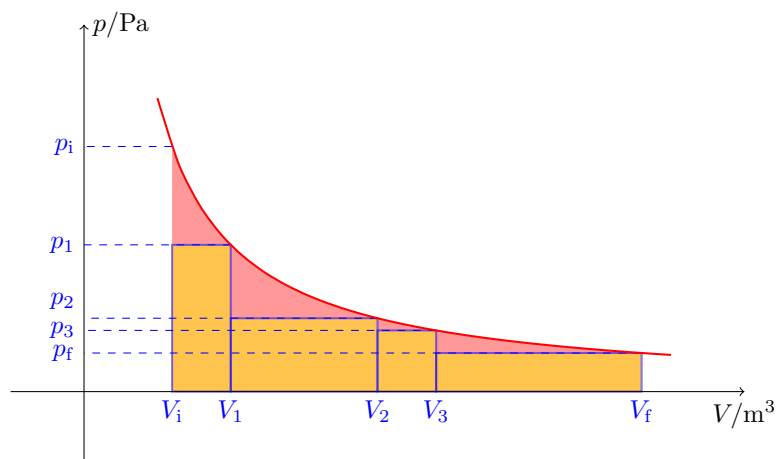
Drugi tip primjene integrala vezan je za situacije kad je neka fizikalna veličina definirana putem integrala. To se posebno odnosi na rad  $w$ . U ovom se slučaju pojavljuju određeni integrali čije su granice određene početnim i konačnim stanjem sustava koji vrši rad.

Postoje različite vrste rada, a sve su za neprekidne procese definirane putem integrala.

- **Mehanički rad** uslijed djelovanja sile iznosa  $F(x)$  za pravocrtni<sup>16</sup> pomak  $x$  od pozicije  $a$  do pozicije  $b$  definiran je s  $w = \int_a^b F(x) dx$ .
- **Volumni rad**  $w = - \int_{V_i}^{V_f} p(V) dV$  (za reverzibilnu promjenu<sup>17</sup> volumena od  $V_i$  do  $V_f$ ; ovdje je  $p(V)$  tlak pri volumenu  $V$ ).
- **Kemijski rad**  $w = \int_{n_1}^{n_2} \mu(n) dn$  (za promjenu množine od  $n_1$  do  $n_2$ ; ovdje je  $\mu(n)$  kemijski potencijal promatrane komponente kad joj je množina  $n$ ). U ovoj skripti nećemo raditi primjere s kemijskim radom.

<sup>16</sup>Za pomake duž krivulje trebat će nam krivuljni integrali, vidi poglavlje ??.

<sup>17</sup>Reverzibilna ekspanzija/kompresija može se zamisliti kao niz ireverzibilnih ekspanzija/kompresija, kod kojih su promjene volumena infinitezimalno male. Kako se kod ireverzibilne promjene volumena izvršeni rad dobiva kao umnožak konačnog tlaka i iznosa promjene volumena, formula za reverzibilnu ekspanziju/kompresiju može se shvatiti kao specijalni slučaj definicije određenog integrala, vidi sliku 5.12.



Slika 5.12: Volumni rad pri reverzibilnoj kompresiji/ekspanziji.

- **Električni rad**  $w = \int_a^b \frac{k_e q_1 q_2}{r^2} dr$  (rad izvršen za pomicanje naboja  $q_1$  od udaljenosti  $r = a$  do udaljenosti  $r = b$  u odnosu na naboj  $q_2$ ;  $k_e = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$  je Coulombova konstanta).

**Primjer 179.** Po drugom Newtonovom zakonu vrijedi  $F(t) = m\dot{v}(t)$  te je odgovarajući mehanički rad pri pravocrtnom pomaku od  $a$  do  $b$  jednak

$$\begin{aligned} w &= \int_a^b F(x) dx = m \int_a^b \frac{dv}{dt} dx = \{ dx = v dt \} = \\ &= m \int_a^b \frac{dv}{dt} v dt = m \int_{v_a}^{v_b} v dv = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_k. \end{aligned}$$

Dakle, za svaku silu je pripadni mehanički rad jednak promjeni kinetičke energije.

S druge strane, ako sila  $F$  (neprekidno) ovisi samo o poziciji tijela  $x$ , onda mora postojati antiderivacija od  $F$ , tj. funkcija pozicije  $-V$  takva da je  $-V'(x) = F(x)$  za sve  $x$  i tu antiderivaciju zovemo potencijalnom energijom tijela. U tom je slučaju  $w = \int_a^b F(x) dx = V_a - V_b = -\Delta V$ . Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju  $-V$  i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo konzervativnim silama. Među konzervativne sile spadaju konstantna sila ( $V(x) = -Fx + C$ ) i sila elastične opruge  $F(x) = -kx$  ( $V(x) = \frac{kx^2}{2} + C$ ). Za takve sile kombinacija prethodna dva rezultata

daje

$$\Delta E_k = -\Delta V,$$

tj. zakon očuvanja energije.

**Primjer 180.** Rad potreban da se dva naboja iz beskonačnosti dovedu na razmak  $x$  (izvršen protiv unutarnje sile) jednak je radu potrebnom da se takvi naboji razdvoje s početnog razmaka  $R$ :

$$w = \int_R^\infty \frac{k_e q_1 q_2}{r^2} dr = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{k_e q_1 q_2}{x} + \frac{k_e q_1 q_2}{R} \right) = \frac{k_e q_1 q_2}{R}.$$

To vrijedi za svaki  $R \geq 0$  te je posljednjim izrazom definiran elektrostatski potencijal za dva naboja na razmaku  $R$ .

**Primjer 181.** Za idealni plin, reverzibilna promjena volumena od  $V_1$  do  $V_2$ , uz konstantnu množinu i temperaturu, uzrokuje volumni rad

$$w = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

Ako se primjerice nekom idealnom plinu pri izotermnoj ekspanziji volumen povećao se osam puta,  $w = -nRT \ln 8$ .

Određeni integrali se koriste i za određivanje promjena iznosa termodinamičkih funkcija stanja (entalpije, entropije, ...). Funkcije stanja su funkcije čije promjene tijekom bilo kojeg procesa ovise samo o početnom i konačnom stanju, a ne i o samom procesu, tj. međustanjima. Primjerice, promjena entalpije  $H$  se za izobarne procese računa kao

$$\Delta H = \int_{T_i}^{T_f} C_p(T) dT,$$

a veza između promjene entalpije i unutrašnje energije za izobarne procese dana je s

$$\Delta H = \Delta U + p\Delta V$$

( $\Delta V$  je razlika konačnog i početnog volumena). Ovdje je zgodno napomenuti da predznak promjene entalpije određuje je li proces egzoterman ( $\Delta H < 0$ ) ili endoterman ( $\Delta H > 0$ ).

**Primjer 182.** Odredimo  $\Delta H$  i  $\Delta U$  ako se množina  $n$  dušika izobarno (dakle, pri konstantnom tlaku  $p$ ) zagrije od  $T_i$  do  $T_f$ , uz pretpostavku da se pritom

dušik ponaša kao idealan plin i da se za takvo zagrijavanje molarni toplinski kapacitet  $C_{p,m} = \frac{C_p}{n}$  može aproksimirati funkcijom oblika

$$C_{p,m}(T) = a + bT + \frac{c}{T^2}.$$

Imamo prvo

$$\begin{aligned} \Delta H &= \int_{T_i}^{T_f} C_p(T) dT = \int_{T_i}^{T_f} an + bnT + \frac{cn}{T^2} dT = \\ &= anT + bn\frac{T^2}{2} - \frac{cn}{T} \Big|_{T_i}^{T_f} = an(T_f - T_i) + \frac{bn}{2}(T_f - T_i)^2 - cn \left( \frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_i} \right). \end{aligned}$$

Iz pretpostavke da imamo idealni plin slijedi  $\Delta V = \frac{nR}{p}(T_f - T_i)$  pa je

$$\Delta U = \Delta H - nR\Delta T.$$

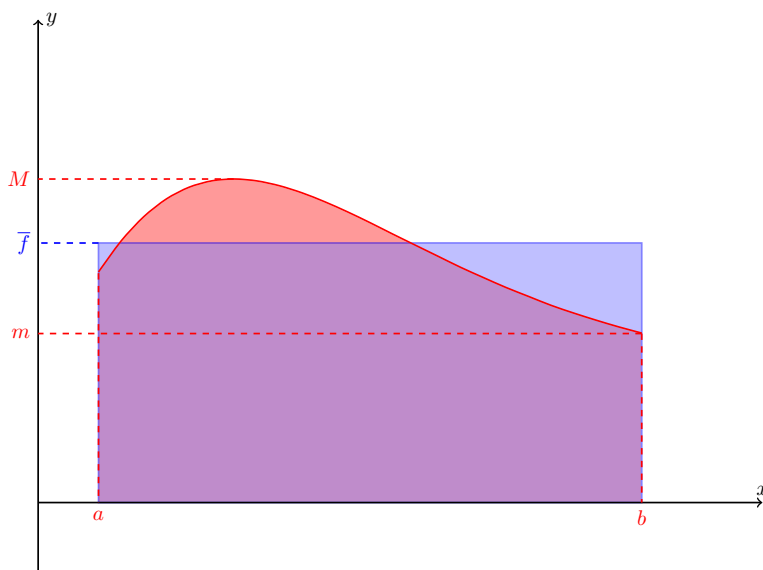
Treći tip primjena integrala vezan je za određivanje prosječne vrijednosti neprekidne funkcije na segmentu, a to se temelji na teoremu srednje vrijednosti za integrale. Naime, znamo da neprekidne funkcije na segmentu postižu svoju minimalnu i maksimalnu vrijednost  $m$  i  $M$  (to nam kaže Bolzano-Weierstraßov teorem). Prosječna vrijednost se, logično, mora nalaziti negdje između minimalne i maksimalne vrijednosti, ali gdje? Uzmimo za ilustraciju situaciju pozitivne neprekidne funkcije, iako se zaključivanje na isti način može proširiti i na sve neprekidne funkcije na segmentu. Znamo da je za takve funkcije  $f$  integral  $\int_a^b f(x) dx$  isto što i (crvena) površina omeđena grafom, vertikalama  $x = a$  i  $x = b$  te s  $x$ -osi (slika 5.13). Ta površina je u biti isto što i „ukupna” vrijednost funkcije  $f$  na tom intervalu (jer je određen integral poopćenje sumiranja na infinitezimalne razmake). Također, ona je sigurno između površina pravokutnika koji su jednako široki kao i ta površina, ali su im visine  $m$  odnosno  $M$ . Očigledno postoji pravokutnik iste širine koji ima točno površinu  $\int_a^b f(x) dx$  (plavo na slici 5.13). Njegova visina  $\bar{f}$  je prosječna vrijednost  $f$  na intervalu  $[a, b]$ . Za taj pravokutnik vrijedi da je dio crvene površine iznad njega jednak manjcima crvene površine ispod njega. Ova razmatranja formaliziraju se kao:

**Teorem 18 (Teorem srednje vrijednosti za integrale).** *Ako je  $f$  neprekidna na  $[a, b]$  i  $m$  je njena minimalna, a  $M$  maksimalna vrijednost na tom intervalu, onda je*

$$(b - a)m \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a)M,$$

odnosno postoji ordinata  $\bar{f} \in [m, M]$  takva da je

$$\int_a^b f(x) dx = \bar{f} \cdot (b - a).$$



Slika 5.13: Teorem srednje vrijednosti za integrale.

Dakle, prosječna (srednja) vrijednost neprekidne funkcije  $f$  na intervalu  $[a, b]$ , se računa kao  $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ . Ako je  $F$  antiderivacija od  $f$ , vidimo da je  $\bar{f} = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$  te je srednja vrijednost  $\bar{f}$  funkcije  $f$  po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti jednaka  $F'(c) = f(c)$  za neki  $c$  između  $a$  i  $b$ .

Ista formula za računanje srednje vrijednosti funkcije se koristi i za po dijelovima neprekidne funkcije. Primijetite i da je formula konzistentna u smislu fizikalnih jedinica: Znamo da je jedinica integrala  $\int_a^b f(x) dx$  jednaka umnošku jedinica od  $f(x)$  i  $x$ , a to se dijeli s razlikom  $b$  i  $a$  (koji su nezavisne varijable, dakle imaju jedinicu od  $x$ ) te rezultat, prosječna vrijednost od  $f$ , ima jedinicu kao i  $f(x)$ .

**Primjer 183.** *Kolika je prosječna temperatura patke iz primjera 82 tijekom pečenja? Vidjeli smo: U svakom trenutku  $t$  tijekom pečenja temperatura patke je*

$$\vartheta(t) = 200^\circ\text{C} - 198^\circ\text{C}e^{-kt \text{ min}^{-1}},$$

gdje je  $k = \left(-\frac{1}{30} \ln \frac{92}{99}\right) \text{ min}^{-1} \approx 0,00244438 \text{ min}^{-1}$ . Patka je pečena nakon  $T = \frac{\text{min}^{-1}}{k} \ln \frac{198}{200-80} \approx 204,868 \text{ min}$ . Dakle, tražimo

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \frac{1}{T-0} \int_0^T \theta(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \left( 200^\circ\text{C} \cdot T + \frac{1}{k} 198^\circ\text{C} (e^{-kT \text{ min}^{-1}} - 1) \right) = \\ &= 200^\circ\text{C} + \frac{120^\circ\text{C} - 198^\circ\text{C}}{\ln \frac{198}{120}} \approx 44,2^\circ\text{C}. \end{aligned}$$



**Primjer 184.** Tokom jednog dana utvrđeno je da je ovisnost temperature  $\theta$  (u  $^{\circ}\text{C}$ ) o vremenu  $t$  (u satima od podneva:  $-12\text{ h} \leq t \leq 12\text{ h}$ ) dobro opisana formulom  $\theta(t) = 0,001\text{ }^{\circ}\text{C h}^{-4} t^4 - 0,280\text{ }^{\circ}\text{C h}^{-2} t^2 + 25^{\circ}\text{C}$ . Tada je prosječna vrijednost temperature tog dana

$$\frac{1}{24\text{ h}} \int_{-12\text{ h}}^{12\text{ h}} \theta(t) dt = 15,7^{\circ}\text{C}.$$

**Primjer 185.** Kolika je prosječna gustoća nehomogenog štapa i gdje mu je centar mase? Uzmimo da je duljina štapa  $L$  i da je ovisnost mase opisiva kao neprekidna funkcija udaljenosti od jednog kraja:  $m(x)$ ,  $0 \leq x \leq L$  (dakle, pretpostavljamo da je masa uniformno raspoređena duž štapa, tj. da  $\Delta m/\Delta x$  ne ovisi o duljini dijela  $\Delta x$ ). Tada je ovisnost gustoće o poziciji opisiva kao  $\rho(x) = m'(x)$ . Ukupna je masa štapa u tom slučaju

$$M = \int_0^L \rho(x) dx,$$

prosječna gustoća je

$$\bar{\rho} = \frac{M}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L \rho(x) dx,$$

a poziciju  $X$  centra mase dobijemo iz uvjeta

$$MX = \int_0^L x \rho(x) dx.$$

Posljednji je naime integral infinitezimalna verzija sume  $\sum m_i x_i$ .

Posljednji tip primjena vezan je za vjerojatnosni račun, posebice u kvantnoj teoriji. Tu je potrebno računanje raznih vjerojatnosti tzv. kontinuiranih slučajnih varijabli. Kako bi primjeri zadataka s integralima vezani za ovu temu imali smisla, dajemo kratak, ne potpuno precizan, uvod u ovu tematiku. U vjerojatnosti razmatramo **slučajne pokuse**, tj. aktivnosti za koje su poznati mogući ishodi, ali nije moguće unaprijed predvidjeti koji će se od njih dogoditi. Za dani slučajni pokus pojedinačni mogući ishodi nazivaju se elementarnim događajima, a skup svih elementarnih događaja zove se **vjerojatnosni prostor** (oznaka  $\Omega$ ). Podskupovi od  $\Omega$  nazivaju se (slučajnim) događajima. U pravilu je zgodno elementarne događaje poistovjetiti s realnim brojevima. To činimo tako da slučajni pokus opišemo **slučajnom varijablom**. Slučajna varijabla je funkcija  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Slučajne varijable mogu biti diskretne (ako im je slika konačna ili prebrojiva) ili kontinuirane (najčešće kad im je slika interval). Upravo kontinuirane slučajne varijable su povezane s integralima.

**Primjer 186.** Ako je slučajni pokus bacanje igraće kockice, elementarni događaji su  $\square$ ,  $\square$ ,  $\square$ ,  $\square$ ,  $\square$  i  $\square$ , tj. vjerojatnosni prostor  $\Omega$  ima šest elemenata. Primjer događaja je „pao je paran broj“, tj.  $A = \{\square, \square, \square\} \subseteq \Omega$ . Prikladna slučajna varijabla za ovaj pokus bila bi  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s  $X(\square) = 1$ ,  $X(\square) = 2$ ,  $X(\square) = 3$ ,  $X(\square) = 4$ ,  $X(\square) = 5$ ,  $X(\square) = 6$ . Njome smo elementarne događaje sveli na brojeve  $1, \dots, 6$ . Ovo je primjer diskretne slučajne varijable.

**Primjer 187.** Funkcija  $X$  koja ishodu bacanja novčića (pismo ili glava) pridružuje 0 ili 1 je diskretna slučajna varijabla. Funkcija  $Y$  koja slučajno odabranom studentu pridružuje njegovu visinu je kontinuirana slučajna varijabla.

U kvantnoj teoriji se elektroni opisuju valnim funkcijama  $\psi$  koje zovemo orbitalama. One su kompleksne funkcije koje *indirektno* opisuju vjerojatnost nalaženja elektrona u prostoru.

**Primjer 188.** Opažanje elektrona unutar na nekoj udaljenosti do jezgre je primjer slučajnog pokusa, svaka konkretna udaljenost je elementarni događaj, a svaki raspon udaljenosti je primjer događaja.

Moguće udaljenosti elektrona od jezgre su od 0 pm naviše. Stoga pokus 'promatranja' udaljenosti elektrona do jezgre poistovjećujemo sa slučajnom varijablom  $r$  koja svakoj mogućoj udaljenosti pridružuje njen iznos podijeljena s, npr., pm. To je kontinuirana slučajna varijabla sa slikom  $[0, +\infty)$ .

**Vjerojatnost** je funkcija  $p$  koja svakom slučajnom događaju  $A \subseteq \Omega$  pridružuje njegovu vjerojatnost  $p(A) \in \mathbb{R}$ , pri čemu mora vrijediti:

1. Vjerojatnost nikogog događaja ne može biti negativna:  $p(A) \geq 0$  za sve  $A$ .
2. Sigurno će se desiti neki ishod iz vjerojatnosnog prostora:  $p(\Omega) = 1$ .
3. Ako se događaji  $A_1, A_2, \dots$ , međusobno isključuju (nemaju zajedničkih elemenata), vjerojatnost da se dogodi neki od njih jednaka je zbroju njihovih vjerojatnosti:  $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = p(A_1) + p(A_2) + \dots$  ako  $A_i \cap A_j = \emptyset$  za sve parove indeksa  $i, j$ .

Iz navedenih svojstava slijedi da su vjerojatnosti uvijek brojevi između 0 i 1:  $0 \leq p(A) \leq 1$  za sve  $A \subseteq \Omega$ . Primijetimo i da se za svaki događaj  $A$  („dogodilo se  $A$ “) on i njegov suprotni događaj  $A^c = \Omega \setminus A$  („nije se dogodio  $A$ “) međusobno isključuju, a u uniji daju čitav  $\Omega$ . Stoga je  $p(A) + p(A^c) = p(\Omega) = 1$ , te vrijedi sljedeća formula za **vjerojatnost suprotnog događaja**:

$$p(A^c) = 1 - p(A).$$

U slučaju kontinuiranih slučajnih varijabli u pravilu postoji **funkcija gustoće vjerojatnosti**  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da se vjerojatnost da takva slučajna varijabla poprimi vrijednost najviše  $b$  može izračunati kao

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^b \varphi(x) dx.$$

Budući da vjerojatnost ne može nikad biti negativna, a  $b$  može biti i  $+\infty$ , vidimo da kao funkcije gustoće u obzir dolaze samo pozitivne funkcije koje i lijevo i desno imaju  $x$ -os kao horizontalnu asimptotu. Pritom,  $\varphi(x) = 0$  ako  $x$  nije u slici funkcije  $X$ , tj. ako nije pridružen nikojem elementarnom događaju. Nadalje, budući da je  $p(\Omega) = 1$ , slijedi  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$  (posljednji se uvjet zove **normiranost funkcije gustoće**). Vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi iznos barem  $a$  je  $p(X \geq a) = 1 - p(X < a)$ , dakle vrijedi

$$p(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Također se lako vidi da vrijedi i

$$p(a \leq X \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a) = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Dakle, vjerojatnost da slučajna varijabla  $X$  poprimi vrijednosti između  $a$  i  $b$  se može poistovjetiti s površinom koju s osi  $x$  zatvara njena funkcija gustoće  $\varphi$ , između vertikalna  $x = a$  i  $x = b$ . To je vjerojatnosna interpretacija određenog integrala. Posebno, ako je  $\varphi$  funkcija gustoće slučajne varijable  $X$ , vjerojatnost  $p(X = a) = p(a \leq X \leq a)$  je 0 za sve vrijednosti  $a$  jer bi se morao računati  $\int_a^a \varphi(x) dx$ , a taj je uvijek 0. Dakle, za kontinuirane slučajne varijable je vjerojatnost da poprima bilo koju pojedinačnu vrijednost uvijek 0. Vidimo dakle da iznosi  $\varphi(x)$  nisu vjerojatnosti da  $X$  poprimi vrijednost  $x$ . Ipak, za jedinični raspon  $x \pm 1/2$  vjerojatnost da kontinuirana slučajna varijabla postiže vrijednosti u tom rasponu ( $p(x - 1/2 \leq X \leq x + 1/2)$ ) možemo ugrubo procijeniti s  $\varphi(x)$ .

Često je potrebno odrediti i **očekivanje (očekivana ili prosječna vrijednost)** slučajne varijable  $X$ . Ona se definira kao

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx.$$

Valne funkcije iz kvantne teorije definiraju određene funkcije gustoće vjerojatnosti. Konkretno, za valnu funkciju  $\psi$  (koja je, rekli smo, kompleksna) je funkcija  $|\psi|^2 = \psi^* \psi$  uvijek realna. Prema Bornovoj interpretaciji valne funkcije, funkcija  $|\psi|^2$  je funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona u

prostoru (i ovisi o tri prostorne varijable; o tome više u poglavlju ??). Često se koristi i **radijalna gustoća vjerojatnosti**

$$\phi(r) = 4\pi r^2 |\psi|^2,$$

koja opisuje vjerojatnost da elektron bude na nekoj udaljenosti  $r$  od jezgre. Ona je funkcija samo jedne varijable  $r$  koja opisuje udaljenost elektrona do jezgre, dakle je domena od  $\phi$  interval  $[0, \infty)$ .

**Primjer 189.** *Odredimo prosječni (dakle, očekivani) polumjer vodikove 1s orbitale. 1s orbitala vodikova atoma je valna funkcija  $\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{a_0^3 \pi}} \cdot e^{-r/a_0}$ , gdje je  $a_0 = 52,9 \text{ pm}$  Bohrov radijus (za  $r \geq 0$ ). Stoga je radijalna funkcija gustoće*

$$\phi_{1,0,0}(r) = 4r^2 \pi \psi_{1,0,0}^2(r) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0}$$

pa je

$$\langle r \rangle = \int_0^{+\infty} r \phi(r) dr = \frac{4}{a_0^3} \int_0^{+\infty} r^3 e^{-2r/a_0} dr.$$

Koristeći formulu 5.2 dobivamo

$$\langle r \rangle = \frac{4}{a_0^3} \cdot \frac{3!}{(2/a_0)^4} = \frac{3}{2} a_0.$$

Uočite: Prosječna tj. očekivana udaljenost elektrona od jezgre je  $\frac{3}{2}$  Bohrova radijusa, dok je udaljenost za koju je  $\psi_{1,0,0}^2$  maksimalna („najvjerojatnija” udaljenost) jednaka Bohrovom radijusu. Dakle: Očekivani rezultat ne mora biti isto što i rezultat koji odgovara maksimumu funkcije gustoće (nije svaka distribucija vjerojatnosti normalna). No, kako  $r$  može poprimiti bilo koju vrijednost u intervalu  $I$ , prema već spomenutom je vjerojatnost da 1s elektron nađemo točno na nekoj udaljenosti od jezgre, pa bila to i „najvjerojatnija” udaljenost  $a_0$  ili očekivana  $\frac{3}{2}a_0$ , jednaka je nuli. Jedine nenul vjerojatnosti koje možemo odrediti u slučaju da je vjerojatnost opisana na nekom intervalu definiranom i neprekidnom funkcijom gustoće, su vjerojatnosti da rezultat bude unutar nekog intervala. Primjerice, vjerojatnost da će naš elektron biti na udaljenosti između  $a_0$  i  $\frac{3}{2}a_0$  jednak je površini ispod grafa od  $\phi_{1,0,0}$  i između navedenih apscisa (iznosi  $\int_{a_0}^{3a_0/2} \phi_{1,0,0}(r) dr = (10e - 17)/(2e^3) \approx 25,3\%$ ).

**Primjer 190.** *Odredimo konstantu normiranja  $N$  2s orbitale vodikova atoma, tj. valne funkcija  $\psi_{2,0,0}(r) = N \left( 2 - \frac{r}{a_0} \right) e^{-r/(2a_0)}$ .*

Opet kao funkciju gustoće uzimamo radijalnu gustoću vjerojatnosti:

$$\phi_{2,0,0}(r) = 4N^2\pi r^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0},$$

a zahtjev normiranja za ovu funkciju glasi  $\int_0^{+\infty} \phi_{2,0,0}(r) dr = 1$ . Računanje integrala na lijevoj strani gornje jednakosti daje

$$\int_0^{+\infty} \phi_{2,0,0}(r) dr = 4N^2\pi \int_0^{+\infty} r^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0} dr = 32N^2 a_0^3 \pi$$

što treba biti jednako 1, dakle je konstanta normiranja

$$N = \sqrt{\frac{1}{32\pi a_0^3}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}.$$

**Primjer 191.** Čestica u jednodimenzionalnoj kutiji je čestica koja se može gibati samo unutar segmenta  $[0, a]$ . Pripadne valne funkcije dane su (za različite kvantne brojeve  $n \in \mathbb{N}_0$ ) formulom

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a.$$

Odgovarajuća funkcija gustoće je prema Bornovoj interpretaciji

$$\varphi_n(x) = A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} = \frac{A^2}{2} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{a}\right).$$

Uvjet normiranja se ovdje svodi na

$$\int_0^a \varphi_n(x) dx = 1.$$

Imamo

$$\int_0^a \varphi_n(x) dx = \int_0^a \frac{A^2}{2} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{a}\right) dx = \frac{A^2}{2} \cdot a,$$

dakle je  $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ .

Valne funkcije čestice u jednodimenzionalnoj kutiji su za različite kvantne brojeve ortonormirane. To (vidi poglavlje 61) znači da su integrali njihovih umnožaka po njihovoj domeni jednaki 0. Računamo dakle

$$\int_0^a \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = A^2 \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx,$$

za što se lako pokaže da je za  $m \neq n$  jednako 0.

Sami odredite očekivanu vrijednost  $\langle x \rangle$  položaja čestice i vjerojatnost  $P$  da se čestica nađe u srednjoj trećini kutije.

## Poglavlje 6

# Klasična algebra vektora i analitička geometrija prostora

### 6.1 Klasična algebra vektora: Vektorski prostori $V^2$ , $V^3$ , $V^2(0)$ i $V^3(O)$

Linearna algebra je područje matematike koje se bavi vektorima i vektorskim prostorima. Vektori se često definiraju kao matematički objekti koji imaju iznos, smjer i orijentaciju. Takva definicija nije točna<sup>1</sup>, no ona opisuje bitna svojstva onih vektora koji se nazivaju geometrijskim ili euklidskim vektorima. U kontekstu vektora spominju se i skalari, odnosno brojevi (u pravilu: realni ili kompleksni) s kojima možemo množiti vektore. Ako kao skalare koristimo realne brojeve, govorimo o realnim vektorskim prostorima. Svi vektorski prostori u ovom poglavlju su realni.

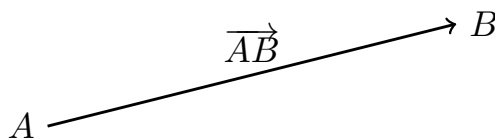
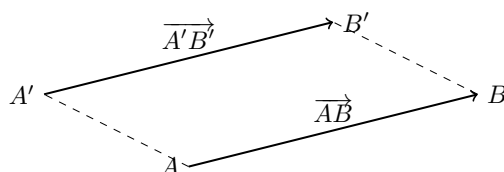
Mnoge fizikalne veličine se (uz odabir jedinice) mogu jednoznačno opisati brojevima: masa, gustoća, duljina, površina, volumen, energija, rad, ... Takve veličine zovu se **skalarnim veličinama**. Možemo reći i da su to one veličine koje se ne mijenjaju promjenom koordinatnog sustava u kojem opisujemo neki objekt.

Geometrijski se vektori definiraju kao objekti koji imaju iznos (duljinu), smjer (pravac) i orijentaciju (smjer). **Vektorske veličine** su one fizikalne veličine za koje nije dovoljan jedan broj da ih opiše, primjerice brzina, ubrzanje, sila, dipolni moment, ... Pomoću vektora se mogu opisati i različita preslikavanja ravnine ili prostora, recimo translacije, rotacije, ...

U ovom poglavlju baviti ćemo se računom s geometrijskim vektorima u ravnini (za njih kažemo da se nalaze u vektorskom prostoru  $V^2$  odnosno

---

<sup>1</sup>Pravilna definicija glasi: Vektor je element vektorskog prostora. Što je vektorski prostor saznat ćemo kasnije, u poglavlju 8.2.

Slika 6.1: Orijentirana dužina  $\overrightarrow{AB}$ .Slika 6.2: Dvije orijentirane dužine koje predstavljaju isti vektor u prostoru  $V^2$ .

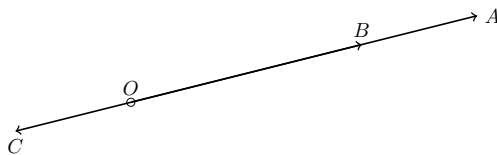
$V^2(O)$ ) i u uobičajenom trodimenzionalnom prostoru (za njih kažemo da se nalaze u vektorskom prostoru  $V^3$  odnosno  $V^3(O)$ ). Takvi vektori prikazuju se kao orijentirane dužine. **Orijentirana dužina**  $\overrightarrow{AB}$  je dužina kojoj je definirano koja od dvije rubne točke je početak ( $A$ ), a koja kraj ( $B$ ), vidi sliku 6.1. U slučaju prostorâ  $V^2(O)$  i  $V^3(O)$  vektori su orijentirane dužine kojima je početak u fiksnoj točki (ishodištu)  $O$ , dakle elementi tih prostora (vektori) su **radij-vektori**  $\overrightarrow{OT}$  različitih točaka  $T$  u ravnini odnosno prostoru. Prostore  $V^2(O)$  i  $V^3(O)$  nazivamo dvo- odnosno trodimenzionalnim prostorima radij-vektora.

U prostorima  $V^2$  i  $V^3$  podrazumijeva se da sve orijentirane dužine koje se mogu dobiti translacijom <sup>2</sup> jedne te iste orijentirane dužine predstavljaju isti vektor  $\vec{v}$ . Bilo koja od tih orijentiranih dužina zove se **reprezentantom vektora**  $\vec{v}$ . Iako bi prema opisanom formalno u  $V^2$  i  $V^3$  trebalo imati različite oznake za vektor i njegov reprezentant, uobičajeno je pisati  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  ako je  $\overrightarrow{AB}$  odabrani reprezentant vektora  $\vec{v}$ . U  $V^2(O)$  i  $V^3(O)$  svaki vektor ima samo po jednog reprezentanta (onog s početkom  $O$ ), a u  $V^2$  i  $V^3$  svaki vektor ima beskonačno mnogo reprezentanata.

Kao što je rečeno, geometrijski vektori su objekti koji su opisani s tri podatka: smjer, orijentacija i iznos.

Duljina dužine koja je reprezentant vektora  $\vec{v}$  zove se **iznos (duljina)**

<sup>2</sup>Ovdje ćemo pod „ $\overrightarrow{A'B'}$  je translirana  $\overrightarrow{AB}$ ” podrazumijevati:  $ABB'A'$  je paralelogram, vidi sliku 6.2.



Slika 6.3: Vektori  $\vec{OA}$  i  $\vec{OB}$  su istog smjera i iste orijentacije, a vektori  $\vec{OA}$  i  $\vec{OC}$  su istog smjera i suprotne orijentacije.

**vektora**  $\vec{v}$  i označava s  $|\vec{v}|$  ili jednostavno s  $v$ . Ukoliko naši geometrijski vektori predstavljaju veličine čija fizikalna dimenzija nije duljina (npr. sile, brzine, ...), podrazumijeva se da su duljine geometrijskih vektora kojima ih prikazujemo razmjerne njihovim iznosima. Primjerice, dvije orijentirane dužine koje prikazuju sile iznosa 1 N i 5 N imat će duljine u omjeru 1 : 5.

Za vektore čiji reprezentanti leže na paralelnim pravcima kažemo da imaju isti **smjer**. Ako za dva vektora *istog smjera* odaberemo reprezentante  $\vec{OA}$  i  $\vec{OB}$  s istim početkom  $O$ , kažemo da ta dva vektora imaju istu **orijentaciju** ako su točke  $A$  i  $B$  s iste strane točke  $O$ , a ako je  $O$  između  $A$  i  $B$  kažemo da imaju suprotnu orijentaciju (vidi sliku 6.3).<sup>3</sup>

**Nulvektor** je (geometrijski) vektor  $\vec{0}$  čijem se reprezentantu početak i kraj podudaraju. Vizualno se reprezentira točkom. Njegov iznos je 0, a uzima se da je istog smjera i iste orijentacije kao bilo koji drugi vektor. Za dani vektor  $\vec{v}$  se s  $-\vec{v}$  označava vektor istog iznosa i smjera kao  $\vec{v}$ , ali suprotne orijentacije (**suprotni vektor** vektora  $\vec{v}$ ).

Ponekad se govori i o jediničnim vektorima. To ima smisla ako smo fiksirali jedinicu za mjerenje duljine. U tom slučaju sve vektore kojima je duljina 1 (jedinice) zovemo **jediničnim vektorima**. Uočimo da ako odaberemo bilo koju duljinu, primjerice duljinu brida  $a$  jedinične ćelije kubične kristalne strukture, kao jedinicu duljine, imamo jedinične vektore, odnosno stvarna duljina jediničnog vektora ovisi o odabiru jedinice i ne mora biti 1 m, 1 cm, 1 mm i sl., već može biti, primjerice, 223,45 pm.

Pomoću geometrijskih vektora se uz mnoge fizikalne probleme mogu rješavati i problemi određivanja razmaka (duljine dužine), kutova dvaju pravaca, površine (paralelograma, trokuta, ...) ili pak volumena (paralelepipeda, piramide, ...) iz poznavanja koordinata točaka koje određuju vrhove promatranog objekta. Pomoću geometrijskih vektora i njihovih koordinata se također opisuju kristalne strukture. Pravo je stoga prvo pitanje: Što su to koordinate?

<sup>3</sup>Ponekad se u literaturi umjesto izraza smjer i orijentacija koriste izrazi pravac, za ono što ovdje zovemo smjerom, i smjer, za ono što ovdje zovemo orijentacijom.



Da bismo na to pitanje mogli odgovoriti, trebaju nam dvije algebarske operacije s vektorima.

### 6.1.1 Množenje geometrijskih vektora skalarom i zbrajanje geometrijskih vektora

Da bismo govorili o vektorskom prostoru, nije dovoljno opisati njegove elemente: Vektorski prostori su prije svega karakterizirani dvjema algebarskim operacijama, a to su zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom. Podsjećamo da su u kontekstu geometrijskih vektora skalari jednostavno realni brojevi.

**Definicija 31** (Množenje geometrijskog vektora skalarom). *Neka je  $\vec{v}$  geometrijski vektor i  $x$  skalar. Umnožak  $x\vec{v}$  definira se kao geometrijski vektor istog smjera kao  $\vec{v}$  koji ima iznos*

$$|x\vec{v}| = |x| |\vec{v}|,$$

*a kojemu je orijentacija ista kao od  $\vec{v}$  ako je  $x \geq 0$ , a inače suprotna.*

Uočimo da iz definicije slijedi da nulvektor pomnožen bilo kojim skalarom daje nulvektor, a bilo koji vektor pomnožen s nulom daje nulvektor:

$$x \cdot \vec{0} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

za sve skalare  $x$  i vektore  $\vec{v}$ .

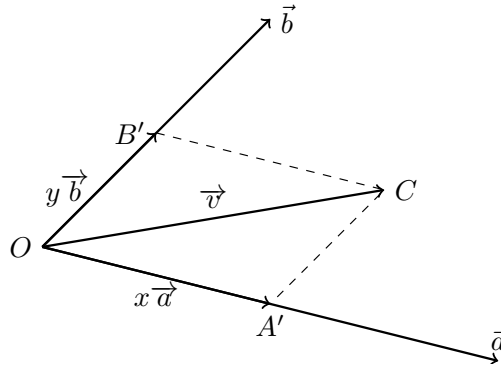
Korisno je uočiti: jedinični vektor (u smislu vektora iznosa 1) istog smjera i orijentacije kao zadani vektor  $\vec{a} \neq \vec{0}$  može se formulom zapisati kao

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{a} \vec{a},$$

dakle vektor koji ima iznos  $x$ , a isti smjer i orijentaciju kao  $\vec{a}$  dobijemo kao

$$\vec{v} = \frac{x}{a} \vec{a}. \quad (6.1)$$

Za dva vektora istog smjera kažemo i da su **kolinearni**. Iz definicije množenja vektorom skalarom je vidljivo: Množenjem vektora skalarom ne može se promijeniti smjer vektora, odnosno  $\vec{a}$  i  $x\vec{a}$  su kolinearni za svaki skalar  $x$  i svaki vektor  $\vec{a}$ . No, vrijedi i obrnuto: Za svaka dva kolinearna vektora postoji skalar takav da se množenjem jednog vektora s njime dobije drugi vektor. Formalno:

Slika 6.4:  $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ .

**Propozicija 4 (Algebarska karakterizacija kolinearnosti).** Geometrijski vektori  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  su kolinearni ako i samo ako postoji skalar  $x$  takav da je  $\vec{v} = x\vec{w}$ .

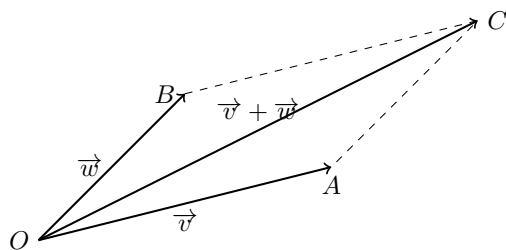
Naime, ako  $\vec{w}$  prvo svedemo na jedinični vektor istog smjera i orijentacije, dakle na  $\frac{1}{w}\vec{w}$ , a taj zatim pomnožimo s  $\pm v$  (ovisno o tome jesu li  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  iste ili suprotne orijentacije), dobit ćemo točno  $\vec{v}$ . Uočimo i da je gornja propozicija jedan razlog zašto smo definirali da je nulvektor  $\vec{0}$  istog smjera kao i svaki drugi vektor  $\vec{w}$  (uzimanjem  $x = 0$  vektor  $\vec{v} = \vec{0}$  zadovoljava gornju propoziciju).

Prema prethodnom, uz odabir jednog nenul-vektora (ne mora biti jedinični!) svi vektori njegovog smjera opisani su po jednim skalarom. Dakle, uz fiksirani vektor  $\vec{a}$  svi vektori  $\vec{v}$  njegovog smjera mogu se opisati jednom koordinatom  $x$  koja je skalar sa svojstvom  $\vec{v} = x\vec{a}$ .

No, što ćemo s vektorima u  $V^2$  odnosno  $V^2(O)$ ? Pogledajmo prvo sliku 6.4 na kojoj uzimamo da su vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  fiksirani (i po potrebi translahirani tako da imaju zajednički početak  $O$ ), a  $\vec{v}$  je bilo koji drugi vektor u ravini (dakle varijabilan). Za taj vektor  $\vec{v}$  također odabiremo reprezentanta  $\vec{OC}$  s početkom u  $O$ . Ako nacrtamo paralelogram  $OA'CB'$  kojem je jedna dijagonala dužina  $OC$ , a stranice  $\vec{OA'}$  i  $\vec{OB'}$  leže na pravcima vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , dobili smo dva vektora  $\vec{OA'}$  i  $\vec{OB'}$  smjera istog kao  $\vec{a}$  odnosno  $\vec{b}$ . Prema prethodnom postoje jedinstveni skalari  $x$  odnosno  $y$  takvi da je  $\vec{OA'} = x\vec{a}$  i  $\vec{OB'} = y\vec{b}$ . Da bismo rekonstruirali vektor  $\vec{v} = \vec{OC}$  uvodimo drugu operaciju s geometrijskim vektorima, a to je zbrajanje, i pišemo  $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ .

Dakle, zbrajanje geometrijskih vektora definira se pomoću pravila paralelograma:

**Definicija 32 (Zbrajanje geometrijskih vektora).** Ako su  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  dva vektora

Slika 6.5: Definicija zbroja  $\vec{v} + \vec{w}$ .

i  $\vec{OA}$  i  $\vec{OB}$  njihovi reprezentanti sa zajedničkim početkom, onda je zbroj  $\vec{v} + \vec{w}$  definiran ovako (vidi sliku 6.5: Dopunimo  $AOB$  do paralelograma  $AOBC$  (dakle,  $\vec{OA}$  i  $\vec{OB}$  su dvije stranice tog paralelograma). Tada je  $\vec{OC}$  reprezentant vektora  $\vec{v} + \vec{w}$ .

Uočimo da u slučaju da su  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  kolinearni u gornjoj definiciji imamo paralelogram koji je degeneriran u dužinu. Ako su  $\vec{v} = \vec{OA}$  i  $\vec{w} = \vec{OB}$  kolinearni i istog smjera, onda je  $\vec{v} + \vec{w} = \vec{OC}$ , gdje je duljina dužine  $\vec{OC}$  jednaka  $v + w$ , a ako su  $\vec{v} = \vec{OA}$  i  $\vec{w} = \vec{OB}$  kolinearni i suprotnog smjera, onda je  $\vec{v} + \vec{w} = \vec{OC}$ , gdje je duljina dužine  $\vec{OC}$  jednaka  $|v - w|$ , a orijentacija je jednaka orijentaciji duljeg od vektora  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$ .

**Napomena 15.** Može se pokazati da se vektori u  $V^2$  i  $V^3$  mogu zbrajati koristeći pravilo trokuta: zbroj vektora  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , ... se može dobiti tako da odaberemo predstavnika od  $\vec{b}$  s početkom u kraju od  $\vec{a}$ , predstavnika od  $\vec{c}$  s početkom u kraju od  $\vec{b}$ , itd. Zbroj  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots$  je onda vektor određen orijentiranom dužinom čiji početak se podudara s početkom od  $\vec{a}$ , a kraj s krajem zadnjeg od zbrajanih vektora.

**Oduzimanje geometrijskih vektora** je definirano kao pribrajanje suprotnog vektora:

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}).$$

Zbrajanje geometrijskih vektora ima svojstva poput zbrajanja brojeva, a množenje geometrijskih vektora skalarima ima svojstva poput množenja brojeva: Zbrajanje vektora je **asocijativno** (kod uzastopnog zbrajanja ne trebaju nam zagrade), ima neutralni element (**nulvektor** pribrojen bilo kojem vektoru ne mijenja taj vektor), svaki vektor ima svoj suprotni vektor (zbroj vektora i njegovog suprotnog vektora daje nulvektor).

Formulama se gornja svojstva izražavaju ovako: Za sve  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  iz istog od prostora  $V^2$ ,  $V^3$ ,  $V^2(0)$ ,  $V^3(O)$  vrijedi

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}),$$

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v},$$

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0},$$

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}.$$

Množenje vektora brojem 1 ga ne mijenja, množenje vektora skalarom je **distributivno** prema zbrajanju (možemo izlučivati skalar odnosno vektor) i **kvaziasocijativno** (ako množimo dva skalara i jedan vektor, smijemo seliti zagrade). Formulama se gornja svojstva izražavaju ovako: Za sve  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  iz istog od prostora  $V^2$ ,  $V^3$ ,  $V^2(0)$ ,  $V^3(O)$  i za sve skalare  $x$  i  $y \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v},$$

$$x(\vec{v} + \vec{w}) = x\vec{v} + x\vec{w},$$

$$(x + y)\vec{v} = x\vec{v} + y\vec{v},$$

$$(xy)\vec{v} = x(y\vec{v}).$$

**Primjer 192.** Jedna od primjena zbrajanja geometrijskih vektora i množenja geometrijskih vektora skalarima je određivanje centra mase sustava od  $n$  čestica poznatih masa  $m_1, \dots, m_n$ . Ako su relativne pozicije tih čestica  $s$  obzirom na odabrano ishodište opisane radij-vektorima  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ , pozicija centra mase dana je radij-vektorom

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i,$$

gdje je  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  ukupna masa svih čestica.

**Primjer 193.** Sustav od  $n$  naboja iznosa  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  na pozicijama  $s$  radij-vektorima  $\vec{r}_i$  definira dipolni moment

$$\vec{\mu} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i.$$

Dipolni moment (osim u slučaju da je zbroj  $Q$  svih naboja 0) ovisi o odabiru ishodišta: Pomaknemo li ishodište za vektor  $\vec{R}$ , dipolni moment će se promijeniti za  $-Q\vec{R}$ .



**Ponovimo bitno...** Geometrijski vektori prikazuju se orijentiranim dužinama i određeni su svojim iznosom, smjerom i orijentacijom. Geometrijske vektore možemo međusobno zbrajati, što je definirano pravilom paralelograma, oduzimati, što je definirano kao pribrajanje suprotnog vektora, te množiti skalarima, što ne mijenja smjer vektora. 🦆🦆🦆

### 6.1.2 Baza i koordinate u $V^2$ , $V^2(O)$ , $V^3$ , $V^3(O)$

Kao što smo vidjeli, ako gledamo samo jedan pravac, odabirom jednog nenul-vektora tog smjera svi ostali se mogu opisati po jednim skalarom (koordinatom). Nakon definicije zbrajanja vektora moguće je, uz fiksiranje dvaju odnosno triju vektora, svaki vektor iz  $V^2$ ,  $V^2(O)$ ,  $V^3$ ,  $V^3(O)$  prikazati s po dva odnosno tri skalara.

**Definicija 33** (Baza i koordinate u  $V^2$  odnosno  $V^2(O)$ ). *Ako su  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  dva fiksirana nekolinearna vektora u ravnini, uređeni par  $(\vec{a}, \vec{b})$  nazivamo bazom ravnine. Baza ravnine zadaje se parametrima  $a$  i  $b$  (iznosi vektora baze) i  $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$  (kut između vektora baze).*

*Ako je zadana baza, svi vektori ravnine mogu se jednoznačno opisati s po dva skalara (koje nazivamo koordinatama tih vektora):  $\vec{v} = [x, y]$  znači da je  $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$  (usp. sliku 6.4).*

U gornjoj definiciji spominjemo **kut vektora** baze, tj. kut između dva vektora. Za dana dva vektora njihov kut se definira kao manji od dva kuta koja zatvaraju njihovi reprezentanti sa zajedničkim početkom. Specijalno, kut između dva vektora poprima iznose u segmentu  $[0, \pi] = [0, 180^\circ]$ . Ako se radi o vektorima baze ravnine, budući da se mora raditi o vektorima različitog smjera, slijedi da je  $0 < \gamma < 180^\circ$ .

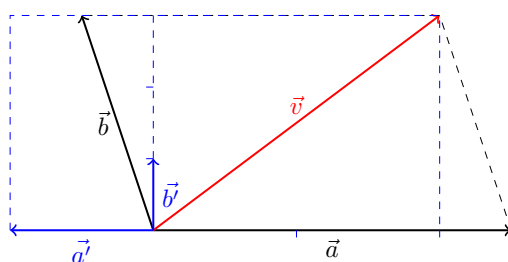
**Zadatak 42.** *Zašto u definiciji baze za  $V^2$  odnosno  $V^2(O)$  tražimo nekolinearnost vektora baze?*

Primijetimo: Budući da je  $\vec{a} = 1\vec{a} + 0\vec{b}$ , vektor  $\vec{a}$  u bazi  $(\vec{a}, \vec{b})$  uvijek ima koordinate  $[1, 0]$ . Analogno, vektor  $\vec{b}$  u bazi  $(\vec{a}, \vec{b})$  uvijek ima koordinate  $[0, 1]$ . No, koordinate vektora u ravnini općenito ovise o odabiru baze.

**Primjer 194.** *Pogledajmo sliku 6.6. Ako vektor  $\vec{v}$  opisujemo u bazi  $(\vec{a}, \vec{b})$  (crno i crveno), vidimo  $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ , dakle su mu koordinate  $[1, 1]$ . Ako pak vektor  $\vec{v}$  opisujemo u bazi*

$$(\vec{a}', \vec{b}')$$

*(plavo i crveno), vidimo  $\vec{v} = -2\vec{a}' + 3\vec{b}'$ , dakle su mu u toj bazi koordinate  $[-2, 3]$ .*



Slika 6.6: Koordinate vektora ovise o odabiru baze.

Slično se dobije u trodimenzionalnom slučaju, pri čemu nam treba pojam (ne)komplanarnosti: Tri vektora u  $V^3$  odnosno  $V^3(O)$  nazivamo **komplanarnim** ako su paralelni istoj ravnini, odnosno ako bi uz odabir reprezentanata sa zajedničkim početkom sva tri reprezentanta bila u istoj ravnini.

**Definicija 34** (Baza i koordinate u  $V^3$  odnosno  $V^3(O)$ ). *Ako su  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  tri fiksirana nekomplanarna vektora u prostoru, kažemo da je uređena trojka  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  baza prostora.*

Baza prostora zadaje se parametrima  $a, b, c$  (iznosi vektora baze) i  $\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$ ,  $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c})$  i  $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$  (kutovi između po dva od njih).

Ako je zadana baza prostora, svi vektori prostora mogu se jednoznačno opisati s po tri skalara (koordinate vektora):  $\vec{v} = [x, y, z]$  znači da je  $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ .

**Zadatak 43.** Zašto smo za bazu trodimenzionalnog prostora tražili da ju sačinjavaju nekomplanarni vektori? Koje su koordinate od  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  s obzirom na bazu  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ?

Kao što je vidljivo iz definicija (i ilustracija), baza bilo kojeg od vektorskih prostora  $V^2$ ,  $V^2(O)$ ,  $V^3$ ,  $V^3(O)$  ne mora se sastojati od međusobno okomitih vektora, niti vektori baze moraju biti iste (jedinične) duljine. Jedini zahtjevi su nekolinearnost (za dvodimenzionalni slučaj) odnosno nekomplanarnost (za trodimenzionalni slučaj). Smisao baze je opisati *sve* vektore prostora  $V^2$  i  $V^2(O)$  s po dva realna broja, odnosno sve vektore prostora  $V^3$  i  $V^3(O)$  s po tri realna broja (koordinatama). Pritom koordinate ovise o odabiru baze, ali kad znamo bazu, dalje se sva geometrijska priča o vektorima svodi na algebru.

**Primjer 195.** Ako netko govori o vektoru  $\vec{v} = [2, -1, 3]$  u prostoru, to nije jednoznačno određeno bez da kaže obzirom na koju bazu su koordinate dane. Ako znamo da se radi o koordinatnom zapisu obzirom na bazu  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , onda znamo da je  $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ .

**Primjer 196.** Poznato je da se triklinski kristalni sustav sastoji od svih kristala čija se jedinična ćelija može opisati kao paralelepiped s bridovima različitih duljina ( $a \neq b \neq c \neq a$ ) koji tvore međusobno različite kuteve ( $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ ), koji su također različiti od pravog kuta.

Želimo li opisivati položaje npr. atoma u triklinskoj kristalnoj strukturi, pogodno ih je opisati pomoću smjerova i duljina bridova jedinične ćelije. Stoga se za takve opise obično kao ishodište bira vrh jedne jedinične ćelije, a kao baza se biraju vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  koji razapinju jediničnu ćeliju. Tako odabrana baza zove se **kristalografska baza**. Radij-vektori točaka jedinične ćelije s vobzirom na kristalografsku bazu imaju kao koordinate brojeve  $x, y, z \in [0, 1)$ . Više o kristalografskim bazama reći ćemo kasnije, a zadad uočimo: Kristalografska baza je samo specijalni slučaj općeg pojma baze prostora, gdje se baza bira u skladu s određenim kristalografskim konvencijama.

U duhu prethodnog primjera i općenito, za bilo koju fiksiranu bazu ravnine paralelogram razapet njenim vektorima i za bilo koju fiksiranu bazu prostora paralelepiped razapet njenim vektorima nazivamo **jediničnom ćelijom**.

Ukoliko su vektori baze međusobno okomiti, govorimo o **ortogonalnoj bazi**. Ako su vektori ortogonalne baze iste, jedinične, duljine govorimo o **ortonormiranoj bazi**. Vektore ortonormiranih baza obično označavamo s  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$ .

Pretpostavimo da je fiksirana baza  $(\vec{a}, \vec{b})$  za  $V^2$  ili  $V^2(O)$ . Tada se zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom može koordinatno zapisati s

$$[x, y] + [x', y'] = [x + x', y + y'],$$

$$\alpha [x, y] = [\alpha x, \alpha y].$$

Analogno, ako je fiksirana baza  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  za  $V^3$  ili  $V^3(O)$ , zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom može koordinatno zapisati s

$$[x, y, z] + [x', y', z'] = [x + x', y + y', z + z'],$$

$$\alpha [x, y, z] = [\alpha x, \alpha y, \alpha z].$$

**Zadatak 44.** Izvedite gornje formule!



**Ponovimo bitno...** Baza za  $V^2$  ili  $V^2(O)$  sastoji se od dva nekomplanarna vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Koordinate vektora u  $V^2$  ili  $V^2(O)$  s obzirom na tu bazu definirane su kao skalari  $x$  i  $y$  sa svojstvom da je promatrani vektor jednak  $x\vec{a} + y\vec{b}$ .

Baza za  $V^3$  ili  $V^3(O)$  sastoji se od dva nekomplanarna vektora  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ . Koordinate vektora u  $V^3$  ili  $V^3(O)$  s obzirom na tu bazu definirane su kao

skalari  $x$ ,  $y$  i  $z$  sa svojstvom da je promatrani vektor jednak  $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ . 🐤🐤

U praksi želimo iz poznatih koordinata vektora saznati koliko su dugi, pod kojim se kutovima nalaze, kakve površine i volumene određuju, tj. želimo algebarski zaključivati o geometrijskim svojstvima i odnosima vektora. Algebarske operacije koje to omogućuju su skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora.

### 6.1.3 Skalarni produkt geometrijskih vektora

Želimo li za vektor kojemu znamo koordinate s obzirom na neku bazu odrediti iznos ili pak za dva vektora kojima znamo koordinate s obzirom na istu bazu odrediti kut među njima, treba nam operacija skalarnog produkta. Skalarni produkt dvaju geometrijskih vektora je broj (skalar) koji se označava s  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ . Ta je operacija osmišljena tako da ima svojstva analogna svojstvima množenja brojeva međusobno:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0},$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}, \quad (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}),$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}), \quad (x\vec{v}) \cdot \vec{w} = x(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

za sve skalare  $x$  i sve vektore  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  iz istog od prostora  $V^2$ ,  $V^2(O)$ ,  $V^3$  odnosno  $V^3(O)$ . Skalarni produkt  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  je definiran ovako:

**Definicija 35 (Skalarni produkt).** *Ako su  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  dva geometrijska vektora, njihov skalarni produkt je*

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v w \cos \varphi,$$

gdje je  $\varphi$  kut između vektora  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$ .

Primijetimo prvo da nam predznak skalarnog produkta daje informaciju o međusobnom položaju pomnoženih vektora: S obzirom na to da iznosi  $v$  i  $w$  ne mogu biti negativni, a da je  $\cos \varphi$  pozitivan, nula ili negativan ovisno o tome je li  $\varphi$  šiljast, pravi ili tupi, zaključujemo: Ako je  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  pozitivan, nula odnosno negativan, vektori  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  zatvaraju šiljast, pravi odnosno tupi kut.

Iz definicije je vidljivo da je

$$v = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}},$$

dakle ako iz koordinata znamo izračunati skalarni produkt vektora sa sobom, gornjom formulom ćemo dobiti njegov iznos.



Također, ako znamo iz koordinata vektora izračunati skalarni produkt dva vektora, isti možemo iskoristiti za računanje kuta između dva vektora. Naime, iz definicije je vidljivo da je

$$\cos \varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{vw} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}},$$

odnosno, budući da je po definiciji  $\varphi$  između 0 i  $\pi$ ,

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}}.$$

Dakle, želimo imati način kojim iz koordinata vektora možemo izračunati njihov skalarni produkt, kako bismo to iskoristili za računanje njihovih iznosa i kutova. Neka su svojim koordinatama u bazi [ zadana dva vektora  $\vec{v} = [x, y, z]$  i  $\vec{w} = [x', y', z']$ . Po definiciji koordinata je  $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$  i  $\vec{w} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$ . Koristeći svojstva skalarnog produkta računamo:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) \cdot (x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}) = \\ &= xx'a^2 + yy'b^2 + zz'c^2 + \\ &+ (xy' + x'y)ab \cos \gamma + (xz' + x'z)ac \cos \beta + (zy' + z'y)ab \cos \alpha. \end{aligned}$$

Dakle, ako znamo bazu, iz koordinata gornjom formulom možemo izračunati skalarni produkt bilo koja dva vektora zadana svojim koordinatama u toj bazi. Ako je baza ortogonalna ( $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ ), formula se pojednostavljuje na

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = xx'a^2 + yy'b^2 + zz'c^2,$$

a ako je još i ortonormirana, dobivamo

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = xx' + yy' + zz'.$$

**Primjer 197.** U nekoj ortogonalnoj bazi čiji su vektori redom duljina  $a = 1 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$  i  $c = 3 \text{ m}$ , vektori  $[-4, 1, 0]$  i  $[1, 1, 0]$  su međusobno okomiti:  $[-4, 1, 0] \cdot [1, 1, 0] = -4 \cdot 1 \text{ m}^2 + 1 \cdot 4 \text{ m}^2 + 0 \cdot 9 \text{ m}^2 = 0$ . Da je pak baza bila ortonormirana, vektori s koordinatama  $[-4, 1, 0]$  i  $[1, 1, 0]$  ne bi bili okomiti.

**Zadatak 45.** Koji kut trebaju zatvarati vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  baze prostora  $V^2$  ako znate da je  $a = b$  i da su vektori koji obzirom na tu bazu imaju koordinate  $[-2, 1]$  i  $[0, 3]$  okomiti?

Zbog  $v = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$  vidimo da se iznos vektora  $\vec{v}$  iz njegovih koordinata računa po pravilu

$$v = \sqrt{x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2 + 2xyab \cos \gamma + 2xyac \cos \beta + 2zyab \cos \alpha}.$$

Ako je baza ortogonalna, formula se pojednostavljuje na

$$v = \sqrt{x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2},$$

a ako je još i ortonormirana, dobivamo

$$v = \sqrt{x^2a + y^2 + z^2}.$$

**Zadatak 46.** Ako se dva atoma neke triklinske kristalne strukture nalaze na pozicijama  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3})$  i  $(0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3})$ , kolika je njihova udaljenost ako znate da su parametri kristalne rešetke dani kao  $a = 100 \text{ pm}$ ,  $b = 200 \text{ pm}$ ,  $c = 150 \text{ pm}$ ,  $\alpha = 65^\circ$ ,  $\beta = 85^\circ$ ,  $\gamma = 70^\circ$ .

**Primjer 198.** Za kristale kubičnog sustava kristalografsku bazu možemo smatrati ortonormiranom.<sup>4</sup> Ako su u jediničnoj ćeliji dva atoma na pozicijama  $A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3})$  i  $B = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0)$ , udaljenost ta dva atoma iznosi

$$\begin{aligned} |AB| &= |\vec{OB} - \vec{OA}| = \left| \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right| = \\ &= \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{14}{36}} = \frac{\sqrt{14}}{6}. \end{aligned}$$

Dakle, ako je duljina brida jedinične ćelije npr.  $a = 320,3 \text{ pm}$ , udaljenost između atoma je  $\frac{\sqrt{14}}{6} \cdot 320,3 \text{ pm} = 199,7 \text{ pm}$ .

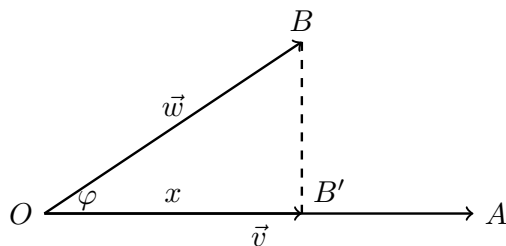
Ako bi se u istoj jediničnoj ćeliji nalazio još jedan atom na položaju  $C = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$  te ako su atomi vezani tako da je  $C$  vezan s  $A$  i  $B$ , kut veze  $\varphi = \angle ACB$  je određen s

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| |\vec{CB}|} = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{15} \\ -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}}{\left| \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{15} \end{bmatrix} \right| \left| \begin{bmatrix} -\frac{2}{15} \\ -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \right|} = \\ &= \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} - \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{25} + \frac{4}{225}} \cdot \sqrt{\frac{4}{225} + \frac{9}{100} + \frac{1}{25}}} = \frac{-\frac{7}{150}}{\frac{133}{900}} = -\frac{6300}{19950} = -0,3158 \end{aligned}$$

te je  $\varphi = 108^\circ 25'$ .

---

<sup>4</sup>Duljinu brida  $a$  jedinične ćelije proglasimo jediničnom duljinom.



Slika 6.7: Ortogonalna projekcija jednog vektora na drugi.

**Zadatak 47.** *Kako biste zadatak iz gornjeg primjera riješili da se radilo o kristalu rompskog sustava s bridovima jedinične ćelije duljina redom 300 pm, 500 pm, 800 pm?*

Druga bitna primjena skalarnog produkta je računanje duljine ortogonalne projekcije jednog vektora na drugi. Recimo da želimo odrediti ortogonalnu projekciju vektora  $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$  na vektor  $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$  i neka je ta ortogonalna projekcija vektor  $\overrightarrow{OB'}$  (vidi sliku 6.7). Ta ortogonalna projekcija je očito kolinearna s  $\vec{v}$ . Neka je njena duljina  $x$ .

Tada iz pravokutnog trokuta  $OBB'$  dobivamo  $x = w \cos \varphi$  pa množenje s  $v$  daje  $xv = vw \cos \varphi = \vec{v} \cdot \vec{w}$ . Dakle, duljina ortogonalne projekcije  $\vec{w}$  na  $\vec{v}$  je

$$x = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}|}.$$

Budući da su  $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$  i  $\overrightarrow{OB'}$  kolinearni, dobivamo (prema formuli 6.1) da je sam projicirani vektor jednak

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{x}{v} \vec{v}.$$

**Primjer 199.** *Rad izvršen djelovanjem sile  $\vec{F}$  pri pomaku  $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  je*

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \theta,$$

*tj. jednak je duljini pomaka pomnoženoj s komponentom sile u smjeru pomaka (ortogonalnom projekcijom).*

Za kraj priče o skalarnom produktu spomenimo jednu važnu nejednakost<sup>5</sup> koja vrijedi skalarni produkt:

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}|^2 \leq (\vec{v} \cdot \vec{v}) \cdot (\vec{w} \cdot \vec{w}),$$

<sup>5</sup>Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog.

odnosno kraće

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq vw.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  kolinearni.



**Ponovimo bitno...** Skalarni produkt vektora omogućuje računanje iznosa vektora i kutova među njima, a definiran je kao umnožak iznosa vektora i kosinusa kuta među njima. Ako je  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  pozitivan, nula odnosno negativan, vektori  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  zatvaraju šiljast, pravi odnosno tupi kut. Iznos vektora jednak je (pozitivnom) drugom korijenu od tog vektora skalarno pomnoženog sa samim sobom. 🦆🦆🦆

### 6.1.4 Vektorski i mješoviti produkt vektora

Iz škole je dobro poznata formula za računanje površine paralelograma kojemu su poznate duljine stranica i kut između njih. Ako su te duljine  $v$  i  $w$ , a kut  $\varphi$ , površina paralelograma je  $vw \sin \varphi$ . Dakle, ako znamo koordinate dvaju vektora  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$ , površinu paralelograma kojeg određuju ( $OACB$  na slici 6.5) možemo dobiti tako da im pomoću skalarnog produkta (kako je opisano u odjeljku 6.1.3) izračunamo iznose i kut, te pomnožimo te iznose i sinus kuta.

No, nama je sad cilj tu površinu povezati s još nečim što je korisno u trodimenzionalnim razmatranjima, a to je određivanje vektora koji je okomit na dva zadana vektora (primijetimo da to u dvodimenzionalnom slučaju nema smisla, dakle se ovaj odjeljak odnosi samo na prostore  $V^3$  i  $V^3(O)$ ).

Prvo primijetimo da ako vektori  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  nisu kolinearni, onda postoji samo jedan smjer koji je istovremeno okomit na oba. Ako pak znamo jedan, bilo koji, vektor  $\vec{u}$  tog smjera, lako skaliranjem dobijemo proizvoljno dug i proizvoljno orijentiran vektor tog smjera (vidi formulu 6.1). Stoga nam treba algebarska operacija koja iz  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  računa neki  $\vec{u} \perp \vec{v}, \vec{w}$ . Ta operacija je vektorski produkt.

**Definicija 36 (Vektorski produkt).** Vektorski produkt dvaju vektora  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  u  $V^3$  ili  $V^3(O)$  je vektor  $\vec{v} \times \vec{w}$  koji je okomit na oba vektora, iznos od  $\vec{v} \times \vec{w}$  je  $v \cdot w \cdot \sin \varphi$ , tj. jednaka je površini<sup>6</sup> paralelograma razapetog s  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$ , a orijentiran je tako da  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$ ,  $\vec{v} \times \vec{w}$  poštuju pravilo desne ruke.<sup>7</sup>

Ako su  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  kolinearni, očito u prostoru postoji beskonačno mnogo na njihovih okomitih smjerova (svi se nalaze u jednoj ravnini okomitoj na njihov). Također,

<sup>6</sup>U jedinici koja je kvadrat jedinice u kojoj se mjere duljine vektora.

<sup>7</sup>Ako dlan desne ruke držimo tako da na njemu leži  $\vec{v}$  te ako kad dlan preko kuta kojeg zatvaraju ta dva vektora — podsjećamo da je to manji od dva moguća kuta — zakrećemo prema vektoru  $\vec{w}$ , onda palac pokazuje orijentaciju od  $\vec{v} \times \vec{w}$ .

u gornjoj definiciji je onda iznos od  $\vec{v} \times \vec{w}$  jednak nuli, dakle je vektorski produkt dva kolinearna vektora uvijek nulvektor (koji je istovremeno okomit na sve vektore i istog smjera kao svi vektori).

**Napomena 16.** Uočimo da gornja definicija duljine vektorskog produkta povlači da bi mu jedinica bila kvadrat jedinice duljine, dakle bi duljina imala fizikalnu dimenziju površine, što baš i nije smisleno. Ako bismo pak dogovorno promijenili jedinicu duljine vektorskog produkta u polaznu jedinicu duljinu, duljina vektorskog produkta bi ovisila o odabranim polaznim jedinicama (recimo, vektorski produkt dvaju okomitih vektora od kojih je jedan dug 1 cm, a drugi 2 cm, imao bi duljinu  $1 \cdot 2 = 2$  cm, ali ako bismo jedinicu duljine promijenili u milimetre isti taj vektorski produkt bi imao duljinu  $10 \cdot 20 = 200$  mm  $\neq 2$  cm).

Dva su moguća rješenja tog problema. Prvi, u skladu sa standardnim matematičkim opisom vektorskog produkta, je sve duljine vektora doživljavati kao čiste brojeve (kao što to činimo primjerice s varijablama koje se nanose na koordinatne osi), a u konkretnim primjenama biti svijestan da se zapravo radi o stvarnim duljinama podijeljenim s mjernom jedinicom, koja u slučaju vektorskog (kao i skalarnog) produkta nije jedinica duljine, već površine. U tom duhu bilo bi i korištenje izraza „iznos” umjesto „duljina” vektora.

Drugi pristup (istovremeno i matematički i fizikalno konzistentan) bio bi tumačenje vektorskog produkta kao orijentirane površine, tj. mogla bi se kao definicija  $\vec{v} \times \vec{w}$  uzeti da je to površina paralelograma određenog vektorima  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  koja je orijentirana proizvoljno dugim vektorom okomitim na paralelogram i orijentiranim u skladu s pravilom desne ruke.

Vektorski produkt se koristi u definicijama mnogih fizikalnih veličina.

**Primjer 200.** Moment sile definiran je kao vektorski produkt radijvektora i sile:  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , a kutni moment mase  $m$  oko točke je  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ , gdje je  $\vec{p} = m\vec{v}$  linearni momoment.

**Zadatak 48.** Ako je  $\vec{w} = -4,1\vec{v}$ , koliko je  $\vec{v} \times \vec{w}$ ?

**Napomena 17.** Primijetimo da ako  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  nisu kolinearni, onda je  $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$  uvijek baza prostora.

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\begin{aligned}\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) &= \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u}, \\ (\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} &= \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},\end{aligned}$$

kvaziasocijativnost  $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha \vec{v}) \times \vec{w}$ , ortogonalnost

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0, \quad (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0,$$

i antikomutativnost  $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$ . Primijetimo da je antikomutativnost očigledna iz definicije vektorskog produkta, a ortogonalnost slijedi jer je  $\vec{v} \times \vec{w}$  okomit na  $\vec{v}$  pa im je skalarni produkt 0. Vrijedi i

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{0} &= \vec{0} \times \vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}, \\ (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} &= (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} \end{aligned} \quad (6.2)$$

(posljednja formula poznata je i kao Lagrangeova formula) te

$$|\vec{v} \times \vec{w}|^2 = v^2 w^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2.$$

**Zadatak 49.** *Dokažite antikomutativnost i ortogonalnost vektorskog produkta.*

Vektorski produkt može poslužiti za računanje površina poligona iz koordinata njihovih vrhova: Svaki poligon se može triangulirati (rastaviti na trokute), a površina svakog trokuta jednaka je polovici površine odgovarajućeg paralelograma, tj. polovici iznosa vektorskog produkta vektora koji određuju dvije stranice trokuta.

Znamo i da je volumen piramide jednak trećini volumena prizme s istom bazom i visinom. Nadalje, svako uglato tijelo se može triangulirati, tj. rastaviti na tetraedre (trostrane piramide). Stoga, ako znamo iz koordinata vrhova izračunati volumen paralelepipeda, znamo izračunati volumen svakog uglatog tijela.

Operacija kojom dobivamo volumen paralelepipeda razapetog s tri vektora  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  je, do na predznak, mješoviti produkt tih vektora:  $V = |\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}|$ .

**Definicija 37 (Mješoviti produkt).** *Mješoviti produkt triju vektora  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  u prostoru definiran je kao skalar*

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Uočite da je zagrada u gornjoj definiciji suvišna, jer  $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \times \vec{w}$  nema smisla (bio bi to vektorski produkt skalara i vektora).

Ako je mješoviti produkt vektora  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  jednak 0, oni su komplanarni, dakle ne čine bazu prostora. Ako je  $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} > 0$ , vektori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  čine tzv. **desnu bazu** prostora, a u suprotnom tzv. lijevu bazu. U svim standardnim situacijama uzimaju se desne baze. Ako je dana desna baza  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  (primjerice, kristalografska baza), volumen jedinične ćelije je

$$V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}.$$

Osnovno svojstvo mješovitog produkta je njegova ciklička invarijantnost:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} \times \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v}.$$

Kako dobiti koordinate od vektora  $\vec{v} \times \vec{w}$  ako su poznate koordinate od  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$ ? Kako izračunati iznos mješovitog produkta triju vektora zadanih koordinatama? Za to nam treba bazi  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  tzv. recipročna (dualna) baza  $(\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*)$ .

### Recipročna baza

**Definicija 38 (Recipročna (dualna) baza).** Neka je dana desna baza  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ . Nju ćemo nazvati direktnom bazom, a odgovarajući volumen jedinične ćelije označavamo s  $V$ .

Pripadna recipročna ili dualna baza definirana je s

$$\vec{a}^* = \frac{1}{V} \vec{b} \times \vec{c}, \vec{b}^* = \frac{1}{V} \vec{c} \times \vec{a}, \vec{c}^* = \frac{1}{V} \vec{a} \times \vec{b}.$$

**Napomena 18.** U kristalografiji se direktna i recipročna baza u pravilu gledaju u paru. Pritom prostor koordinatiziran kristalografskom bazom nazivamo direktnim prostorom, a ako je koordinatiziran recipročnom, recipročnim prostorom.

Vektori  $\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$  imaju sljedeća svojstva:

$$\vec{a}^* \cdot \vec{a} = \vec{b}^* \cdot \vec{b} = \vec{c}^* \cdot \vec{c} = 1,$$

$$\vec{a}^* \cdot \vec{b} = \vec{a}^* \cdot \vec{c} = \vec{b}^* \cdot \vec{a} = \vec{b}^* \cdot \vec{c} = \vec{c}^* \cdot \vec{a} = \vec{c}^* \cdot \vec{b} = 0.$$

Naime, raznoimeni vektori iz direktne i recipročne baze su po definiciji recipročne baze međusobno okomiti, pa su im skalarni produkti 0, a ako množimo dva istoimena, primjerice  $\vec{a}^* \cdot \vec{a}$ , imamo

$$\vec{a}^* \cdot \vec{a} = \frac{1}{V} \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 1.$$

Nadalje, primijetimo da ako je direktna baza ortogonalna, onda budući da je  $\vec{a}^* \perp \vec{b}, \vec{c}, \vec{b}^* \perp \vec{c}, \vec{a}, \vec{c}^* \perp \vec{a}, \vec{b}$ , zaključujemo: Recipročna baza ortogonalne baze je ponovno ortogonalna baza. Nadalje, ako je polazna baza ortonormirana, onda je  $V = 1$  i očigledno po definiciji vektorskog produkta  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ , pa zaključujemo da je  $\vec{i}^* = \vec{i}, \vec{j}^* = \vec{j}, \vec{k}^* = \vec{k}$ , tj. ortonormirana baza je sama sebi recipročna.

**Zadatak 50.** Recipročna baza recipročne baze je polazna baza. Dokažite!

Više svojstava recipročne baze istražiti ćemo u odjeljku o primjenama klasične algebre vektora i analitičke geometrije prostora u kristalografiji, a ovaj odjeljak zaključujemo izvodom formula za izračunavanje vektorskih i mješovitih produkata vektora koji su zadani koordinatama. Uzmimo dva vektora s koordinatama danim obzirom na jednu (direktnu) bazu:  $\vec{r}_1 = [u_1, v_1, w_1]$  i  $\vec{r}_2 = [u_2, v_2, w_2]$ . Imamo:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 &= (u_1 \vec{a} + v_1 \vec{b} + w_1 \vec{c}) \times (u_2 \vec{a} + v_2 \vec{b} + w_2 \vec{c}) = \\ &= V(v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{a}^* + V(w_1 u_2 - w_2 u_1) \vec{b}^* + V(u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{c}^*,\end{aligned}$$

odnosno

$$[u_1, v_1, w_1] \times [u_2, v_2, w_2] = V \begin{vmatrix} \vec{a}^* & \vec{b}^* & \vec{c}^* \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}.$$

To je tražena formula za računanje vektorskog produkta iz koordinata. S obzirom na to da je  $(\vec{i}^*, \vec{j}^*, \vec{k}^*) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , za slučaj ortonormirane baze ta formula poprima oblik

$$[u_1, v_1, w_1] \times [u_2, v_2, w_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix},$$

no općenito ćemo iz koordinata vektora izračunati koordinate njihova vektorskog produkta u recipročnoj, a ne u polaznoj bazi.

Neka su sad  $\vec{u} = [x, y, z]$ ,  $\vec{v} = [x', y', z']$  i  $\vec{w} = [x'', y'', z'']$  vektori s koordinatama danim s obzirom na istu direktnu bazu. Računamo:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} &= \vec{u} \cdot V((yz' - y'z) \vec{a}^* + (zx' - y'x) \vec{b}^* + (xy' - x'y) \vec{c}^*) = \\ &= V(x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c}) \cdot ((yz' - y'z) \vec{a}^* + (zx' - y'x) \vec{b}^* + (xy' - x'y) \vec{c}^*) = \\ &= V(x(y'z'' - y''z') + y(z'x'' - z''x') + z(x'y'' - x''y')),\end{aligned}$$

tj. dobili smo opću formulu za računanje mješovitog produkta iz koordinata

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = V \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Primijetimo da je u slučaju ortonormirane baze je  $V = 1$ .



**Ponovimo bitno...** Vektorski produkt vektora je vektor okomit na dva vektora, koji ima iznos jednak površini njima određenog paralelograma,



a orijentiran je po pravilu desne ruke. Vektorski produkt dva kolinearna vektora uvijek je jednak nulvektoru. Mješoviti produkt triju vektora je prvi skalarno pomnožen s vektorskim produktom druga dva. Njegov iznos je, do na predznak, jednak volumenu njima određenog paralelepipeda. Mješoviti produkt komplanarnih vektora je nula. 🐤🐤🐤

## 6.2 Analitička geometrija trodimenzionalnog euklidskog prostora

U analitičkoj geometriji euklidske<sup>8</sup> ravnine se pomoću koordinata (uređenih parova realnih brojeva) proučavaju točke i jednodimenzionalni geometrijski objekti u ravnini: pravci, krivulje drugog reda i razne druge krivulje. U trodimenzionalnom euklidskom prostoru se uz točke i krivulje razmatraju i dvodimenzionalni geometrijski objekti—plohe. Najvažnija vrsta ploha u prostoru su ravnine.

Da bismo se mogli baviti analitičkom geometrijom prostora, potrebno je prvo odabrati koordinatni sustav. Kako je rečeno u prethodnom poglavlju, **koordinatni sustav** se sastoji od jedne odabrane točke prostora (ishodište  $O$ ) i (desne) baze prostora  $V^3(O)$ , dakle uređene trojke  $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  nekomplanarnih vektora. Ako je kao baza odabrana desna ortonormirana baza govorimo o Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru. Zbog ortonormiranosti baze koja ga određuje, mnogi računi koji se odnose na objekte opisane u Kartezijevom koordinatnom sustavu su jednostavniji.

U prethodnom odjeljku smo vidjeli da uz odabir koordinantog sustava svaku točku  $T$  prostora možemo opisati uređenom trojkom koordinata  $(x, y, z)$ , koja je jednaka koordinatama njezinog radij-vektora  $\overrightarrow{OT}$  s obzirom na  $\mathcal{B}$ . Prva koordinata zove se apscisa, druga je ordinata, a treća aplikata. **Koordinatne osi** su brojevni pravci kroz ishodište kojima se smjerovi redom podudaraju sa smjerovima vektora odabrane baze. Uobičajeno je tri koordinatne osi zvati redom  $x$ -os,  $y$ -os i  $z$ -os (os apscisa, os ordinata i os aplikata). Na skici, smjer drugog vektora baze (os ordinata) se u pravilu crta horizontalno, orijentiran prema desno. **Koordinatne ravnine** su ravnine određene s po dvije koordinatne osi te govorimo o  $(x, y)$ -ravnini,  $(y, z)$ -ravnini i  $(x, z)$ -ravnini.

Objekti u prostoru opisuju se s jednom ili više jednadžbi s tri nepoznanice koje predstavljaju koordinate točaka pojedinog objekta.

**Primjer 201.** *Budući da je prostor  $V^3(O)$  trodimenzionalan, jedna jednadžba s tri nepoznanice „oduzima“ jedan stupanj slobode (dimenzija je u biti isto*

<sup>8</sup>Izraz euklidski znači da se udaljenosti mjere na uobičajeni način.

što i broj stupnjeva slobode) te predstavlja dvodimenzionalni objekt (plohu) u prostoru, dok dvije (neproporcionalne) jednadžbe s tri nepoznanice „oduzimaju“ dva stupnja slobode te gledane kao sustav predstavljaju jednodimenzionalni objekt (krivulju) u prostoru.

Tri vrste objekata koje ćemo razmatrati u ovom poglavlju su točke, pravci i ravnine (nul-, jedno- i dvodimenzionalni objekti u prostoru opisivi linearnim jednadžbama). Općenito, presjek objekata u prostoru pomoću analitičke geometrije određujemo rješavanjem sustava jednadžbi tih objekata, a rješenja tog sustava su koordinate točaka presjeka.

### 6.2.1 Točke u prostoru

Za dvije točke  $T = (x, y, z)$  i  $T' = (x', y', z')$  njihova udaljenost  $d(T, T')$  jednaka je iznosu vektora  $\overrightarrow{TT'}$ , a ona se može računati kako smo već vidjeli na str. 225. Ako je  $\mathcal{B}$  ortonormirana, dobije se **formula za udaljenost dvije točke u Kartezijevom koordinatnom sustavu**:

$$d(T, T') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

**Zadatak 51.** Izvedite formulu za  $d(T, T')$  ako je  $a = b = c \neq 1$  i  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .

**Polovište dužine**  $\overline{TT'}$  ima koordinate  $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$ . Ta formula vrijedi za sve tipove koordinatnih sustava.

Općenito, skup svih točaka ravnine ili prostora koje u danom koordinatnom sustavu imaju cjelobrojne koordinate nazivamo **(primitivnom) rešetkom**. Rešetku nazivamo kristalografskom ako se radi o rešetci s obzirom na kristalografski koordinatni sustav (koordinatni sustav određen kristalografskom bazom).

**Zadatak 52.** Skicirajte rešetku u ravnini ako je  $a = 1$  cm,  $b = 2$  cm i  $\gamma = 45^\circ$ .

### 6.2.2 Ravnine u prostoru

Pravac u koordinatnoj ravnini može se opisati jednadžbom oblika  $ax + by = c$  u kojoj  $a$  i  $b$  nisu istovremeno 0, tj. jednom linearnom jednadžbom s dvije nepoznanice koja povezuje koordinate točaka pravca. Analog takvog pristupa u prostoru, tj. jedna linearna jednadžba oblika

$$Ax + By + Cz = D$$

koja povezuje tri prostorne koordinate je (opća) **jednadžba ravnine**. Pritom koeficijenti  $A$ ,  $B$  i  $C$  ne smiju sva tri biti jednaka 0. Sve jednadžbe koje se iz jednadžbe ravnine mogu dobiti njenim množenjem brojem različitim od nule predstavljaju istu ravninu (zato jer se ne mijenja skup rješenja takve jednadžbe). Točka je u ravnini točno ako zadovoljava njenu jednadžbu.

Najjednostavnije ravnine su koordinatne ravnine. Točke u  $(x, y)$ -ravnini imaju aplikatu jednaku nuli te je jednadžba  $(x, y)$ -ravnine

$$z = 0,$$

tj.  $0x + 0y + 1z = 0$ . Analogno je jednadžba  $(y, z)$ -ravnine

$$x = 0$$

, a jednadžba  $(x, z)$ -ravnine je

$$y = 0.$$

**Primjer 202.** Jednadžbom  $x + y - 2z = 5$  zadana je jedna ravnina. Ishodište  $(0, 0, 0)$  ne leži u njoj jer  $0 + 0 - 2 \cdot 0 \neq 5$ , a točka  $(1, 8, 2)$  leži u njoj jer je  $1 + 8 - 2 \cdot 2 = 5$ .

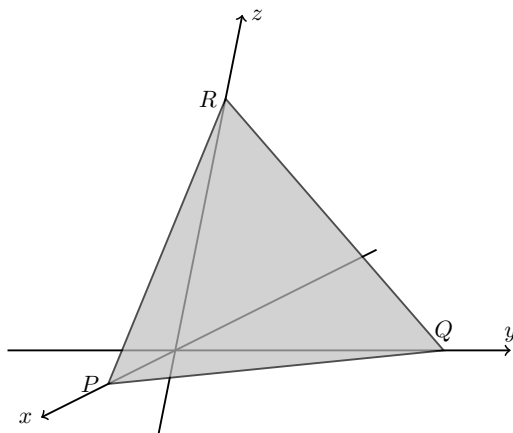
Vidimo: Ravnina sadrži ishodište točno ako je koeficijent  $D$  jednak 0. Općenito, iznos koeficijenta  $D$  povezan je s udaljenošću ravnine do ishodišta: Što je  $|D|$  veći, to je ishodište dalje od ravnine.

Koeficijenti  $A$ ,  $B$  i  $C$  govore nam o nagibu ravnine prema koordinatnim osima. Ako je primjerice  $A = 0$ , onda jednadžba ima oblik  $By + Cz = D$ . U tom slučaju nije moguće jednoznačno odrediti sjecište ravnine s  $x$ -osi jer bi ono imalo koordinate  $(x, 0, 0)$  te bi trebalo „riješiti jednadžbu”  $0 = D$ , koja je istinita (ili neistinita) numerička jednakosti, tj. ili vrijedi za sve  $x \in \mathbb{R}$  (ravnina sadrži  $x$ -os) ili ni za jedan (ravnina je paralelna s  $x$ -osi i ne sadrži ju). Općenito zaključujemo: Ravnina jednadžbe  $Ax + By + Cz = D$  je paralelna s osi apsisa/ordinata/aplikata točno ako je koeficijent  $A$  odnosno  $B$  odnosno  $C$  jednak 0.

Primijetimo sad sljedeću važnu i korisnu činjenicu:

**Teorem 19.** Skup svih točaka prostora  $(x, y, z)$  za koje je skalarni produkt njihova radij-vektora s danim vektorom  $\vec{n} = [A, B, C]^*$  (kao i ranije, zvjezdica označava da su koordinate zadane s obzirom na recipročnu bazu) konstantan je ravnina okomita na smjer vektora  $\vec{n}$ .

Iako u ovoj skripti većinom nismo davali dokaze tvrdnji, ovu ćemo dokazati jer je dio dokaza i jedna korisna formula i uz to ćemo i u sklopu dokaza opravdati tvrdnju da su ravnine u prostoru zadane linearnim jednadžbama



Slika 6.8: Ravnina u prostoru.

s tri nepoznanice. Po definiciji koordinata imamo  $[x, y, z] = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$  i  $[A, B, C]^* = A\vec{a}^* + B\vec{b}^* + C\vec{c}^*$ . Ako ih skalarno pomnožimo, koristeći distributivnost skalarnog produkta i svojstva skalarnih produkata jednog vektora baze s jednim vektorom recipročne baze (str. 230), dobivamo formulu za skalarni produkt vektora s koordinatama u direktnoj bazi sa vektorom s koordinatama u pripadnoj recipročnoj bazi:

$$[x, y, z] \cdot [A, B, C]^* = Ax + By + Cz. \quad (6.3)$$

Dakle, skup svih točaka za koji je taj produkt konstantan (jednak nekom  $D$ ) zadovoljava jednadžbu oblika  $Ax + By + Cz = D$ .

Neka je  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$  neka fiksna, a  $T = (x, y, z)$  varijabilna točka koja zadovoljava tu jednadžbu. Tada je  $\overrightarrow{T_0T} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ . Ako skalarno pomnožimo taj vektor s  $\vec{n}$  dobit ćemo, za svaku  $T$ , iznos 0. Dakle, jednadžba  $Ax + By + Cz = D$  opisuje geometrijski objekt koji se sastoji od svih točaka prostora za koje je vektor  $\overrightarrow{T_0T}$  okomit na fiksni vektor  $\vec{n}$ , a to je ravnina u prostoru (kroz točku  $T_0$  s vektorom normale  $\vec{n}$ ).  $\square$

Budući da je ortonormirana baza sama sebi recipročna, u Kartezijevom koordinatnom sustavu, trojka  $[A, B, C]$  određuje vektor normale na smjer ravnine.

Ravnine možemo indirektno zadati na više načina. Jedan način zadavanja ravnine je koeficijentima  $A$ ,  $B$  i  $C$  i jednom točkom  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$  u toj ravnini. U tom slučaju jednadžba ravnine je

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

**Primjer 203.** *Jednadžba ravnine kojoj je  $[2, 3, 4]^*$  vektor normale i koja sadrži točku  $(1, 1, 1)$  je  $2(x-1) + 3(y-1) + 4(z-1) = 0$ , tj.  $2x + 3y + 4z = 9$ .*

Ravninu možemo zadati i jednom točkom  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$  te s dva njoj paralelna vektora  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$  i  $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ . U tom slučaju prvo odredimo vektor normale  $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$  (primijetimo da će mu koordinate automatski biti u recipročnoj bazi, vidi str. 231, tj. dobit ćemo potrebne  $A$ ,  $B$  i  $C$ ) i zatim primijenimo gornju formulu.

Ravnina se može zadati i trima (nekolinearnim) točkama  $T_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Jednadžbu ravnine tada dobijemo bilo rješavanjem sustava koji dobijemo ako u  $Ax + By + Cz = D$  redom uvrstimo koordinate tih triju točaka, ili tako da slučaj svedemo na prethodni uz  $\vec{v} = \overrightarrow{T_1T_2}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{T_1T_3}$  i  $T_0 = T_1$ . Može se koristiti i formula

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

U kristalografiji od zanimanja su samo određene, tzv. **mrežne ravnine**. Mrežne ravnine su ravnine koje prolaze kroz tri nekolinearne (i stoga beskonačno mnogo) točaka kristalne rešetke (i ne prolaze ishodištem). Budući mrežne ravnine prolaze kroz točke rešetke, a njihove su koordinate cjelobrojne, slijedi da je uvijek moguće odabrati jednadžbu mrežne ravnine određenog smjera u kojoj su koeficijenti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  cijeli brojevi (i  $D \neq 0$ ). Pritom vrijedi konvencija: Sve mrežne ravnine istog smjera kao  $Ax + By + Cz = D$  se dijele u dvije skupine (s jedne i druge strane ishodišta)<sup>9</sup> i stoga pri skaliranju jednadžbe dozvoljavamo samo množenje i dijeljenje s *prirodnim* brojevima.

**Zadatak 53.** *Nađite jednadžbu mrežne ravnine koja sadrži točke  $(0, -1, 5)$ ,  $(-5, -4, 1)$  i  $(10, 5, 0)$  rješavajući prikladni sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice. Temeljem uočenog postupka argumentirajte zašto mrežne ravnine uvijek imaju cjelobrojne koeficijente.*

Dvije ravnine su paralelne ako su im kolinearni vektori normala, a kolinearni vektori zadani koordinatama u istoj (ovdje recipročnoj) bazi se prepoznaju po proporcionalnosti koordinata. Stoga zaključujemo da ako su dane jednadžbe ravnina  $Ax + By + Cz + D = 0$  i  $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ , **uvjet paralelnosti ravnina** možemo formulom zapisati kao

$$A : A' = B : B' = C : C'.$$

**Primjer 204.** *Ravnine  $2x + y - z = 4$  i  $-x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = -2$  su paralelne.*

<sup>9</sup>Razlikujemo ih jer nije svaki kristal centralno simetričan.

Zbog načina rasta kristala,<sup>10</sup> međusobno paralelne mrežne ravnine smatraju se ekvivalentnim, tj. iznos  $D$  u jednadžbi ravnine nam je irelevantan, odnosno od svih oblika  $Ax + By + Cz = D$  s cjelobrojnim  $A, B, C$  i  $D$  uvijek možemo kao reprezentativan za dani smjer odabrati jedan u kojem su  $A, B$  i  $C$  maksimalno skraćeni (relativno prosti), a  $D$  je bilo koji *prirodan* broj. U takvom slučaju koristimo oznake  $h, k$  i  $l$  na mjestu  $A, B$  i  $C$  i nazivamo ih Millerovim indeksima.

**Definicija 39 (Millerovi indeksi).** *Ako je  $Ax + By + Cz = D$  proizvoljna mrežna ravnina i  $hx + ky + lz = D$  njoj paralelna ravnina dobivena maksimalnim skraćivanjem  $A, B$  i  $C$ , bez dijeljenja negativnim brojevima, onda se brojevi  $h, k$  i  $l$  nazivaju Millerovim indeksima promatranog smjera mrežnih ravnina i govorimo o ravninama smjera  $(hkl)$ .*

**Napomena 19.** *U kristalografskoj notaciji mrežnih ravnina se negativni predznak piše kao povlaka iznad broja. Primjerice, Millerovi indeksi označeni kao  $(10\bar{3})$  su redom 1, 0 i  $-3$ .*

**Primjer 205.** *Millerovi indeksi smjera ravnine  $10x - 15y + 5z = 27$  su  $(2\bar{3}1)$ .*

S obzirom na već poznato, vidimo: Ako je neki Millerov indeks 0, ravnina je paralelna odgovarajućoj koordinatnoj osi. Nadalje, ravnine smjera  $(hkl)$  imaju vektor normale s koordinatama  $[h, k, l]^*$ .

**Zadatak 54.** *Kakve ravnine opisuju Millerovi indeksi  $(110)$ ? A  $(010)$ ?*

Dvije ravnine su međusobno okomite ako su im vektori normala okomiti, odnosno ako im je skalarni produkt 0. Dakle, općenito bi na način opisan na str. 224 trebalo izračunati skalarni produkt  $[A, B, C]^* \cdot [A', B', C']^*$  (dva vektora s koordinatama zadanim u *recipročnoj* bazi) i provjeriti iznosi li on 0. Za slučaj Kartezijevog koordinatnog sustava **uvjet okomitosti ravnina** se pojednostavljuje na formulu

$$A A' + B B' + C C' = 0.$$

**Primjer 206.** *Odabran je Kartezijev koordinatni sustav. Nađimo ravninu okomitu na ravnine  $x + y + z = 1$  i  $x - y + z = 2$  koja prolazi ishodištem. Kako znamo jednu točku,  $(0, 0, 0)$ , radi se o ravnini s jednadžbom oblika  $Ax + By + Cz = 0$ . Da bismo odredili koordinate vektora normale, iskoristimo uvjete okomitosti:  $1A + 1B + 1C = 0$  (okomitost na  $x + y + z = 1$ ) i  $1A - 1B + 1C = 0$  (okomitost na  $x - y + z = 2$ ). Tako smo dobili sustav  $A + B + C = 0$ ,*

<sup>10</sup>Konkretna makroskopski kristal je poliedar omeđen plohami (stranama poliedra) čije ravnine pripadaju pojedinom skupu međusobno ekvivalentnih mrežnih ravnina.

$A - B + C = 0$ . Zbrajanjem jednadžbi sustava i zatim dijeljenjem s dva vidimo da mora vrijediti  $C = -A$ . Iz prve jednadžbe je onda  $A + B - A = 0$  tj.  $B = 0$ . Dakle, vektori normale imaju koordinate oblika  $[A, 0, -A]$  s proizvoljnim  $A \neq 0$ . Odaberimo jedan takav vektor, recimo s  $A = 1$ . Imamo vektor normale  $[1, 0, -1]$  te je tražena jednadžba ravnine  $x - z = 0$ .

Općenito se **kut između ravnina** definira se kao kut između njihovih normala, tj.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n'}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n'}|}.$$

**Primjer 207.** Kut između ravnina  $x - y - z = 0$  i  $x - y$ -ravnine  $z = 0$ , uz uvjet da je odabrani koordinatni sustav Kartezijev, dan je s

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}},$$

te je  $\varphi \approx 125, 264^\circ$ .

Ponekad je zgodno ravninu opisati parametarskim jednadžbama. **Parametarske jednadžbe ravnine u prostoru** imaju oblik

$$x = x_0 + v_1 t + w_1 s,$$

$$y = y_0 + v_2 t + w_2 s,$$

$$z = z_0 + v_3 t + w_3 s,$$

$$t, s \in \mathbb{R}.$$

Pritom je  $(x_0, y_0, z_0)$  neka fiksna točka u ravnini, a  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$  i  $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$  su dva nekolinearna vektora paralelna ravnini. Za svaki par vrijednosti slobodnih parametara  $t$  i  $s$  dobivamo po jednu točku  $(x, y, z)$  u ravnini. Primijetite da je ravnina dvodimenzionalni objekt—upravo zato u njenim parametarskim jednadžbama imamo dva slobodna parametra.

**Primjer 208.** Odredimo parametarske jednadžbe ravnine zadane općom jednadžbom

$$2x - 5y + z = 2.$$

Izrazimo li primjerice  $z = 2 - 2x + 5y$  i uzmemo da su  $x = tb$  i  $y = s$  slobodni parametri, dobijemo traženi parametarski oblik

$$x = t,$$

$$y = s,$$

$$z = 2 - 2t + 5s,$$

$$t, s \in \mathbb{R}.$$

**Zadatak 55.** *Kako biste iz parametarskog oblika odredili opću jednadžbu ravnine?*

Češće od parametarskog oblika jednadžbe ravnine koristi se jedan specijalni tip opće jednadžbe ravnine. To je **segmentni oblik jednadžbe ravnine**

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1.$$

Prednost tog oblika je da se iz koeficijenata direktno vide probodišta koordinatnih osi s ravinom (odsječci ravnine na koordinatnim osima): to su upravo brojevi  $m$ ,  $n$  i  $p$ . Segmentni oblik jednadžbe se ne koristi ako ravnina prolazi kroz ishodište. Stvarne duljine odsječaka ravnine  $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$  na osima jednake su  $|m|a$ ,  $|n|b$  odnosno  $|p|c$ .

**Primjer 209.** *Segmentni oblik jednadžbe ravnine zadane s  $2x - 5y + 3z = 60$  dobije se dijeljenjem sa 60 (odnosno, općenito dijeljenjem s  $D$ ):*

$$\frac{x}{30} + \frac{y}{-12} + \frac{z}{20} = 1.$$

*Odsječci te ravnine na koordinatnim osima su redom 30,  $-12$  i 20.*

*Ako je baza zadana s  $a = 1$  m,  $b = 2$  m i  $c = 4$  m,  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ , probodišta ravnine s koordinatnim osima su tada od ishodišta udaljena od ishodišta  $30 \cdot 1$  m,  $12 \cdot 2$  m i  $20 \cdot 4$  m.*

Segmentni oblik jednadžbe se u matematici ne koristi ako je ravnina paralelna nekoj od koordinatnih osi, no uz malu modifikaciju koristit ćemo ga i za te slučajeve zbog primjena u kristalografiji. Naime, kao alternativa Millerovom indeksima za opis smjerova mrežnih ravnina koriste se i Weissovi parametri, koji su prirodno povezani sa segmentnim oblikom jednadžbe mrežne ravnine. Naime, ako imamo ravnine smjera  $(hkl)$ , kao jednu od njih možemo odabrati onu kojoj je jednadžba  $hx + ky + lz = v$ , gdje je  $v$  najmanji (pozitivni) zajednički višekratnik od  $h$ ,  $k$  i  $l$ . Dijeljenjem s  $v$  dobivamo segmentni oblik te jednadžbe,  $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$ , gdje je  $m = v/h$ ,  $n = v/k$  i  $l = v/l$ . Ako je neki od Millerovih indeksa bio 0, kao iznos odgovarajućeg odsječaka pišemo  $\infty$  te taj indeks ignoriramo pri određivanju  $v$ . Uzevši u obzir da su odsječci  $m$ ,  $n$  i  $p$  stvarnih duljina  $ma$ ,  $nb$  i  $pc$ , možemo i njih koristiti kao karakterizaciju danog smjera.

**Definicija 40 (Weissovi parametri).** *Ako je  $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$  segmentni oblik jednadžbe one mrežne ravnine promatranog smjera za koji su  $m$ ,  $n$  i  $p$  maksimalno skraćeni cijeli brojevi, onda razmjer  $ma : nb : pc$  nazivamo Weissovim parametrima tog smjera. Ako je smjer paralelan nekoj od koordinatnih osi, odgovarajući Weissov parametar je  $\infty$ .*



Gornje definicije i ideje najbolje je ilustrirati primjerom.

**Primjer 210.** Ravnine smjera opisanog Millerovim indeksima ( $3\bar{2}0$ ) su paralelne s osi aplikata. Njihove jednačbe su oblika  $3x - 2y = D$  s prirodnim brojevima  $D$ . Ako uzmemo  $D = 1$ , dobili smo onu mrežnu ravninu tog smjera koja je najbliža ishodištu:  $3x - 2y = 1$ . Njeni odsječci na osima su  $\frac{1}{3}$  i  $-\frac{1}{2}$ , dakle ta ravnina posjeduje probodišta s osima koja nisu točke rešetke. Ako bismo pak uzeli ravninu  $3x - 2y = 6$  (6 je najmanji zajednički višekratnik od 3 i 2), njeni odsječci na osima su 2 i  $-3$ , tj. točke rešetke. Ako dozvolimo proširenje korištenja segmentnog oblika korištenjem simbola  $\infty$  na slučaj paralelnosti s nekom osi (ovdje  $z$ -osi) dobijemo segmentni oblik jednačbe te ravnine,  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{\infty} = 1$  i njeni Weissovi parametri su  $2a : \bar{3}b : \infty c$ .

Iz primjera vidimo i: Od svih ravnina smjera ( $hkl$ ), ravnina  $hx + ky + lz = 1$  je najbliža ishodištu,<sup>11</sup> no njena probodišta s koordinatnim osima ne moraju biti točke rešetke. Ako pak trebamo jednačbu mrežne ravnine tog smjera najbližu ishodištu koja osi siječe isključivo u točkama rešetke, onda je to  $hx + ky + lz = v$ .

**Primjer 211.** Promotrimo ravninu s jednačbom  $\frac{x}{15} + \frac{y}{10} + \frac{z}{20} = 1$ . Njeni odsječci na kristalografskim osima su 15, 10, 20. Weissovi parametri njenog smjera su stoga  $3a : 2b : 4c$ . Millerovi indeksi njenog smjera su (463).

**Primjer 212.** Recimo da jedna ravnina danog smjera siječe koordinatne osi redom u točkama na udaljenostima  $2a$ ,  $b$ ,  $3c$  od ishodišta. Pripadni segmentni oblik jednačbe te ravnine je

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1.$$

Millerovi indeksi tog smjera su (362).

### 6.2.3 Pravci u prostoru

Pravac u prostoru određen je svojim smjerom (tj. bilo kojim njemu paralelnim vektorom smjera) i jednom točkom. Alternativno, pravac možemo zadati kao presjek dvije neparalelne ravnine. U prvom slučaju, pravac se opisuje parametarskim jednačbama ili tzv. kanonskim oblikom jednačbe pravca. U drugom slučaju pravac se zadaje sustavom od dvije opće jednačbe ravnina.

Parametarske jednačbe pravca s vektorom smjera  $\vec{s} = [u, v, w]$  koji prolazi točkom  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$  su oblika

$$x = x_0 + ut,$$

<sup>11</sup>Podrazumijevamo da ne gledamo ravnine koje idu kroz ishodište.

$$y = y_0 + vt,$$

$$z = z_0 + wt,$$

$$t \in \mathbb{R}.$$

Za svaki iznos parametra  $t$  dobivamo po jednu točku tog pravca. Uočimo: Pravac je paralelan nekoj od koordinatnih osi točno ako je među jedina koordinata od  $\vec{s}$  koja nije jednaka nuli ona koja odgovara toj osi. Primjerice, pravci s vektorom smjera  $[0, -3, 0]$  su paralelni s  $y$ -osi.

**Zadatak 56.** *Kako ćete iz parametarskih jednadžbi pravca vidjeti je li pravac paralelan nekoj koordinatnoj ravnini?*

**Zadatak 57.** *Zapišite parametarske jednadžbe  $z$ -osi.*

**Napomena 20.** *Vidimo da je za parametarski opis pravca dovoljan jedan slobodni parametar ( $t$ ), dok su za ravninu potrebna dva ( $t$  i  $s$ ). To je vezano za činjenicu da je pravac jednodimenzionalan, a ravnina dvodimenzionalan objekt. Općenito, *krivulje u prostoru* zadane su parametarski jednadžbama oblika*

$$x = f(t),$$

$$y = g(t),$$

$$z = h(t),$$

$$t \in I,$$

*a plohe u prostoru* zadane su parametarskim jednadžbama oblika

$$x = f(t, s),$$

$$y = g(t, s),$$

$$z = h(t, s),$$

$$t \in I, s \in I'.$$

Umjesto točkom i vektorom smjera, pravac može biti zadan i s dvije točke. U tom slučaju mu je vektor smjera vektor koji spaja te dvije točke, a bilo koju od njih uzmemo kao  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Skraćeni zapis parametarskih jednadžbi pravca, koji bismo dobili tako da iz svake od tri jednadžbe izrazimo parametar  $t$  i onda ih izjednačimo zove se **kanonski oblik jednadžbi pravca u prostoru**:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Radi se o preglednom obliku jednadžbi pravca, no kad god je potrebno rješavati neke probleme vezane za pravac, potrebno je prvo taj oblik prevesti u parametarski oblik. Također, kako je taj oblik samo skraćeni zapis parametarskog oblika, moguće je da neki od  $a$ ,  $b$  i  $c$  budu nula jer izraze u formuli ne treba shvaćati kao pravo dijeljenje brojeva.

Pravac može biti zadan i kao presjek dvije (neparalelne) ravnine, tj. sustavom

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= D, \\ A'x + B'y + C'z &= D'. \end{aligned}$$

Iz tog oblika parametarski oblik možemo dobiti rješavanjem sustava te dvije jednadžbe. Ako je pravac presjek dvije ravnine, njegov vektor smjera je okomit na normale tih ravnina te vektor smjera pravca zadanog gornjim sustavom (uz pretpostavku da je koordinatni sustav Kartezijev) možemo dobiti kao

$$\vec{s} = [A, B, C]^* \times [A', B', C']^* = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix},$$

koristeći pravilo sa str. 231 i činjenicu da je recipročna baza recipročne baze polazna baza  $((\vec{a}^*)^* = \vec{a}, (\vec{b}^*)^* = \vec{b}, (\vec{c}^*)^* = \vec{c})$ .

**Zadatak 58.** *Odredite parametarski i kanonski oblik jednadžbi pravca zadanog kao presjek ravnina  $x + y + z = 1$  i  $2x - y = 5$ .*

**Primjer 213.** *Provjerimo sijeku li se pravci*

$$\frac{x}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$$

i

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

*Prvi pravac ima parametarske jednadžbe*

$$x = 0, y = 2t - 1, z = 3 + 2t,$$

*a drugi*

$$x = 1 + s, y = s + 2, z = s + 3.$$

*Slobodne parametre smo im različito označili jer se radi o dva različita pravca pa dok jedan parametar opisuje „korake šetnje” po jednom, drugi to opisuje za drugi, a ti „koraci” ne moraju biti isti. Sjecište je točka  $(x, y, z)$  koja je na oba pravca, dakle treba izjednačiti odgovarajuće koordinate i riješiti sustav:*

$$0 = 1 + s \Rightarrow s = -1,$$

$$2t - 1 = s + 2 \Rightarrow t = 1,$$

$$3 + 2t = s + 3 \Rightarrow 5 = 2.$$

Kako vidimo, za ova dva pravca nije moguće naći točku koja je na oba jer je sustav kontradiktoran te se pravci ne sijeku. No, primijetimo da oni nisu paralelni: Vektor smjera prvog je  $[0, 2, 2]$  i taj nije paralelan vektoru smjera drugog,  $[1, 1, 1]$ .

Da smo iz dvije jednadžbe uspjeli odrediti  $s$  i  $t$  koji zadovoljavaju i treću, uvrštavanje vrijednosti od  $t$  u parametarske jednadžbe prvog (ili vrijednosti parametra  $s$  u jednadžbe drugog) pravca dalo bi koordinate sjecišta tih pravaca. Tako je, primjerice, sjecište pravca  $\frac{x}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$  s pravcem  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{1}$  točka  $(0, 1, 5)$  — provjerite to sami!

Kako je vidljivo iz gornjeg primjera, pravci u prostoru mogu se ne sjeći bez da su paralelni. **Uvjet paralelnosti pravaca** je kolinearnost, tj. proporcionalnost njihovih vektora smjera: ako su  $\vec{s} = [u, v, w]$  i  $\vec{s}' = [u', v', w']$  vektori smjera dva pravca, oni su paralelni ako je  $u : u' = v : v' = w : w'$ . Pravci u prostoru koji se ne sijeku i nisu paralelni zovu se **mimoilazni (mimosmjerni) pravci**.

Uspoređivanje vektora smjera i određivanje sjecišta dva pravca u prostoru (tj. rješavanje sustava sa 6 jednadžbe i 2 nepoznanice) dovest će do jednog od zaključaka:

- Ako su vektori smjera kolinearni, onda taj sustav ili
  - nema rješenja: pravci su paralelni, ili
  - sustav ima (beskonačno) rješenja: pravci se podudaraju;
- Ako vektori smjera nisu kolinearni onda taj sustav ili
  - nema rješenja: pravci su mimoilazni, ili
  - sustav ima (točno jedno) rješenje  $(t, s)$ : pravci se sijeku u jednoj točki.

Dva pravca su okomita ako imaju okomite vektore smjera, tj. **uvjet okomitosti pravaca** je

$$\vec{s} \cdot \vec{s}' = 0.$$

Taj skalarni produkt općenito računamo na način opisan na str. 224, a ako je koordinatni sustav Kartezijev uvjet se svodi na  $uu' + vv' + ww' = 0$ . Općenito se pak kut između pravaca definira kao kut između njihovih vektora smjera.

**Primjer 214.** Potrebno je naći pravac (pravce) koji prolazi kroz ishodište, okomit je na  $x$ -os i sa  $z$ -osi zatvara kut od  $45^\circ$ , ako su parametri koordinatnog sustava  $a = 5$  cm,  $b = 3$  cm,  $c = 4$  cm,  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ .

Budući da pravac treba prolaziti kroz ishodište, prvo znamo da su mu parametarske jednadžbe oblika  $x = ut$ ,  $y = vt$  i  $z = wt$ . Njegov vektor smjera  $[u, v, w]$  prvo mora biti okomit na  $x$ -os, tj. na prvi vektor baze. Dakle, imamo uvjet

$$0 = [u, v, w] \cdot \vec{a} = (u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot \vec{a} = ua^2 + v\vec{a}\vec{b} + w\vec{a}\vec{c}.$$

Zbog  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$  i činjenice da je  $a \neq 0$  dobijemo  $u = 0$ .

Sad dakle znamo da je vektor smjera našeg pravca oblika  $[0, v, w] = v\vec{b} + w\vec{c}$  i tražimo takav vektor koji s  $\vec{c}$  zatvara kut od  $45^\circ$ . Imamo stoga posljednji uvjet

$$(v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot \vec{c} = |[0, v, w]| \cdot c \cdot \cos 45^\circ.$$

Na lijevoj strani, zbog okomitosti  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  preostaje  $wc^2$ . Iznos  $|[0, v, w]| = |v\vec{b} + w\vec{c}|$  jednak je  $\sqrt{(v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot (v\vec{b} + w\vec{c})} = \sqrt{v^2b^2 + w^2c^2}$  te se gornja jednakost svodi na

$$wc^2 = \sqrt{v^2b^2 + w^2c^2} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pokratimo  $c$  i kvadriramo te dobijemo

$$w^2c^2 = (v^2b^2 + w^2c^2) \frac{1}{2},$$

odnosno  $w^2c^2 = v^2b^2$ . Uvrtimo  $b$  i  $c$  i dobijemo  $16w^2 = 9v^2$ , dakle je  $w = \pm \frac{3}{4}v$ . Dakle, vektor smjera je ili tipa  $[0, v, \frac{3}{4}v]$  ili tipa  $[0, v, -\frac{3}{4}v]$ , pa imamo dva rješenja (npr. za  $v = 4$ ): Pravac s jednadžbama  $x = 0$ ,  $y = 4t$  i  $z = 3t$  ili pravac s jednadžbama  $x = 0$ ,  $y = 4t$  i  $z = -3t$ .

Pravac s vektorom smjera  $\vec{s} = [u, v, w]$  je okomit na ravninu s vektorom normale  $\vec{n} = [A, B, C]^*$  ako su ti vektori paralelni, a pravac je paralelan ravnini ako mu je vektor smjera okomit na njezin vektor normale. Stoga je **uvjet okomitosti pravca na ravninu** da je  $\vec{s} \times \vec{n} = \vec{0}$ , što općenito nije lako izračunati jer su koordinate  $\vec{s}$  dane u osnovnoj, a od  $\vec{n}$  u recipročnoj bazi (kako se to radi vidjet ćemo u sljedećem odjeljku). No, u Kartezijevom koordinatnom sustavu se uvjet pojednostavljuje na proporcionalnost koordinata ta dva vektora. S druge strane, **uvjet paralelnosti pravca s ravninom** je  $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$ . Zbog već pokazane formule za skalarni produkt dva vektora, od kojih jedan ima koordinate u polaznoj, a drugi u recipročnoj bazi (formula 6.3), uvjet paralelnosti pravca i ravnine iskazan je formulom

$$uA + vB + wC = 0.$$

### 6.3. PRIMJENE KLASIČNE ALGEBRE VEKTORA I ANALITIČKE GEOMETRIJE PROSTORA

Ako pravac nije paralelan ravnini, on ju siječe u jednoj točki koja se zove **probodište pravca i ravnine**. Određivanje probodišta pravca i ravnine svodi se na rješavanje sustava koji se sastoji od jednačbe(i) pravca i jednačbe(i) ravnine.

**Zadatak 59.** Odredite probodište pravca  $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{3}$  i ravnine  $2x + 3y + 4z = 1$ .

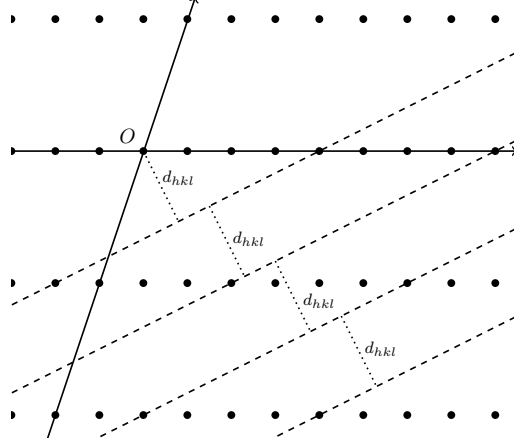


**Ponovimo bitno...** Koordinatni sustav se sastoji od jedne točke prostora (ishodišta) i jedne baze prostora. Koordinate točke u prostoru su skalari u prikazu pripadnog radij-vektora kao linearne kombinacije vektora baze. Ravnina u prostoru zadana je jednom linearnom jednačbom s tri nepoznanice koju zovemo općom jednačbom ravnine ( $Ax + By + Cz + D = 0$ ); vektor normale ravnine tada ima koordinate  $[A, B, C]^*$  (u recipročnoj bazi). Drugi oblici jednačbe ravnine u prostoru su segmentni (poseban slučaj opće jednačbe u kojem je  $D = -1$ ) ili parametarski (koordinate točaka ravnine su zadane preko dva nezavisna slobodna parametra). Pravac u prostoru može biti zadan sustavom od dvije linearne jednačbe s tri nepoznanice (dakle, kao presjek dvije ravnine) ili parametarski (koordinate točaka pravca su zadane putem jednog slobodnog parametra; koeficijenti uz slobodni parametar određuju koordinate vektora smjera pravca). Presjek dva objekta u prostoru određuje se tako da rješavamo sustav koji se sastoji od jednačbi koje opisuju te objekte. 🦆🦆🦆

## 6.3 Primjene klasične algebre vektora i analitičke geometrije prostora u kristalografiji

Mrežne ravnine odabranog smjera ( $hkl$ ) pojavljuju se u jednakim razmacima: razmak ravnine  $hx + ky + lz = 1$  i ravnine  $hx + ky + lz = 2$  jednak je razmaku ravnine  $hx + ky + lz = 2$  i ravnine  $hx + ky + lz = 3$  i t.d. Označimo s  $d_{hkl}$  razmak dviju susjednih ravnina smjera ( $hkl$ ) (tzv. međumrežni razmak), tj. udaljenost ravnine  $hx + ky + lz = n$  do ravnine  $hx + ky + lz = n+1$  za bilo koji prirodan broj  $n$ . Lako je uvidjeti da je on jednak udaljenosti ishodišta  $O$  do njemu najbliže ravnine tog smjera (usp. sliku 6.9 za dvodimenzionalni analog), dakle do ravnine  $hx + ky + lz = 1$ .

Prije negoli izvedemo opću formulu za međumrežni razmak, pogledajmo prvo vezu s recipročnom bazom. Neka je  $h$  visina jedinične ćelije određene direktnom bazom ( $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ), npr. ako paralelogram određen s  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  gledamo



Slika 6.9: Međumrežni razmak jednak je udaljenosti ishodišta do prve mrežne ravnine danog smjera.

kao osnovicu. Stoga je  $V = a b \sin \gamma \cdot h$ . S druge strane, toj osnovici paralelna ploha na jediničnoj ćeliji leži u ravni smjera (001) najbližoj ishodištu pa je  $h = d_{001}$ . Dakle:

$$\frac{1}{V} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{a b \sin \gamma}{V} = \frac{1}{d_{001}}.$$

No,

$$c^* = \left| \frac{1}{V} \vec{a} \times \vec{b} \right| = \frac{a b \sin \gamma}{V},$$

dakle je ujedno i

$$c^* d_{001} = 1.$$

Analogno dobivamo i druge dvije veze između iznosa vektora recipročne baze i međumrežnih razmaka:

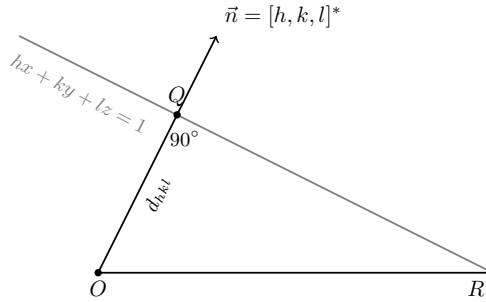
**Teorem 20.**

$$d_{100} = \frac{1}{a^*} = \frac{V}{b c \sin \alpha}; d_{010} = \frac{1}{b^*} = \frac{V}{a c \sin \beta}; d_{001} = \frac{1}{c^*} = \frac{V}{a b \sin \gamma}.$$

Odatle vidimo i da su jedinice „duljine” u recipročnom prostoru su recipročne jedinicama u direktnom prostoru, što je jedan od razloga naziva recipročni prostor.

**Primjer 215.** Neki mineral kristalizira u heksagonskom kristalnom sustavu ( $a = b$ ,  $c$ ,  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ ). udući da  $\vec{c}^*$  mora biti okomit na  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , a takav je i sam  $\vec{c}$ , zaključujemo da su za heksagonske kristale  $\vec{c}^*$  i

### 6.3. PRIMJENE KLASIČNE ALGEBRE VEKTORA I ANALITIČKE GEOMETRIJE PROSTORA



Slika 6.10: Ilustracija uz dokaz fundamentalnog zakona recipročne rešetke.

$\vec{c}$  istog smjera. Vektori  $\vec{a}^*$  i  $\vec{a}$  kao i  $\vec{b}^*$  i  $\vec{b}$  su različitih smjerova (ali svi leže u istoj ravnini). Volumen jedinične ćelije je  $V = abc \sin \gamma$ . Stoga je  $\frac{1}{d_{100}} = |\vec{a}^*| = \frac{1}{abc \sin \gamma} bc \sin \alpha = \frac{1}{a \sin \gamma}$ , dakle  $d_{100} = a \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Analogno se dobije  $d_{010} = b \frac{\sqrt{3}}{2}$  i  $d_{001} = c$ .

Formule iz prethodnog teorema su specijalni slučajevi općenitijeg teorema, poznatog kao **fundamentalni (temeljni) zakon recipročne rešetke**:

**Teorem 21.** Ako je s  $\mathcal{N}_{hkl}$  označen iznos vektora  $\vec{n} = [h, k, l]^*$ , onda je

$$d_{hkl} \mathcal{N}_{hkl} = 1.$$

Dokažimo ovaj teorem. Već smo uočili da je udaljenost ravnine  $hx + ky + lz = 1$  do ishodišta jednaka  $d_{hkl}$ . Neka je  $R$  probodište te ravnine s jednom od koordinatnih osi, recimo s  $x$ -osi pa je  $R = (\frac{1}{h}, 0, 0)$ . Iznos  $d_{hkl}$  jednak je duljini ortogonalne projekcije vektora  $\vec{OR}$  na  $\vec{n}$  (slika 6.10), za kojeg znamo da je okomit na smjer  $(hkl)$  pa je  $d_{hkl} = \frac{\vec{OR} \cdot \vec{n}}{\mathcal{N}_{hkl}} = \frac{[h, k, l]^* \cdot [\frac{1}{h}, 0, 0]}{\mathcal{N}_{hkl}} = \frac{1}{\mathcal{N}_{hkl}}$ .  $\square$

**Korolar 2.** Ako je direktna baza ortogonalna ( $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ ), vrijedi sljedeća formula za međumrežni razmak:

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}.$$

Dokaz nije težak. Prema fundamentalnom zakonu recipročne rešetke imamo:

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \mathcal{N}_{hkl}^2 = \sqrt{(h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*) \cdot (h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*)}.$$



Budući da već znamo da je recipročna baza ortogonalne baze i sama ortogonalna ( $\alpha^* = \beta^* = \gamma^* = 90^\circ$ ), posljednji izraz jednak je  $\sqrt{h^2(a^*)^2 + k^2(b^*)^2 + l^2(c^*)^2}$ . Nadalje, budući da je baza ortogonalna, imamo  $V = abc$  pa iz teorema 20 dobijemo da je to jednako  $\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}$ , što smo i htjeli dokazati.  $\square$

**Primjer 216.** Neki kristal rompskog sustava ima parametre jedinične ćelije  $a = 0,82 \text{ nm}$ ,  $b = 0,94 \text{ nm}$  i  $c = 0,75 \text{ nm}$ . Duljina radij-vektora točke koja u recipročnoj rešetki ima koordinate  $(1, 0, \bar{2})^*$  je  $\mathcal{N}_{10\bar{2}} = \frac{1}{d_{10\bar{2}}} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{4}{c^2}} = 2,9 \text{ nm}^{-1}$ .

Generalizacija gornjeg razmišljanja dovodi do opće formule za udaljenost točke do ravnine. Neka je dana točka  $T(x_0, y_0, z_0)$  i ravnina  $\Pi$  s jednadžbom  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Želimo odrediti udaljenost  $d(T, \Pi)$ . Ona je jednaka udaljenosti od  $T$  do njene ortogonalne projekcije na ravninu. Vektor normale ravnine  $\Pi$  dan je s  $\vec{n} = [A, B, C]^*$ . Uzmemo li proizvoljnu točku ravnine  $(x, y, z)$  i spojimo s  $T$ , dobit ćemo vektor  $\vec{v} = [x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z]$  (za svaku točku ravnine jedan takav vektor). Duljina ortogonalne projekcije od  $\vec{v}$  na  $\vec{n}$  je upravo tražena udaljenost i ona prema prethodnom poglavlju iznosi (opet koristimo formulu 6.3)

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} &= \frac{|A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z)|}{|\vec{n}|} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax + By + Cz)|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{|\vec{n}|}. \end{aligned}$$

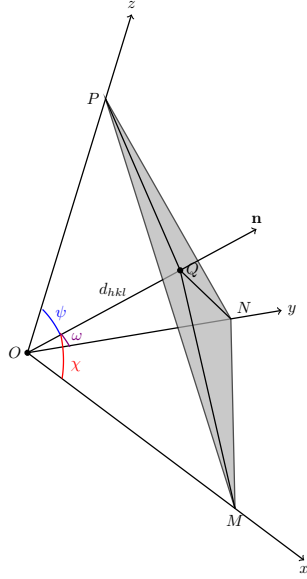
Zadnja jednakost vrijedi jer je po pretpostavci točka  $(x, y, z)$  u ravnini pa je  $Ax + By + Cz = D$ . Ako je koordinatni sustav Kartezijev, imamo  $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$  pa dobivamo da formula za udaljenost točke do ravnine u Kartezijevom koordinatnom sustavu glasi

$$d(T, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Zadatak 60.** Odredite udaljenost točke  $(1, 2, 3)$  do ravnine  $\sqrt{3}x - \pi y = e$  ako je  $a = 8$ ,  $b = \sqrt{10}$ ,  $c = e\pi$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ .

**Primjer 217.** Za neki kristal rompskog sustava ( $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ ,  $a \neq b \neq c \neq a$ ) utvrđeno je da razmak susjednih  $(111)$  ravnina iznosi  $d_{111} = 654 \text{ pm}$ . Ako je  $a = 820 \text{ pm}$ , odredite razmak između susjednih  $(211)$  ravnina! Iz  $\frac{1}{d_{211}^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$  i  $\frac{1}{d_{111}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$  oduzimanjem dobijemo  $\frac{1}{d_{211}^2} = \frac{1}{d_{111}^2} + \frac{3}{a^2}$  pa je  $d_{211} \approx 383 \text{ pm}$ .

### 6.3. PRIMJENE KLASIČNE ALGEBRE VEKTORA I ANALITIČKE GEOMETRIJE PROSTORA



Slika 6.11: Slika uz izvod formule za  $d_{hkl}$ .

**Primjer 218.** Neka je tetragonska jedinična ćelija zadana parametrima  $a = b = 4,820 \text{ \AA}$ ,  $c = 6,288 \text{ \AA}$ . Tad međumrežni razmak ravnina smjera (211) dobivamo iz

$$\frac{1}{d_{211}^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Uvrštavanje zadanih podataka daje  $d_{211} = 2,039 \text{ \AA}$ .

Vratimo se određivanju međumrežnog razmaka u neortogonalnim sustavima. Udaljenost točke do ravnine definira se kao njena udaljenost do ortogonalne projekcije te točke na tu ravninu (a to je probodište okomice na ravninu koja prolazi kroz zadanu točku). Označimo s  $Q$  ortogonalnu projekciju  $O$  na ravninu  $hx + ky + lz = 1$  (slika 6.11). Imamo dakle

$$d_{hkl} = d(O, Q).$$

Neka su  $M$ ,  $N$  i  $P$  probodišta naše ravnine s koordinatnim osima (pretpostavimo da sva tri postoje, tj.  $h, k, l \neq 0$ ). Već znamo (vidi izvod na str. 6.3) da su njihove udaljenosti od ishodišta redom  $|OM| = \frac{a}{|h|}$ ,  $|ON| = \frac{b}{|k|}$ ,  $|OP| = \frac{c}{|l|}$ .

Trokut  $\triangle OMN$  je trokut kojemu znamo dvije stranice ( $|OM|$  i  $|ON|$ ) i kut među njima (to je  $\gamma$  jer su  $M$  i  $N$  na  $x$ -osi odnosno  $y$ -osi). Analogno u trokutima  $\triangle ONP$  i  $\triangle OPM$  znamo po dvije stranice i kut među njima. Stoga se u sva ta tri trokuta duljine trećih stranica ( $|MN|$ ,  $|NP|$  odnosno

$|PM|$ ) mogu izračunati pomoću kosinusovog poučka.<sup>12</sup> Stoga je Heronovom formulom moguće izračunati površinu  $P_{\triangle MNP}$ , a ona je baza trostrane piramide  $OMNP$ , čija visina je točno naš traženi  $d_{hkl}$ . Volumen te piramide iznosi

$$V_{OMNP} = \frac{1}{3} d_{hkl} P_{\triangle MNP}.$$

S druge strane, taj volumen je trećina volumena paralelepipeda određenog vektorima  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{h} \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{k} \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{l} \vec{c}$ , odnosno

$$V_{OMNP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3hkl} \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \frac{V}{3hkl},$$

gdje je kao i ranije s  $V$  označen volumen jedinične ćelije. Izjednačavanjem gornjih dviju formula za  $V_{OMNP}$  vidimo da smo dokazali:

**Teorem 22.** *Ako nijedan od Millerovih indeksa smjera mrežnih ravnina nije 0, vrijedi*

$$d_{hkl} = \frac{V}{hkl P_{\triangle MNP}}, \quad (6.4)$$

pri čemu su  $M$ ,  $N$  i  $P$  redom probodišta ravnine  $hx + ky + lz = 1$  s koordinatnim osima.

S druge strane, ako su  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  kutovi normale  $\vec{n}$  smjera  $(hkl)$  s baznim vektorima  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , onda je

$$\cos \chi = \frac{h}{a} \cdot d_{hkl}, \quad \cos \psi = \frac{k}{b} \cdot d_{hkl}, \quad \cos \omega = \frac{l}{c} \cdot d_{hkl}.$$

Zbrojimo i dobijemo još jednu opću formulu, koja pak vrijedi za sve tipove koordinatnih sustava i sve  $h$ ,  $k$ ,  $l$ :

$$\frac{\cos^2 \chi + \cos^2 \psi + \cos^2 \omega}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}. \quad (6.5)$$

Mana ove formule je što općenito  $\chi$ ,  $\psi$  i  $\omega$  računamo iz  $d_{hkl}$  (vidi formulu 6.6 i sliku 6.11).

Primijetimo da formule 6.4, 6.5 i ?? vrijedila i ako  $h$ ,  $k$  i  $l$  ne bi bili cijeli brojevi, tj. ako  $d_{hkl}$  definiramo kao udaljenost ravnine  $hx + ky + lz = 1$  do ishodišta, neovisno o tome jesu li  $h$ ,  $k$  i  $l$  cijeli ili ne, te formule omogućuju računanje udaljenosti ishodišta do ravnine u raznim koordinatnim sustavima.

<sup>12</sup>Ako je kut između poznate dvije stranice trokuta pravi, kosinsov poučak postaje Pitagorin poučak.

### 6.3. PRIMJENE KLASIČNE ALGEBRE VEKTORA I ANALITIČKE GEOMETRIJE PROSTORA

Temeljni zakon recipročne rešetke možemo iskoristiti za određivanje kuta  $\vartheta$  između normale na smjer  $(hkl)$  (kao što znamo, to je vektor  $\vec{n} = [h, k, l]^*$ ) s bilo kojim zadanim vektorom  $\vec{o} = [u, v, w]$ , uz pretpostavku da je poznat iznos  $d_{hkl}$ . Naime, po definiciji skalarnog produkta je

$$\cos \vartheta = \frac{\vec{o} \cdot \vec{n}}{|\vec{o}| \cdot |\vec{n}|}.$$

Brojnik zadnje formule je  $[u, v, w] \cdot [h, k, l]^*$ , što po formuli 6.3 iznosi  $uh + vk + wl$ . Nadalje,  $|\vec{n}| = \mathcal{N}_{hkl} = \frac{1}{d_{hkl}}$ , te formula poprima oblik

$$\cos \vartheta = \frac{uh + vk + wl}{|\vec{o}|} d_{hkl}. \quad (6.6)$$

Iznos  $|\vec{o}|$  se lako izračuna metodama iz poglavlja o skalarnom produktu (odjeljak 6.1.3).

**Primjer 219.** *Koji kut s b-osi proizvoljnog kristalografskog koordinatnog sustava zatvara vektor normale na ravninu smjera (123)? Vektor normale tog smjera je  $[1, 2, 3]^*$ . Tražimo njegov kut s  $\vec{b} = [0, 1, 0]$ . Po definiciji skalarnog produkta je*

$$\cos \varphi = \frac{[1, 2, 3]^* \cdot [0, 1, 0]}{\mathcal{N}_{123}b} = \frac{2}{b}d_{123}.$$

**Primjer 220.** *Dana je kristalografska baza. Duljine vektora su  $a = 100$  pm,  $b = 200$  pm i  $c = 250$  pm. Kutovi među vektorima su  $\alpha = \gamma = 90^\circ$  i  $\beta = 60^\circ$ . U ostatku zadatka podrazumijevamo da su sve koordinate dane obzirom na tu bazu.*

- Jesu li vektori  $[2, -1, 3]$  i  $[0, 1, 4]$  kolinearni? Nisu jer im koordinate nisu proporcionalne.
- Jesu li okomiti? Skalarni umnožak im iznosi 810000, dakle nisu.
- Kut između ta dva vektora iznosi

$$\arccos \phi = \frac{81000}{|[2, -1, 3]| \cdot |[0, 1, 4]|} = 26,8^\circ.$$

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  je volumen jedinične ćelije, a on je prema zadanim parametrima jednak  $200 \cdot (100 \cdot 250 \cdot \sin 60^\circ) = 4,33 \cdot 10^6$  pm<sup>3</sup>.
- Koordinate jediničnog vektora koji ima isti smjer i orijentaciju kao vektor  $[0, 1, 4]$  su  $[0; 9, 81 \cdot 10^{-4}; 3,92 \cdot 10^{-3}]$ .

- $d_{010}$  je, s obzirom na to da se radi bazi s  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ , jednak  $b$ , tj. 200 pm.
- Jednadžba mrežne ravnine smjera  $(20\bar{1})$  koja je najbliža ishodištu je  $2x - z = 1$ .
- $d_{20\bar{1}}$  je, uzevši u obzir da se radi o ravninama paralelnima s  $b$ -osi te da ona najbliža ishodištu os  $a$  siječe s odsječkom 1 (u točki  $A$ ), a os  $c$  s odsječkom  $-2$  (u točki  $C$ ), jednak visini trokuta  $OAC$  povučenoj iz  $O$ , tj.  $d_{20\bar{1}} = \frac{2P_{\triangle OAC}}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{|AC|} = 311$  pm.
- U recipročnom prostoru duljina vektora  $[2, 0, \bar{1}]$  je, prema temeljnom zakonu recipročne rešetke, jednaka  $1/d_{20\bar{1}} = 0,0321$  pm $^{-1}$ .
- Weissovi parametri ravnine koja kristalografske osi siječe redom na udaljenostima 200 pm, 600 pm i 750 pm od ishodišta (sva sjecišta su na pozitivnim dijelovima osi) su  $2a : 3b : 3c$ .
- Vektor normale tog smjera ravnina s  $a$ -osi zatvara kut od  $81,55^\circ$ . Naime,

$$\cos \varphi = \frac{[3, 2, 2]^* \cdot [1, 0, 0]}{\mathcal{N}_{322}a} = \frac{3d_{322}}{a}.$$

Kako dobijemo  $d_{322}$ ? Ako s  $P$ ,  $Q$  i  $R$  označimo probodišta koordinatnih osi s ravninom  $3x + 2y + 2z = 1$ , onda je  $OPQR$  tetraedar. Njegov volumen je s jedne strane jednak  $\frac{1}{3}(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ , a s druge  $\frac{h}{3}P_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}d_{hkl}P_{\triangle ABC}$ . Izjednačimo i dobijemo

$$d_{322} = \frac{(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})}{P_{\triangle ABC}}.$$

Kako je  $\vec{OA} = \frac{1}{3}\vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \frac{1}{2}\vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{c}$ , dobijemo

$$d_{322} = \frac{V}{12P_{\triangle ABC}}.$$

Ostaje još odrediti  $P_{\triangle ABC}$ . Iz dva pravokutna trokuta  $OAB$  i  $OBC$  dobijemo  $|AB| = 105,41$  pm i  $|BC| = 160,08$  pm, a iz trokuta  $OAC$  koji pri vrhu  $O$  ima kut  $60^\circ$  koristeći kosinusov poučak dobijemo  $|AC| = 112,11$  pm, te je po Heronovom poučku njegova površina  $77042,11$  pm $^2$ . Stoga je  $d_{322} = 4,68$  pm, pa je  $\cos \varphi = 0,1405$  i na kraju  $\varphi = 81^\circ 55'$ .

### 6.3. PRIMJENE KLASIČNE ALGEBRE VEKTORA I ANALITIČKE GEOMETRIJE PROSTORA

Za kraj, izvedimo formule za parametre recipročne baze za proizvoljnu direktnu bazu, tj. za zadane  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  i  $V$ .<sup>13</sup> Iznosi vektora recipročne baze se onda mogu dobiti iz teorema 20:

$$a^* = \frac{1}{V} \sqrt{b^2 c^2 - (b c \cos \alpha)^2} = \frac{b c \sin \alpha}{V}, \quad (6.7)$$

$$b^* = \frac{a c \sin \beta}{V}, \quad (6.8)$$

$$c^* = \frac{a b \sin \gamma}{V}. \quad (6.9)$$

Za kutove, postupak je sljedeći:

$$\cos \alpha^* = \frac{\vec{b}^* \cdot \vec{c}^*}{b^* c^*} = \frac{V^2}{a^2 b c \sin \beta \sin \gamma} \frac{1}{V^2} (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Koristeći Lagrangeovu formulu (6.2) imamo:

$$\cos \alpha^* = \frac{\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}, \quad (6.10)$$

i analogno

$$\cos \beta^* = \frac{\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta}{\sin \alpha \sin \gamma}, \quad (6.11)$$

$$\cos \gamma^* = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}. \quad (6.12)$$

---

<sup>13</sup> $V$  se uvijek može izračunati iz parametara baze. Opću formulu izvest ćemo u odjeljku o determinantama, a za Matematiku 1 zadaci koji uključuju računanje  $V$  uvijek će imati bar jedan od kutova  $\alpha, \beta, \gamma$  jednak pravom kutu.



# Poglavlje 7

## Sustavi linearnih jednadžbi

Kao motivacijski primjer, promotrimo sljedeći primjer vezan za gradivo iz prethodnog poglavlja.

**Primjer 221.** Vektor  $\vec{s}$  u bazi  $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  prostora  $V^3$  ima koordinate  $[-1, 0, 5]$ . Vektori  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  definirani su s  $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{b} - \vec{c}$ ,  $\vec{w} = 2\vec{c} - \vec{a}$ . Dokažimo da je  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  također baza prostora  $V^3$  i odredimo koordinate vektora  $\vec{s}$  u toj bazi.

Iz zadanoga vidimo da je  $\vec{u} = [1, -1, 0]$ ,  $\vec{v} = [0, 1, -1]$  i  $\vec{w} = [-1, 0, 2]$  pa je njihov mješoviti produkt (vidi str. 231) jednak  $V \neq 0$ , dakle se radi o bazi  $\mathcal{B}'$ . U njoj će vektor  $\vec{s}$  imati koordinate  $[x, y, z]'$ , tj.

$$[-1, 0, 5] = \vec{s} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = [x, -x, 0] + [0, y, -y] + [-z, 0, 2z] = [x-z, y-x, 2z-y],$$

dakle tražene koordinate dobijemo kao zajedničko rješenje sljedećih triju jednadžbi:

$$x - z = -1, \quad y - x = 0, \quad 2z - y = 5.$$

Da bismo naučili rješavati općenite sustave linearnih jednadžbi, prvo trebamo definirati pojam linearne jednadžbe i pojam sustava jednadžbi.

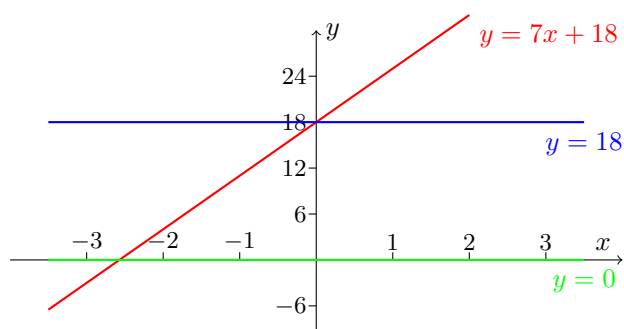
### 7.1 Linearne jednadžbe

**Definicija 41** (Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom). Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom  $x$  je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$ax = b,$$

gdje su  $a$  i  $b$  zadani brojevi. Rješenje takve jednadžbe je svaki broj čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto nepoznanice  $x$  daje istinitu numeričku jednakost.





Slika 7.1: Linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom mogu imati jedinstveno rješenje (crveni graf), nemati rješenja (plavi graf) ili imati beskonačno mnogo rješenja (zeleni graf).

**Primjer 222.** Jednadžba  $8x - 3(x - 4) = -2x - 6$  je linearna jer ju možemo svesti na oblik  $ax = b$ :

$$8x - 3(x - 4) = -2x - 6,$$

$$8x - 3x + 12 = -2x - 6,$$

$$7x = -18.$$

Rješenje te jednadžbe je  $-\frac{18}{7}$ .

Rješenje linearne jednadžbe  $ax = b$  je nultočka afine funkcije  $f(x) = ax - b$ , tj. sjecište grafa te funkcije s osi apscisa. Moguća su tri slučaja:

- Jedinstveno rješenje (ako  $a \neq 0$ ): Pravac  $y = ax - b$  siječe os apscisa u nultočki  $x = \frac{b}{a}$ , koja je rješenje naše jednadžbe.
- Nema rješenja (ako  $a = 0$  i  $b \neq 0$ ): Pravac  $y = ax - b$  je paralelan s osi apscisa i različit od nje.
- Beskonačno mnogo rješenja (ako  $a = b = 0$ ): Pravac  $y = ax - b$  se podudara s osi apscisa pa je svaki realan broj  $x$  rješenje naše jednadžbe.

Dakle, rješenja linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom interpretiramo kao točke na brojevnom pravcu, tj. kao 0-dimenzionalne objekte na 1-dimenzionalnom objektu.

**Primjer 223.** Jednadžbe

$$8x - 3(x - 4) = -2x - 6,$$

$$8x - 3(x - 4) = 5x - 6,$$

$$8x - 3(x - 4) = 5x + 12$$

su redom primjeri za tri navedena slučaja. Grafovi odgovarajućih afinih funkcija za koje te jednadžbe predstavljaju traženje nultočki prikazani su slikom 7.1.

U ovom poglavlju primarno nas zanimaju linearne jednadžbe s više od jedne nepoznanice.

**Definicija 42** (Linearna jednadžba s dvije nepoznanice). Linearna jednadžba s dvije nepoznanice  $x$  i  $y$  je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$ax + by = c,$$

gdje su  $a$ ,  $b$  i  $c$  zadani brojevi. Broj  $c$  zove se slobodnim članom, a  $a$  i  $b$  su koeficijenti jednadžbe.

Rješenje takve jednadžbe je svaki uređeni par brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto brojeva  $x$  i  $y$  daje istinitu numeričku jednakost.

**Primjer 224.** Jednadžba  $2x - 5y = 3$  je linearna jednadžba s dvije nepoznanice. Uređeni par  $(4, 1)$  je jedno njeno rješenje, dok par  $(1, 4)$  nije rješenje te jednadžbe: Važno je o rješenju govoriti kao uređenom paru, ne samo jer su nam za rješenje potrebna dva broja (par), nego i jer je bitno koji je prvi, a koji je drugi.

Geometrijski, linearnu jednadžbu s dvije nepoznanice (zapravo, skup njenih rješenja) možemo interpretirati kao pravac u ravnini (tj. kao njegovu implicitnu jednadžbu).<sup>1</sup> Pravac se sastoji od beskonačno mnogo točaka te svaka linearna jednadžba s dvije nepoznanice ima beskonačno mnogo rješenja (parova koordinata točaka na pravcu koji ju predstavlja).

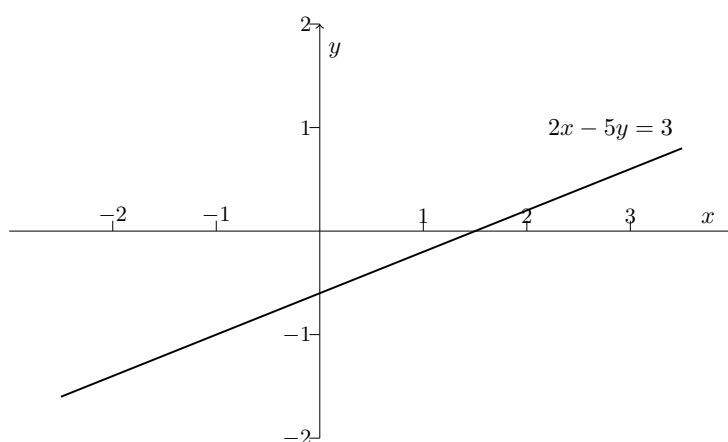
**Primjer 225.** Jednadžbi  $2x - 5y = 3$  odgovara pravac kojem je to implicitna jednadžba, tj. pravac kroz točke  $(0, -\frac{3}{5})$  i  $(\frac{3}{2}, 0)$  (vidi sliku 7.2). Uz te dvije točke i svaka druga točka tog pravca, primjerice  $(9, 3)$ , je rješenje te jednadžbe.

**Definicija 43** (Linearna jednadžba s tri nepoznanice). Linearna jednadžba s tri nepoznanice  $x$ ,  $y$ ,  $z$  je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$ax + by + cz = d$$

---

<sup>1</sup>Ako je  $a = 0$ , pravac  $ax + by = c$  je paralelan s  $x$ -osi, ako je  $b = 0$  paralelan je s  $y$ -osi.

Slika 7.2: Pravac  $2x - 5y = 3$ .

gdje su  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  zadani brojevi. Broj  $d$  zove se slobodnim članom, a  $a$ ,  $b$  i  $c$  su koeficijenti jednadžbe.

Rješenje takve jednadžbe je svaka uređena trojka brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto nepoznanica  $x$ ,  $y$  i  $z$  daje istinitu numeričku jednakost.

**Primjer 226.** Jednadžba  $2x - 5y + z = 3$  je linearna jednadžba s tri nepoznanice. Trojka  $(4, 1, 0)$  je jedno njeno rješenje, a trojka  $(1, 2, 1)$  nije rješenje te jednadžbe.

Geometrijski, skup rješenja linearne jednadžbe s tri nepoznanice možemo interpretirati kao ravninu u prostoru (vidi odjeljak 6.2.2, odnosno sliku 7.3). Posebno, svaka linearna jednadžba s tri nepoznanice ima beskonačno mnogo rješenja.

Prethodne definicije možemo generalizirati:

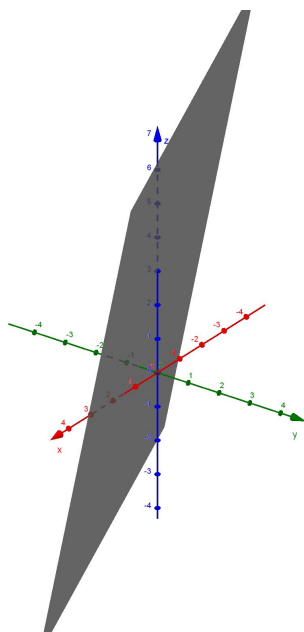
**Definicija 44** (Linearna jednadžba s  $n$  nepoznanica). Linearna jednadžba s  $n$  nepoznanica  $x_1, x_2, \dots, x_n$  je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

gdje su  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  zadani brojevi. Broj  $b$  zove se slobodnim članom, a  $a_1, a_2, \dots, a_n$  su koeficijenti jednadžbe.

Rješenje takve jednadžbe je svaka uređena  $n$ -torka brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto nepoznanica daje istinitu numeričku jednakost.

**Primjer 227.** Jednadžba  $2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 0$  je linearna jednadžba s pet nepoznanica. Uređene petorke  $(1, 1, 1, 0, 2)$  i  $(0, 0, 0, 0, 0)$  su dva od njenih rješenja, a petorka  $(1, 2, 1, 2, 1)$  nije rješenje te jednadžbe.



Slika 7.3: Ravnina  $2x - 5y + z = 3$  (slika izrađena programom Geogebra).

**Zadatak 61.** *Koliko najviše nepoznanica može imati linearna jednadžba koja ima jedinstveno rješenje?*

**Zadatak 62.** *Ako linearna jednadžba s dvije ili više nepoznanica ima sve koeficijente osim jednog jednake nuli, opišite skup njenih rješenja!*

Možemo ukratko reći da je linearna jednadžba jednadžba kojom iskazujemo da zbroj nepoznanica pomnoženih s nekim konkretnim brojevima<sup>2</sup> (koeficijentima) ima zadanu vrijednost (jednaku slobodnom članu).

**Napomena 21.** *Nije ispravno reći da je slobodni član „onaj broj desno od jednakosti u jednadžbi”. Naime, iako je u sređenom obliku uobičajeno slobodni član pisati desno od znaka jednakosti, bolje je naglasiti njegov smisao: To je konstantni član jednadžbe, tj. član koji ne sadrži nijednu od nepoznanica (gdje pod članom izraza mislimo na aditivni član, tj. podizraz koji je pribrojen ostatku promatranog izraza).*



**Ponovimo bitno...** Linearne jednadžbe su jednadžbe koje se mogu zapisati u obliku „zbroj tih nepoznanica pomnoženih sa zadanim koeficien-

<sup>2</sup>U odjeljku 8.2 takav izraz ćemo nazvati linearnom kombinacijom (koeficijentata ili nepoznanica).

tima jednak je slobodnom članu”. Rješenje linearne jednadžbe s  $n$  nepoznanica je svaka uređena  $n$ -torka brojeva čije uvrštavanje na mjesto nepoznanica daje istinitu numeričku jednakost. Linearne jednadžbe s jednom, dvije ili tri nepoznanice možemo geometrijski predočiti kao točku na pravcu, pravac u ravnini odnosno ravninu u prostoru. 🐣🐣🐣

## 7.2 Sustavi linearnih jednadžbi

Ukoliko kao u primjeru 221 tražimo zajednička rješenja više jednadžbi, govorimo o sustavima. Jednadžbe u sustavima ne moraju biti linearne, ali se samo s takvim sustavima bavimo u ovom poglavlju.

**Definicija 45 (Sustav linearnih jednadžbi).** *Sustav linearnih jednadžbi je skup od konačno mnogo linearnih jednadžbi s istim nepoznanicama za koje tražimo zajedničko rješenje. Rješenje sustava je svaka uređena  $n$ -torka brojeva koja zadovoljava sve jednadžbe sustava.*

*Ako sustav ima  $m$  jednadžbi s  $n$  nepoznanica, zovemo ga  $m \times n$ -sustavom.*

*Sustavi linearnih jednadžbi u kojima su svi slobodni članovi jednaki nuli nazivaju se homogenim sustavima, a ostali se zovu nehomogenim.*

**Primjer 228.** *Primjer (homogenog) sustava s dvije jednadžbe i tri nepoznanice ( $2 \times 3$ -sustava) je sustav*

$$x + y + z = 0,$$

$$-2x + y = 0.$$

*Njegovo rješenje je npr. trojka  $(0, 0, 0)$  jer zadovoljava obje jednadžbe, a trojka  $(1, -1, 0)$  nije rješenje sustava jer zadovoljava samo prvu jednadžbu.*

Lako je, kao u prethodnom primjeru, zaključiti: Homogeni sustavi uvijek imaju bar jedno rješenje (tzv. trivijalno rješenje u kojem sve nepoznanice imaju vrijednost nula).

Sustavi linearnih jednadžbi pojavljuju se u raznolikim kontekstima.

**Primjer 229.** *Kao u primjeru 221 vrijedi i općenito: Ako neki vektor  $\vec{r} \in V^3$  ima poznate koordinate  $[x, y, z]$  s obzirom na jednu bazu  $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , a želimo odrediti njegove koordinate u nekoj drugoj bazi  $\mathcal{B}' = (\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$ , gdje su poznate koordinate vektora nove baze obzirom na staru:  $\vec{a}' = [a_1, a_2, a_3]$ ,  $\vec{b}' = [b_1, b_2, b_3]$  i  $\vec{c}' = [c_1, c_2, c_3]$ , onda nove koordinate  $[x', y', z']$  od  $\vec{r}$  dobivamo kao rješenje  $3 \times 3$ -sustava*

$$a_1x' + b_1y' + c_1z' = x,$$

$$a_2x' + b_2y' + c_2z' = y,$$

$$a_3x' + b_3y' + c_3z' = z.$$

**Primjer 230.** U vodi je otopljeno 0,6190 g smjese natrijeva klorida i kalijeva klorida te je dodan srebrov nitrat. Istaložilo je 1,3211 g srebrova klorida. Treba odrediti masene udjele natrijeva i kalijeva klorida u polaznoj smjesi.

Molarna masa NaCl je  $58,45 \text{ g mol}^{-1}$ , molarna masa KCl je  $74,56 \text{ g mol}^{-1}$ , a molarna masa AgCl je  $143,34 \text{ g mol}^{-1}$ . Neka je  $x$  masa NaCl u smjesi, a  $y$  masa KCl u smjesi. Iz uvjeta zadatka proizlazi da je  $(x, y)$  rješenje sustava od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$x + y = 0,6190 \text{ g}$$

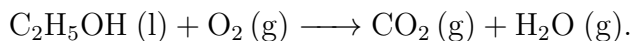
$$\frac{143,34}{58,45}x + \frac{143,34}{74,56}y = 1,3211 \text{ g}.$$

**Zadatak 63.** Postavite sustav linearnih jednadžbi za sljedeći problem: Neka smjesa se sastoji od tri sastojka, od kojih svaki sadrži dušik i sumpor. Analitičkim metodama je utvrđeno da je maseni udio dušika u smjesi 4,38%, a sumpora 1,06%. Nadalje, utvrđeno je da je maseni udio dušika u prvom sastojku 8,20%, maseni udio sumpora u drugom sastojku 2,40%, a treći sastojak smjese sadrži 2,80% dušika i 1,00% sumpora. Odredite masene udjele sastojaka u smjesi.

Izjednačavanje kemijskih jednadžbi također se može interpretirati kao rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Kemijske jednadžbe se zapisuju u obliku  $R \longrightarrow P$  (reaktanti  $\longrightarrow$  produkti). Uz svaki reaktant i produkt zapisuje se broj zvan stehiometrijski koeficijent. Primjerice, jednadžba  $\text{CH}_4(\text{g}) + 2\text{O}_2(\text{g}) \longrightarrow \text{CO}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O}(\text{g})$  nam, među ostalim, kaže da pri gorenju metana za svaki 1 mol metana i 2 mola kisika nastaju po 1 mol ugljikova dioksida i 2 mola vode. Po dogovoru, u računima (osobito u fizikalnoj kemiji), stehiometrijski koeficijenti reaktanata uzimaju se s negativnim, a stehiometrijski koeficijenti produkata s pozitivnim predznakom. Tako su u navedenom primjeru stehiometrijski koeficijenti metana, kisika, ugljikovog dioksida i vode redom  $-1$ ,  $-2$ ,  $1$  i  $2$ . Ukoliko samo znamo reaktante i produkte, jednadžba reakcije nije izjednačena dok ne odredimo stehiometrijske koeficijente svih reaktanata i produkata. Pritom mora vrijediti da za svaku vrstu atoma ili iona broj jedinki s lijeve strane jednadžbe mora biti jednak broju jedinki s desne strane.

**Primjer 231.** Recimo da promatramo gorenje etanola  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\text{l})$ , dakle reakciju etanola s kisikom. Poznato je da u toj reakciji nastaju ugljikov dioksid

*i voda (vodena para). Potrebno je stoga odrediti stehiometrijske koeficijente u jednadžbi*



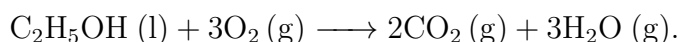
*Za svaki od elemenata  $E \in \{\text{C}, \text{H}, \text{O}\}$  u reakciji postavlja se po jedna linearna jednadžba u kojoj se odgovarajući nepoznati stehiometrijski koeficijent  $x_i$  množi s brojem E-ova u odgovarajućem reaktantu/prodaktu:*

$$\begin{array}{lcl} \text{C :} & 2x_1 + x_3 & = 0 \\ \text{H :} & 6x_1 + 2x_4 & = 0 \\ \text{O :} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \end{array}.$$

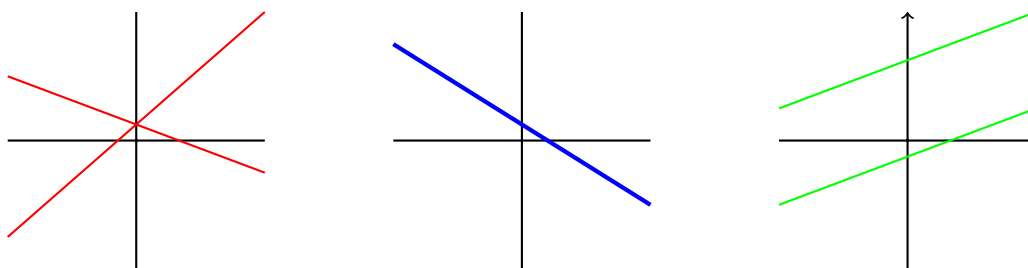
*Prva jednadžba izražava da je ukupna promjena broja atoma ugljika u reakciji jednaka nuli — nisu niti nestali niti nastali novi atomi ugljika. Pritom je  $2x_1 < 0$  jer  $x_1$  opisuje broj jedinki etanola koje ulaze u reakciju i u njoj se troše pa je  $x_1 < 0$ , dok je  $x_3 > 0$  jer opisuje koliko jedinku ugljikova dioksida je nastalo u reakciji. Slično druga i treća jednadžba izražavaju da se broj atoma vodika odnosno kisika ne mijenja.*

Uočimo: Problem izjednačavanja kemijskih jednadžbi se uvijek svodi na homogeni sustav linearnih jednadžbi (objasnite zašto!). Za takve sustave znamo da imaju bar trivijano rješenje: svi  $x_i = 0$  (tj. svaku zamišljenu reakciju je moguće uravnotežiti na trivijalan način: tako da nijednog sudionika nema ☺). Broj jednadžbi sustava jednak je broju elemenata (ili drugih odabranih osnovnih komponenti, primjerice iona) koji se pojavljuju u reakciji. Broj nepoznanica jednak je broju sudionika reakcije. Obično je pri izjednačavanju kemijskih jednadžbi cilj odrediti točno jedno netrivialno rješenje s cjelobrojnim iznosima nepoznanica, i to obično ono koje ima svojstvo da su  $x_i$ -ovi relativno prosti (tj. po apsolutnoj vrijednosti najmanji mogući).

**Primjer 232.** *Sustav za izjednačavanje reakcije gorenja etanola (primjer 231) ima beskonačno mnogo rješenja  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , a to su sve četvorke za koje je  $x_1 = -\frac{1}{3}t$ ,  $x_2 = -t$ ,  $x_3 = \frac{2}{3}t$ ,  $x_4 = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Da bi svi  $x_i$  bili cijeli brojevi i  $x_3, x_4 > 0$ , potrebno je da je  $t \in \mathbb{N}$  višekratnik od 3. Najmanji takav je  $t = 3$  koji daje rješenje  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$ . Izjednačena jednadžba je stoga*



Vratimo se na matematiku sustava linearnih jednadžbi. Kao što smo rekli, jedna linearna jednadžba s dvije nepoznanice predstavlja pravac u ravnini,



Slika 7.4:  $2 \times 2$ -sustavi s jedinstvenim rješenjem(lijevo), s beskonačno mnogo rješenja (sredina) i bez rješenja (desno).

dakle dvije takve jednadžbe predstavljaju dva pravca u ravnini. Kako tražimo zajednička rješenja jednadžbi, slijedi da u slučaju  $2 \times 2$ -sustava tražimo presjek dvaju pravaca u ravnini. Rješenja  $2 \times 2$ -sustava su točke sjecišta tih pravaca zapisane koordinatno. Iz geometrije ravnine jasno je da imamo tri mogućnosti:

- Pravci se sijeku u jednoj točki — sustav ima jedinstveno rješenje (uređeni par koordinata te točke).
- Pravci se podudaraju — sustav ima beskonačno rješenja (sve točke tog jednog pravca su rješenja).
- Pravci su paralelni i različiti — sustav nema rješenja.

Te tri situacije ilustrirane su slikom 7.2.

U slučaju više jednadžbi s 2 nepoznanice imamo više pravaca u ravnini kojima tražimo zajedničke točke, no ispitivanjem slučajeva zaključit ćemo da imamo iste tri mogućnosti za ukupni broj rješenja sustava:

- Svi pravci idu kroz jednu točku — sustav ima jedinstveno rješenje (uređeni par koordinata tog sjecišta);
- Svi pravci su podudarni — sustav ima beskonačno rješenja (sve točke tog jednog pravca su rješenja).
- U ostalim slučajevima nema točke koja bi bila zajednička svim pravcima — sustav nema rješenja.

S druge strane, jedna linearna jednadžba s 3 nepoznanice predstavlja ravninu u prostoru, dakle tri takve jednadžbe predstavljaju tri ravnine. Kako tražimo zajednička rješenja jednadžbi, slijedi da u slučaju  $3 \times 3$ -sustava tražimo presjek triju ravnina u prostoru. Rješenja  $3 \times 3$ -sustava su točke sjecišta tih ravnina zapisane koordinatno. Opet imamo tri mogućnosti:



- Ravnine se sijeku u jednoj točki — sustav ima jedinstveno rješenje (uređena trojka koordinata tog sjecišta);
- Sve tri ravnine se podudaraju ili se dvije ravnine podudaraju i treća ih siječe ili sve tri sijeku duž pravca — sustav ima beskonačno mnogo rješenja (u prvom slučaju sve točke te jedne ravnine su rješenja, a u drugom i trećem su rješenja točke presječnog pravca).
- U ostalim slučajevima (npr. tri različite paralelne ravnine) nema rješenja.

Sustavi s tri nepoznanice mogu imati npr. dvije jednadžbe — u tom slučaju geometrijski ekvivalent su dvije ravnine u prostoru (možemo li tada dobiti jedinstveno rješenje?). Općenito, sustav od  $m$  jednadžbi s 3 nepoznanice interpretiramo kao traženje presjeka  $m$  ravnina u prostoru. No, što se tiče mogućeg broja rješenja, nema ništa novoga. Ovo što smo ovdje geometrijski argumentirali za sustave linearnih jednadžbi s dvije ili tri nepoznanice vrijedi i općenito (a u odjeljku 8.2 ćemo to i dokazati):

**Teorem 23** (Teorem o broju rješenja sustava linearnih jednadžbi). *Svaki sustav linearnih jednadžbi ili nema rješenja ili ima jedinstveno rješenje ili ima beskonačno mnogo rješenja.*



**Ponovimo bitno...** Sustavi linearnih jednadžbi sastoje se od više linearnih jednadžbi kojima tražimo zajednička rješenja. Homogeni sustavi su oni u kojima sve jednadžbe imaju slobodne članove jednake nuli i oni uvijek imaju bar trivijalno rješenje. Sustavi linearnih jednadžbi ili nemaju rješenja ili im je rješenje jedinstveno ili imaju beskonačno mnogo rješenja. 🦆🦆🦆

## 7.3 Metoda supstitucije

Metoda supstitucije može se koristiti i za rješavanje drugačijih sustava jednadžbi, a ne samo sustava linearnih jednadžbi. Ona se sastoji u tome da iz jedne jednadžbe izrazimo jednu od nepoznanica i uvrstimo dobiveni izraz na mjesto te nepoznanice u svim ostalim jednadžbama. Time smo smanjili broj jednadžbi i broj nepoznanica za po jedan. Nastavljamo s daljnjim supstitucijama sve dok ne dođemo do samo jedne jednadžbe (ili pak kontradikcije). Metoda je vrlo zgodna za male sustave, osobito za  $2 \times 2$ -sustave. Kod sustava većih od  $3 \times 3$  postaje nepregledna te su prikladnije druge metode.

**Primjer 233.** *Riješimo sustav*

$$x + y = 7,$$

$$675x + 300y = 2850$$

metodom supstitucije. Iz prve jednačbe je  $y = 7 - x$  pa uvrštavanjem u drugu jednačbu dobivamo redom

$$675x + 300(7 - x) = 2850,$$

$$375x = 750,$$

$$x = 2.$$

Budući da je sustav imao dvije nepoznanice, rješenje mora biti uređen par. Drugu vrijednost odredimo iz formule supstitucije tj.

$$y = 7 - x = 7 - 2 = 5.$$

Dakle, rješenje sustava je uređeni par  $(2, 5)$ .

**Primjer 234.** Riješimo sustav iz primjera 230 metodom supstitucije. Iz prve jednačbe je  $y = 0,6190 \text{ g} - x$  pa uvrštavanje u drugu jednačbu daje

$$2,452x + 1,922(0,6190 \text{ g} - x) = 1,3211 \text{ g}$$

iz čega dobijemo

$$x = 0,2479 \text{ g}$$

te

$$y = 0,3711 \text{ g}.$$

Kako su bili traženi maseni udjeli, dobivamo

$$w(\text{NaCl}) = \frac{0,2479}{0,6190} = 0,4005 = 40,05 \%$$

i

$$w(\text{KCl}) = \frac{0,3711}{0,6190} = 0,5995 = 59,95 \%.$$

**Primjer 235.** Sustav

$$x + 2y = -4,$$

$$2x + 4y = 0$$

rješavamo metodom supstitucije. Iz prve jednačbe je  $x = -4 - 2y$  što daje

$$2(-4 - 2y) + 4y = 0,$$

tj.  $-8 = 0$ . Slijedi da sustav nema rješenja.

**Primjer 236.** *Sustav*

$$\begin{aligned}4x + 2y &= 6, \\ -8x - 4y &= -12\end{aligned}$$

*rješavamo metodom supstitucije. Iz prve jednadžbe je  $y = 3 - 2x$  što daje*

$$-8x - 4(3 - 2x) = -12$$

*tj.  $-12 = -12$ . Ta jednakost sigurno vrijedi, dakle je druga jednadžba bila suvišna. Preostaje nam samo jednadžba  $y = 3 - 2x$ , dakle sustav ima beskonačno mnogo rješenja i ona su svi uređeni parovi oblika  $(x, 3 - 2x)$  s proizvoljnim  $x \in \mathbb{R}$ .*

**Zadatak 64.** *Metodom supstitucije riješite sustav iz primjera ??.*



**Ponovimo bitno...** Metoda supstitucije sastoji se u izražavanju jedne od nepoznanica iz jedne jednadžbe sustava i njenom uvrštavanju u ostale jednadžbe sustava. 

## 7.4 Gaußova metoda eliminacija

Gaußova metoda eliminacija sastoji se u postepenom poništavanju (eliminiranju) većine koeficijenata sustava linearnih jednadžbi koristeći određene operacije zvane elementarnim transformacijama. Budući da se nepoznanice tokom rješavanja sustava ne mijenjaju, sam postupak možemo učiniti preglednijim ako ga izvodimo tablično, tj. tako da pišemo samo tablicu koeficijenata i slobodnih članova, a pamtimo koji koeficijenti idu uz koje nepoznanice. Takve tablice zvat ćemo matricama sustava linearnih jednadžbi.

Uvodimo sljedeće oznake:

- Broj jednadžbi u sustavu označavamo s  $m$ , a broj nepoznanica s  $n$ .
- Koeficijent uz nepoznanicu  $x_j$  u  $i$ -toj po redu jednadžbi označavamo s  $a_{ij}$ .
- Slobodni član u  $i$ -toj po redu jednadžbi označavamo s  $b_i$ .

**Definicija 46** (Matrica sustava linearnih jednadžbi). *Matrica sustava*

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & +\cdots & +a_{3n}x_n & = b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

je tablica oblika<sup>3</sup>

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Primijetimo:

- Retci matrice sustava odgovaraju pojedinim jednadžbama.
- Stupci matrice sustava (osim zadnjeg) odgovaraju nepoznanicama.
- Zadnji stupac matrice sustava odgovara slobodnim članovima.
- Okomita crta odvaja stupac slobodnih članova od ostalih i predstavlja niz znakova jednakosti.
- Ako je sustav tipa  $m \times n$ , njegova matrica ima  $m$  redaka i  $n + 1$  stupac.

**Primjer 237.** *Matrica*

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

predstavlja sustav s četiri jednadžbe i tri nepoznanice:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 2, \\ & x_2 & -3x_3 & = & 1, \\ 8x_1 & -24x_2 & +10x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 7. \end{array}$$

Cilj Gaußove metode eliminacija je sustav, odnosno njegovu matricu svesti na oblik iz kojeg je lako očitati rješenje. Budući da je najlakše očitati rješenje sustava oblika

$$x_1 = X_1,$$

$$x_2 = X_2,$$

---

<sup>3</sup>Formalno, matrica sustava je samo dio ovako definirane matrice lijevo od okomite crte, a matrica koju ovdje nazivamo matricom sustava pravilno se zove proširenom matricom sustava.

$$\begin{array}{c} \vdots \\ x_n = X_n \end{array}$$

kojemu odgovara matrica sustava

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & X_n \end{array} \right),$$

zaključujemo da nam je u Gaußovoj metodi eliminacija cilj dobiti matricu što sličniju posljednjoj (u dijelu lijevo od okomite crte na dijagonali, tj. pozicijama kojima su jednaki redni broj retka i stupca, želimo dobiti jedinice, a iznad i ispod dijagonale nule), a da pritom naravno odgovarajući sustav ima ista rješenja kao polazni. Očigledno pritom ne možemo primjenjivati sasvim proizvoljne operacije. Dozvoljene operacije koje se smiju primijeniti u Gaußovoj metodi eliminacija zovu se elementarne transformacije po retcima:

**Definicija 47** (Elementarne transformacije po retcima). *Postoje tri elementarne transformacije po retcima:*

- Zamjena dva retka (član po član), tj. dozvoljeno je mijenjati poredak jednadžbi, što očito ne mijenja rješenja sustava.
- Množenje proizvoljnog retka brojem koji nije nula (množenje svih članova retka tim brojem), tj. dozvoljeno je bilo koju jednadžbu pomnožiti bilo kojim nenul-brojem.<sup>4</sup>
- Pribrajanje jednog retka drugom (član po član), tj. dozvoljeno je bilo koju jednadžbu pribrojiti bilo kojoj drugoj.<sup>5</sup>

Tim operacijama se doduše mijenja matrica sustava, ali ne mijenjamo skup rješenja. Između uzastopnih matrica koje dobivamo u Gaußovoj metodi eliminacija pišemo znak  $\sim$  (i govorimo o ekvivalentnim matricama sustava). Uočimo da druga elementarna transformacija dozvoljava i dijeljenje retka, tj. jednadžbe, bilo kojim brojem  $\alpha \neq 0$ , jer je to isto što i množenje brojem  $\beta = \frac{1}{\alpha} \neq 0$ .

<sup>4</sup>Ako su neka dva broja jednaka ( $L = D$ ), onda su jednaki i njihovi umnošci s nekim trećim brojem ( $La = Da$ ), dakle se ni ovom operacijom ne mijenjaju rješenja sustava.

<sup>5</sup>Ako su dvaput po dva broja jednaka ( $L_1 = D_1$  i  $L_2 = D_2$ ), onda su jednaki i njihovi zbrojevi ( $L_1 + L_2 = D_1 + D_2$ ), pa ni ova operacija ne mijenja rješenja sustava.

**Primjer 238.** Neka je dana sljedeća matrica sustava:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right).$$

Mogli bismo primjerice prvo zamijeniti treći i četvrti redak: Prva elementarna transformacija izvedena kao zamjena trećeg i četvrtog retka matrice sustava može izgledati primjerice ovako:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \end{array} \right).$$

Sad bismo mogli zadnji redak podijeliti s 2:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{2} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -12 & 5 & 0 \end{array} \right).$$

U posljednjoj matrici možemo primjerice drugi redak pribrojiti prvom:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -12 & 5 & 0 \end{array} \right) + \text{drugi redak} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -12 & 5 & 0 \end{array} \right).$$

Budući je oduzimanje nekog retka od nekog drugog isto što i množenje jednog retka s  $-1$  te zatim pribrajanje tom drugom retku, slijedi da kombinacija druge i treće elementarne transformacije dozvoljava i oduzimanje jednog retka od drugog. Nadalje, primijetimo da elementarne transformacije dozvoljavaju dodavanje i oduzimanje proizvoljnog višekratnika jednog retka nekom drugom retku. Želimo li recimo trostruki drugi redak oduzeti od četvrtog, to je dozvoljeno jer je ekvivalentno sljedećem redosljedu elementarnih transformacija: Drugi redak pomnožimo s  $-3$ , zatim tako izračunati novi drugi redak dodamo četvrtom retku i na kraju drugi redak podijelimo s  $-3$ , čime ga vraćamo u oblik prije prvog koraka. Na konkretnom primjeru to bi izgledalo ovako:

**Primjer 239.** Umjesto u tri koraka:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -12 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 & 3 \\ 3 & -12 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -15 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -15 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

istu stvar možemo objediniti u jedan korak:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -12 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -15 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

U Gaußovoj metodi eliminacija sustav s jedinstvenim rješenjem prepoznat ćemo po tome što ćemo matricu sustava elementarnim transformacijama uspjeti svesti na oblik

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & X_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & X_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & X_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nulretci (retci u kojima su samo nule) ne moraju postojati. Oni odgovaraju suvišnim jednadžbama, tj. jednakostima  $0 = 0$ , te ih u „ručnom” rješavanju sustava brišemo. U navedenom slučaju rješenje polaznog sustava je  $n$ -torka  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

**Napomena 22.** Cramerov sustav je sustav s jedinstvenim rješenjem koji je tipa  $n \times n$  (dakle, ima onoliko jednadžbi koliko ima nepoznanica).

**Primjer 240.** Elementarnim transformacijama se sustav

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

može svesti na oblik

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

te taj sustav ima samo jedno rješenje:  $(3, 1, 0)$  tj.  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 0$ .

Primijetimo da sustavi koji imaju manje jednadžbi nego nepoznanica ne mogu imati jedinstveno rješenje — ili ga uopće nemaju ili ih je beskonačno mnogo.

Sustave bez rješenja uvijek prepoznavamo po tome što se u nekom trenutku rješavanja pojavi kontradiktorna jednadžba, tj. jednakost oblika  $\spadesuit = 0$  gdje je  $\spadesuit$  broj različit od nule. U Gaußovoj metodi eliminacija to je vidljivo tako što se u nekom trenutku postupka kao neki od redaka matrice sustava dobije redak oblika

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid \spadesuit)$$

s  $\spadesuit \neq 0$ . Taj redak odgovara kontradiktornoj jednadžbi

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = \spadesuit.$$

Homogeni sustavi uvijek imaju bar trivijalno rješenje  $(0, \dots, 0)$  te je ova situacija nemoguća za homogene sustave.

**Primjer 241.** *Ako na matricu sustava*

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -7 & 7 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

*primijenimo elementarne transformacije (prvi redak pomnožimo s 2 i zatim prvi i drugi oduzmemo od trećeg), dobit ćemo*

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

*te sustav nema rješenja.*

U Gaußovoj metodi eliminacija sustav s beskonačno mnogo rješenja prepoznat ćemo po konačnoj matrici koja je oblika

$$\left( \begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \heartsuit & \dots & \heartsuit & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \heartsuit & \dots & \heartsuit & X_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \heartsuit & \dots & \heartsuit & X_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \heartsuit & \dots & \heartsuit & X_k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right).$$



Pritom su sa  $\heartsuit$  i  $X_1, \dots, X_k$  označeni bilo kakvi brojevi. Broj  $k$  (broj jedinica na dijagonali koji nam je na kraju preostao) je manji od broja nepoznanica  $n$  (tj. imamo bar jedan stupac sa  $\heartsuit$  — takve stupce zvat ćemo „umetnutim” stupcima). Naravno,  $k$  ne može biti veći od broja jednadžbi polaznog sustava niti od broja nepoznanica. I ovdje nulretci ne moraju postojati (odnosno mogu se brisati tijekom računa). U slučaju završne matrice koja ukazuje na postojanje beskonačno mnogo rješenja, rješenje očitavamo na sljedeći način: Nepoznanicama koje odgovaraju umetnutim stupcima pridružujemo različite slobodne parametre — te varijable mogu poprimiti proizvoljne vrijednosti. Vrijednosti nepoznanica koje odgovaraju stupcima lijevo od umetnutih (prvih  $k$  nepoznanica) ovise o tim parametrima, a tu ovisnost zapisujemo tako da konačnu matricu ponovno prevedemo natrag u oblik jednadžbi.

**Primjer 242.** *Sustav*

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 6 & 7 \end{array} \right)$$

*se elementarnim transformacijama može svesti na oblik*

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

*Treći i četvrti stupac su „umetnuti” pa vrijednosti  $x_3$  i  $x_4$  mogu biti proizvoljne. Pišemo:  $x_3 = t \in \mathbb{R}$ ,  $x_4 = s \in \mathbb{R}$ . Završna matrica odgovara sustavu*

$$x_1 - x_3 + 2x_4 = 3,$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1$$

*te je rješenje sustava*

$$x_1 = 3 + t - 2s, \quad x_2 = 1 + 3t - 2s, \quad x_3 = t \in \mathbb{R}, \quad x_4 = s \in \mathbb{R}.$$

Za praktički svaki sustav linearnih jednadžbi prije ili kasnije doći ćemo do jednog od opisana tri konačna oblika matrice sustava. Iznimka su sustavi kod kojih se u nekom trenutku dobije stupac u kojemu su samo nule (a da to nije zadnji stupac slobodnih članova). To ukazuje na to da je odgovarajuća nepoznanica u svim jednadžbama pomnožena s nulom te je njen iznos neovisan o ostalim. Dakle, takav sustav sigurno nema jedinstveno rješenje jer ta nepoznanica ima proizvoljnu vrijednost (opisana je slobodnim parametrom).

U slučaju da se pojavi ova situacija, postupak nastavljamo kao da tog stupca nema, sve dok ne dobijemo konačni oblik matrice.

Iako je provođenje elementarnih transformacija po retcima načelno dozvoljeno u bilo kojem redosljedu, postoji algoritam koji daje redosljed koji je za većinu sustava najefikasniji. Taj algoritam zove se<sup>6</sup> Gaußova metoda eliminacija. Pritom pozicije matrice sustava označavamo s  $(i, j)$ :  $i$ -ti redak,  $j$ -ti stupac. Nadalje, iako time mijenjamo broj jednadžbi sustava, ali ne i njegova rješenja, dozvolit ćemo brisanje nulredaka iz matrice sustava. Algoritam Gaußove metode eliminacija je sljedeći:

1. Uzmi sljedeći po redu ( $i$ -ti) stupac. Ako je ovo početni korak, uzmi prvi stupac ( $i = 1$ ). Ako bi trebalo uzeti stupac slobodnih članova, STOP — gotovo je.
2. Ako je na dijagonalnoj poziciji  $(i, i)$  nula, zamjenom  $i$ -tog retka s nekim retkom *ispod* njega dovedi broj različit od nule na tu poziciju. Ako to ne možeš postići, STOP — gotovo je.
3. Pomoću „ključnog elementa” (broja na poziciji  $(i, i)$ ) poništi ostatak stupca: Svakom retku u kojem iznad/ispod ključnog elementa nije nula, dodaj odgovarajući višekratnik  $i$ -tog retka.
4. Ukoliko si dobio kontradiktornu jednadžbu, STOP — sustav nema rješenja.
5. Ukoliko si dobio nulredak, možeš ga pobrisati iz matrice sustava.
6. Vрати se na prvi korak.

Ukoliko je postupak stao iz razloga navedenih u prva dva koraka, sve retke u kojima je na poziciji  $(i, i)$  broj različit od 1 podijelimo tim brojem i na kraju očitamo rješenje.

**Primjer 243.** Beer-Lambertov zakon za sustav s više komponenti koji se spektroskopski analizira glasi:

$$A = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i c_i l,$$

gdje je  $A$  apsorbancija,  $l$  je duljina puta,  $\varepsilon_i$  je molarni apsorpcijski koeficijent, a  $c_i$  je množinska koncentracija pojedine komponente (sumira se po

---

<sup>6</sup>Ovdje opisani algoritam zapravo se zove Gauß-Jordanova metoda eliminacija. Razlika između Gaußove i Gauß-Jordanove metode je u tome što se u pravoj Gaußovoj metodi poništavaju samo elementi ispod dijagonale, dok se u Gauß-Jordanovoj metodi poništavaju elementi ispod i iznad dijagonale matrice sustava.

|                         | <i>p</i> -ksilen                    | <i>m</i> -ksilen                    | <i>o</i> -ksilen                    | etilbenzen                          | $A_{uk}$ |
|-------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|----------|
| $\lambda / \mu\text{m}$ | $\varepsilon l / \text{L mol}^{-1}$ | $\varepsilon l / \text{L mol}^{-1}$ | $\varepsilon l / \text{L mol}^{-1}$ | $\varepsilon l / \text{L mol}^{-1}$ |          |
| 12,5                    | 1,502                               | 0,0514                              | 0                                   | 0,0408                              | 0,1013   |
| 13,0                    | 0,0261                              | 1,1516                              | 0                                   | 0,0820                              | 0,09943  |
| 13,4                    | 0,0342                              | 0,0355                              | 2,532                               | 0,2933                              | 0,2194   |
| 14,3                    | 0,0340                              | 0,0684                              | 0                                   | 0,3470                              | 0,03396  |

Slika 7.5: Tablica uz primjer 243.

svim komponentama). Pri nekoj spektroskopskoj analizi dobiveni su podaci prikazani tablicom <sup>7</sup> 243.

Beer-Lambertov zakon nam daje sustav iz kojeg možemo odrediti nepoznate koncentracije komponenti:

$$1,502c_1 + 0,0514c_2 + 0,0408c_4 = 0,1013 \text{ mol/L},$$

$$0,0261c_1 + 1,1516c_2 + 0,0820c_4 = 0,09943 \text{ mol/L}$$

$$0,0342c_1 + 0,0355c_2 + 2,532c_3 + 0,2933c_4 = 0,2194 \text{ mol/L}$$

$$0,0340c_1 + 0,0684c_2 + 0,3470c_4 = 0,03396 \text{ mol/L}.$$

Očigledno bi bilo mukotrpno „ručno“ rješavati takav sustav. Za ovakve realistične primjere koriste se gotovi programi u koje je ugrađena neka varijanta Gaußove metode eliminacija.



**Ponovimo bitno...** Dozvoljene operacije u Gaußovoj metodi eliminacija su elementarne transformacije koje primjenjujemo na matricu sustava. Matrica sustava je tablični zapis koeficijenata jednadžbi sustava i slobodnih članova u kojem retci odgovaraju pojedinim jednadžbama, a stupci pojedinim nepoznicama. Postoje tri vrste elementarnih transformacija: zamjena dva retka matrice sustava, množenje retka matrice sustava brojem različitim od nule i pribrajanje jednog retka matrice sustava drugom. Cilj Gaußove metode je na dijagonali matrice sustava dobiti jedinice, a ispod i iznad dijagonale nule. Nulretke koji se pojave u algoritmu možemo brisati jer predstavljaju jednadžbe  $0 = 0$ . Ako se tokom eliminacija pojavi redak u kojem su svi koeficijenti osim onog u zadnjem stupcu nula, taj redak predstavlja kontradiktornu jednadžbu i sustav nema rješenja. Ako je konačna matrica sustava potpuno eliminirana, tj. do na stupac slobodnih članova sadrži na dijagonali

<sup>7</sup>Izvor: <http://www.ch.ic.ac.uk/harrison/Teaching/Sheet1.pdf>

samo jedinice, a izvan dijagonale samo nule, sustav ima jedinstveno rješenje. Ako ne nastupi nijedan od prethodna dva slučaja, sustav ima beskonačno mnogo rješenja. 🐣🐣🐣



## Poglavlje 8

# Matrice, vektorski prostori i linearni operatori

### 8.1 Uvod u matrice

Iako smo izraz *matrica* već koristili u kontekstu matrice sustava linearnih jednadžbi (odjeljak 7.2), tamo se zapravo jednostavno radilo o tablici koja je služila za preglednije provođenje Gaußove metode eliminacija, tj. tablici na kojoj se provode elementarne transformacije u svrhu rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Stvarni pojam matrice srodniji je pojmu broja: Matrice su matematički objekti *s kojima* se računa (a ne *na kojima* se provode operacije). Po svojem obliku, matrice su pravokutne tablice koje sadrže brojeve:

**Definicija 48 (Matrica).** *Matrica je pravokutna tablica realnih ili kompleksnih brojeva. Brojeve u matrici nazivamo njenim elementima. Matrice čiji elementi su realni brojevi zovemo realnim matricama, a one s kompleksnim elementima su kompleksnim matricama. Matrica je reda (tipa, dimenzije)  $m \times n$  ako ima  $m$  redaka i  $n$  stupaca.*

Matrice omeđujemo okruglim ili uglatim zagradama, a označavamo ih velikim slovima latinske abecede. Ako je  $A$  realna matrica tipa  $m \times n$  pišemo:

$$A \in M_{m,n}$$

ili  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Dakle,  $M_{m,n} = M_{m,n}(\mathbb{R})$  je skup svih realnih matrica tipa  $m \times n$ . Skup svih kompleksnih matrica tipa  $m \times n$  se označava s  $M_{m,n}(\mathbb{C})$ . Naravno, svaka realna matrica može se po potrebi shvatiti kao kompleksna:  $M_{m,n}(\mathbb{R}) \subset M_{m,n}(\mathbb{C})$ .

**Primjer 244.** Matrica  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  je realna matrica tipa  $2 \times 3$ :  $A \in M_{2,3}$ .

Ako je matrica označena slovom  $A$ , bro (element matrice) koji se nalazi u  $i$ -tom retku i  $j$ -tom stupcu označavamo s  $a_{ij}$ . Piše se  $A = [a_{ij}]$ . Uvijek se prvo navodi indeks retka, a onda indeks stupca. Matrice  $A$  i  $B$  su **jednake matrice** ako su istog tipa i vrijedi  $a_{ij} = b_{ij}$  za sve  $i, j$ .

**Definicija 49 (Dijagonalna matrice).** *Dijagonalu matrice  $A$  čine njezinji elementi kojima je indeks retka jednak indeksu stupca, tj. elementi  $a_{ii}$  s  $i = 1, 2, \dots$*

**Primjer 245.** *Ako je  $A \in M_{2,3}$  matrica iz primjera 244, onda je  $a_{12} = 1$ ,  $a_{23} = 2$ , dok  $a_{32}$  ne postoji jer matrica nema trećeg retka. Dijagonalu matrice  $A$  čine brojevi  $2, -1$ .*

U primjenama, posebno česte su matrice kojima je broj redaka jednak broju stupaca ( $m = n$ ):

**Definicija 50 (Kvadratne matrice).** *Matrica  $A$  naziva se kvadratnom ako ima jednako mnogo redaka i stupaca. Skup svih realnih kvadratnih matrica s po  $n$  redaka i stupaca označava se s  $M_n$  ili  $M_n(\mathbb{R})$ , a skup svih kompleksnih kvadratnih matrica s po  $n$  redaka i stupaca označava se s  $M_n(\mathbb{C})$ .*

Uz kvadratne matrice u primjenama su česte i matrice s po jednim retkom odnosno stupcem:

**Definicija 51 (Matrice-retci i matrice-stupci).** *Ako matrica ima samo jedan redak, govorimo o matrici-retku, a ako ima samo jedan stupac govorimo o matrici-stupcu.*

**Primjer 246.** *Matrica*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_2$$

*je realna kvadratna matrica reda 2, matrica*

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 89 \\ -34 \end{pmatrix} \in M_{3,1}$$

*je realna matrica-redak, a*

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5+i & -2i & 0 \end{pmatrix} \in M_{1,5}(\mathbb{C})$$

*je kompleksna matrica-redak.*

Ako matrici  $A$  zamijenimo retke i stupce („preklopimo ju preko dijagonale”), dobivamo njenu transponiranu matricu  $A^t$ . Preciznije:

**Definicija 52 (Transponirana matrica).** *Transponirana matrica matrice  $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$  je matrica  $A^t \in M_{n,m}$  koja na poziciji  $(i, j)$  ima  $a_{ji}$ . Ista definicija vrijedi i za  $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ .*

**Primjer 247.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Očigledno vrijedi:

$$(A^t)^t = A.$$

**Definicija 53 (Simetrična matrica).** *Realnu matricu nazivamo simetričnom ako je jednaka svojoj transponiranoj matrici, tj. ako je  $a_{ij} = a_{ji}$  za sve  $i, j$ .*

Budući da transponiranje zamjenjuje broj redaka i stupaca, zaključujemo da simetrične matrice moraju biti kvadratne.

**Primjer 248.** *Matrica*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

*je simetrična.*

Kod kompleksnih matrica simetričnost obično nije zanimljiva, već srodno svojstvo hermitske konjugiranosti:

**Definicija 54 (Hermitska matrica).** *Za matricu  $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$  njena hermitski konjugirana matrica je matrica  $A^* \in M_{n,m}(\mathbb{C})$  koju iz  $A$  dobijemo tako da ju transponiramo i sve elemente kompleksno konjugiramo (tj. na poziciji  $(i, j)$  u  $A^*$  je  $\overline{a_{ji}}$ ).*

*Kompleksna matrica je hermitska ako je jednaka svojoj hermitski konjugiranoj matrici (dakle, ako je  $A = A^*$ ).*

I hermitske matrice moraju biti kvadratne. Pritom za dijagonalne elemente vidimo da mora vrijediti  $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ , tj. svaki dijagonalni element mora sam sebi biti kompleksno konjugiran. Stoga dijagonalni elementi hermitske matrice moraju biti realni brojevi.



**Primjer 249.** *Matrica*

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 1+i & i \\ 1-i & -3 & 2+3i \\ -i & 2-3i & 0 \end{pmatrix}$$

je hermitska.

Ponekad se koriste i antisimetrične matrice (matrice sa svojstvom  $A^t = -A$ ) i antihermitske matrice (kompleksne matrice sa svojstvom  $A^* = -A$ ).

**Zadatak 65.** *Dokažite da antisimetrične i antihermitske matrice moraju biti kvadratne, da na dijagonali antisimetrične matrice moraju biti nule i da na dijagonali antihermitske matrice moraju biti čisto imaginarni brojevi.*

Matrice su matematički objekti koji imaju mnoge sličnosti s brojevima. Uz određene uvjete, one se mogu zbrajati i oduzimati, množiti brojevima i množiti međusobno. Ipak, postoje i mnoge razlike. Tako, primjerice, nije moguće jednu matricu dijeliti s drugom.

Matrice se mogu zbrajati ako su istog tipa. To se radi tako da se zbroje elementi na istim pozicijama:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Rezultat zbrajanja matrica tipa  $m \times n$  je matrica istog tipa.

Svojstva zbrajanja matrica slična su svojstvima zbrajanja brojeva međusobno. Tako za sve matrice  $A, B, C \in \mathbb{M}_{m,n}$  (odnosno  $A, B, C \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ ) vrijedi:

- komutativnost zbrajanja:  $A + B = B + A$ ;
- asocijativnost zbrajanja:  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
- nulmatrica istog tipa je neutralni element za zbrajanje:  $A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A$ ;
- svaka matrica ima suprotnu matricu:  $A + (-A) = -A + A = 0_{m,n}$ .

Pritom imamo:

**Definicija 55 (Nulmatrica i suprotna matrica).** *Nulmatrice su matrice kojima su svi elementi nule. U svakom skupu  $M_{m,n}$  (odnosno  $M_{m,n}(\mathbb{C})$ ) postoji po jedna nulmatrica, koju ćemo označavati s  $0_{m,n}$ .*

*Suprotnamatrica matrice  $A$  je matrica  $-A$  istog tipa koju iz  $A$  dobijemo tako da svim elementima promijenimo predznak.*

Oduzimanje matrica definiramo kao pribrajanje suprotne matrice:  $A - B = A + (-B)$ . Dakle, i oduzimati se mogu samo matrice istog tipa.

**Primjer 250.** Ako je  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , onda je

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svaka matrica može se množiti svakim brojem (skalansom). To se radi tako da se svaki njen element pomnoži tim brojem:

$$\alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}].$$

Množenje matrice skalarom ne mijenja tip matrice. Pritom, za realne matrice pod skalarima podrazumijevamo realne brojeve, a za kompleksne matrice se kao skalari u pravilu uzimaju kompleksni brojevi.

**Primjer 251.** Ako je  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ , onda je  $-3A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ .

Svojstva množenja matrica skalarom slična su svojstvima množenja brojeva međusobno. Tako za sve skalare  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  i matrice  $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}$  (odnosno  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  i matrice  $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ ) vrijedi

- $1 \cdot A = A$ ;
- $0 \cdot A = 0_{m,n}$ ;
- distributivnost:  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$  i  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ ;
- kvaziasocijativnost:  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ .

**Zadatak 66.** Odaberite po volji dvije matrice  $A, B \in M_{2,3}$  i neki skalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Zatim riješite matričnu jednadžbu

$$A + \alpha X = B.$$

**Zadatak 67.** Uz koje uvjete na matricu  $A$  se može izračunati  $2A - 5A^t$ ?



**Ponovimo bitno...** Pravokutne tablice brojeva zovemo matricama. Skup svih realnih matrica s  $m$  redaka i  $n$  stupaca označavamo s  $M_{m,n}$ . Element matrice  $A$  koji je u  $i$ -tom retku i  $j$ -tom stupcu označavamo s  $a_{ij}$ . Elementi  $a_{11}, a_{22}, \dots$  čine dijagonalu matrice. Zamjenom redaka matrice  $A$  sa

stupcima dobivamo transponiranu matricu  $A^t$ . Ako je  $A = A^t$ , kažemo da je  $A$  simetrična. Ako kompleksnu matricu  $A$  transponiramo i sve njezine elemente kompleksno konjugiramo, dobivamo hermitski konjugiranu matricu  $A^*$ . Ako je  $A = A^*$ , kažemo da je  $A$  hermitska.

Osnovne algebarske operacije s matricama su zbrajanje matrica i množenje matrica skalarima. Dvije matrice istog tipa zbrajamo tako da zbrojimo elemente na istim pozicijama. Matricu množimo skalarom tako da joj sve elemente pomnožimo tim skalarom. Oduzimanje matrica se definira kao pribrajanje suprotne matrice.



## 8.2 Vektorski i unitarni prostori

### 8.2.1 Pojam vektorskog prostora

U dosadašnjem sadržaju susreli smo zbrajanje i množenje različitih objekata:

- zbrajanje i množenje realnih odnosno kompleksnih brojeva,
- zbrajanje realnih funkcija sa zajedničkom domenom i množenje realnih funkcija brojevima,
- zbrajanje geometrijskih vektora i množenje geometrijskih vektora skalarima,
- zbrajanje matrica istog tipa i množenje matrica skalarima.

Preciznije, u svakom od skupova  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $V^2$ ,  $V^3$ ,  $V^2(O)$ ,  $V^3(O)$  i  $M_{m,n}$ ,  $M_{m,n}(\mathbb{C})$  i u skupu  $\mathbb{R}^D$  svih realnih funkcija s domenom  $D$  znamo zbrajati po dva elementa tako da dobijemo element istog skupa, a da pritom zbrajanje ima uobičajena svojstva. Nadalje, u svim navedenim skupovima znamo njihove elemente množiti brojevima (skalarima) tako da dobijemo elemente istog skupa, pri čemu u slučaju  $\mathbb{C}$  i  $M_{m,n}(\mathbb{C})$  kao skalare možemo koristiti bilo realne bilo kompleksne brojeve. U svim navedenim slučajevima množenje skalarom ima svojstva kao množenje brojeva međusobno. Kad neki skup ima svojstvo da njegove elemente znamo zbrajati i množiti brojevima (skalarima) tako da dobijemo elemente *istog* skupa i tako da vrijede uobičajena svojstva tih računskih operacija, taj skup nazivamo **vektorskim prostorom**, a njegove elemente **vektorima**. Dakle, svi gore navedeni skupovi su primjeri vektorskih prostora, odnosno i brojeve i matrice i realne funkcije možemo smatrati vektorima.

Precizirajmo ovu ideju. Uzmimo da je  $V$  neki (naravno: neprazan) skup čije elemente želimo zvati vektorima. Budući da se u daljnjem nećemo ograničiti na geometrijske vektore, objekte koje u nekom kontekstu gledamo kao vektore označavat ćemo jednostavno  $v, w, \dots$ . Ovisno o tome kakav vektorski prostor trebamo, također je potrebno odabrati koju vrstu brojeva ćemo uzeti za skalare  $s$  kojima ćemo množiti vektore: realne ili kompleksne brojeve. Vektorski prostor bit će **realan** ako su skalari realni brojevi, a **kompleksan** ako su skalari kompleksni brojevi. Da bismo  $V$  zvali vektorskim prostorom, moraju biti definirane dvije operacije: zbrajanje vektorâ i množenje vektorâ skalarima. Pritom, te operacije moraju imati sljedeća svojstva: zbroj dva elementa iz  $V$  (dva vektora) mora opet biti element iz  $V$  (tj. vektor), a umnožak elementa iz  $V$  (vektora) sa skalarom mora biti element iz  $V$  (dakle, vektor). Nadalje, te operacije moraju imati „prirodna” svojstva: zbrajanje vektora mora imati ista svojstva kao zbrajanje brojeva, a množenje vektora skalarom mora imati svojstva kao množenje geometrijskih vektora skalarom. Formalnije:

**Definicija 56 (Vektorski prostor).** *Odabrani neprazan skup  $V$  s odabranim skupom skalara ( $\mathbb{R}$  ili  $\mathbb{C}$ ) zove se vektorski prostor ako su definirane operacije  $+$  i  $\cdot$  (zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom) tako da za sve elemente  $v, w, u$  iz  $V$  i sve skalare  $\alpha, \beta$  vrijedi:*

$$\begin{array}{ll} v + w \in V & \alpha v \in V \\ v + w = w + v & 1 \cdot v = v \\ (v + w) + u = v + (w + u) & (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v & v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0} \\ \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w & (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta w \end{array} .$$

Neutralni element za zbrajanje, označen s  $\mathbf{0} \in V$ , zove se nulvektorom. Elementi vektorskog prostora zovu se vektori. Vektorski prostor je realan ako su skalari realni brojevi, a kompleksan ako su skalari kompleksni brojevi.

Iz gornjih svojstava mogu se dokazati i druga očekivana svojstva, primjerice da je  $0 \cdot v = \mathbf{0}$  (množenje s nulom daje nulvektor),  $-v = (-1) \cdot v, \dots$ . Preko suprotnog vektora definira se i oduzimanje vektora:  $v - w = v + (-w)$ .

**Primjer 252.** Skupovi  $V^2, V^3, V^2(O)$  i  $V^3(O)$  su primjeri realnih vektorskih prostora.

**Zadatak 68.** Čini li skup svih matrica vektorski prostor? Zašto?

**Primjer 253.** Uzmimo  $V = \mathbb{C}$ . Zbroj dva kompleksna broja je kompleksan broj. Ako kao skup skalara također uzmemo  $\mathbb{C}$ , očito je da vrijede definicijska svojstva te tako skup  $\mathbb{C}$  postaje primjer kompleksnog vektorskog prostora.

No, ako kao skup skalara uzmemo samo realne brojeve (dakle, kompleksne brojeve odlučimo množiti samo realnim brojevima), i dalje je rezultat kompleksan broj (dakle, element od  $V$ ) i svojstva množenja su ista. Dakle,  $\mathbb{C}$  možemo gledati i kao realan vektorski prostor.

**Primjer 254.** Promotrimo skup  $\mathbb{R}^4$ . Njegovi elementi su uređene četvorke  $(x, y, z, w)$ , gdje su  $x, y, z, w$  realni brojevi. Uzmimo realne brojeve kao skalare i definirajmo:

$$(x, y, z, w) + (x', y', z', w') = (x + x', y + y', z + z', w + w'),$$

$$\alpha \cdot (x, y, z, w) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w).$$

Dakle, primjerice je  $(1, 2, 3, 4) + (0, \pi, e, -1) = (1, 2 + \pi, 3 + e, 3)$ , a  $4 \cdot (0, 1, -1, 2) = (0, 4, -4, 8)$ . Obzirom na tako definirane operacije  $+$  i  $\cdot$  skup  $\mathbb{R}^4$  je realni vektorski prostor.

Potpuno analogno se definiraju zbrajanje i množenje skalarom za elemente iz  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{C}^n$  za sve prirodne brojeve  $n$ : zbraja se po koordinatama, a skalarom množi tako da svaku koordinatu pomnožimo tim skalarom. Uz tako definirane operacije svi  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{C}^n$  su (realni odnosno kompleksni) vektorski prostori.

Kao u prethodnom primjeru, prostori  $\mathbb{C}^n$  mogu se gledati i kao realni vektorski prostori, ako njihove elemente množimo samo realnim brojevima.

**Primjer 255.** Uzmimo skup  $C(I)$  svih neprekidnih funkcija  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje je  $I$  neki interval. Zbroj  $f + g$  dviju funkcija  $f, g \in C(I)$  definira se s

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Kako je zbroj dvije neprekidne funkcije neprekidna funkcija, vrijedi  $f + g \in C(I)$ . Nadalje, umnožak funkcije  $f \in C(I)$  sa skalarom  $\alpha \in \mathbb{R}$  definiramo s

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

Opet, budući da je umnožak neprekidne funkcije s brojem neprekidna funkcija, vrijedi  $\alpha \cdot f \in C(I)$ . Uz tako definirane operacije skup  $C(I)$  realni vektorski prostor. Analogno bi se definirao vektorski prostor realnih funkcija koje su na  $I$  derivabilne, integrabilne ili jednostavno kojima je domena  $I$ .

Ako vektorski prostor sadrži bar još jedan vektor osim nulvektora (dakle, ako imamo netrivialan vektorski prostor), onda taj prostor sadrži beskonačno mnogo vektora. To je lako vidjeti: Ako je  $v \neq \mathbf{0}$  onda su za svaki skalar  $\alpha$  (a njih ima beskonačno mnogo) vektori  $\alpha v$  različiti. Stoga svaki vektorski prostor osim trivijalnog vektorskog prostora  $V = \{\mathbf{0}\}$  sadrži beskonačno mnogo elemenata.

### 8.2.2 Baza i dimenzija vektorskog prostora

Kao što smo istaknuli, prostori geometrijskih vektora primjer su (realnih) vektorskih prostora. U nastavku ćemo poopćiti njihova svojstva na opće vektorske prostore. U poglavlju 6.1 vidjeli smo, među ostalim, da ako su  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  baza za  $V^2$ , onda se svaki vektor iz  $V^2$  može zapisati kao  $x\vec{a} + y\vec{b}$  za jedinstveno određene (realne) skalare  $x$  i  $y$ . Izrazi poput  $x\vec{a} + y\vec{b}$  općenito se nazivaju linearnim kombinacijama.

**Definicija 57 (Linearna kombinacija).** *Linearna kombinacija jednog ili više vektora iz nekog vektorskog prostora je vektor koji je zbroj tih vektora pomnoženih s nekim skalarima.*

Jednočlane linearne kombinacije su jednostavno skalarni višekratnici nekog vektora  $v$ , tj. vektori  $\alpha v$ .

**Primjer 256.** *Linearne kombinacije vektora  $(1, 2, 3, 4)$  i  $(0, 1, 0, 1)$  iz  $\mathbb{R}^4$  su oblika*

$$\alpha \cdot (1, 2, 3, 4) + \beta \cdot (0, 1, 0, 1) = (\alpha, 2\alpha + \beta, 3\alpha, 4\alpha + \beta).$$

**Primjer 257.** *Polinomi se mogu definirati kao linearne kombinacije monoma (u prostoru svih funkcija s  $\mathbb{R}$  u  $\mathbb{R}$ ), pri čemu sad pod monomom podrazumijevamo funkcije oblika  $f(x) = x^n$  s prirodnim brojem  $n$  (u prvom dijelu skripte smo radi jednostavnosti pod monomima podrazumijevali ovakve funkcije pomnožene proizvoljnom konstantom).*

**Primjer 258.** *Kompleksne brojeve možemo definirati kao linearne kombinacije brojeva 1 i  $i$  s realnim skalarima (koeficijentima).*

**Napomena 23.** *Uz određena dodefiniranja, koja nećemo ovdje razrađivati, za operacije koje se rade pri izjednačavanju redoks-reakcija preko polujednadžbi oksidacije i redukcije može se reći: računa se određena linearna kombinacija polujednadžbi oksidacije i redukcije.*

Slično, Hessov zakon možemo formulirati i ovako: ako se neka reakcija može zapisati kao linearna kombinacija nekih drugih reakcija, onda je reakcijski gradijent bilo koje ekstenzivne veličine stanja (primjerice, reakcijska entalpija ili reakcijska Gibbsova energija) jednak linearnoj kombinaciji reakcijskih gradijenata te iste veličine pojedinih reakcija, i to s istim koeficijentima: ako je reakciju  $R$  moguće zapisati kao  $\sum_i \alpha_i R_i$ , onda je  $\Delta_r Y = \sum_i \alpha_i \Delta_{r,i} Y$  za  $Y = H, G, \dots$

**Zadatak 69.** *Možete li koristeći izraz „linearna kombinacija” opisati što je to linearna jednadžba s  $n$  nepoznanica? U kojem vektorskom prostoru je to linearna kombinacija?*

Podsjetimo se, ili napomenimo za one koji se još nisu susreli s tom oznakom: Ako je  $A$  skup i  $n$  prirodan broj, onda  $A^n$  označava skup svih uređenih  $n$ -torki elemenata iz  $A$ . Primjerice,  $\mathbb{C}^3$  je skup svih uređenih trojki kompleksnih brojeva.

**Primjer 259.** Rješenje sustava linearnih jednadžbi s tri nepoznanice definirali smo kao bilo koju uređenu trojku brojeva  $(x, y, z)$  čije uvrštavanje u sve jednadžbe sustava daje istinite numeričke jednakosti. Budući da se radi o uređenim trojkama realnih brojeva, a one su elementi od  $\mathbb{R}^3$ , skup rješenja svakog sustava s tri nepoznanice je podskup od  $\mathbb{R}^3$ .

Primjerice, skup svih rješenja homogenog sustava

$$x + y + z = 0$$

$$5x - y + 2z = 0$$

je skup svih uređenih trojki oblika  $(x, y, z) = (t, t, -2t)$  za  $t \in \mathbb{R}$ .

Linearna kombinacija dva rješenja  $(t, t, -2t)$  i  $(t', t', -2t')$  ima oblik

$$\alpha(t, t, -2t) + \beta(t', t', -2t') = (\alpha t + \beta t', \alpha t + \beta t', -2(\alpha t + \beta t')).$$

Stavimo li  $s = t + t'$ , vidimo da je svaka linearna kombinacija dvaju rješenja gornjeg sustava ponovno rješenje istog tog sustava.

U slučajevima poput gornjeg govorimo o potprostorima: Ako je  $S$  podskup vektorskog prostora  $V$  te ako  $S$  ima svojstvo da su sve linearne kombinacije elemenata iz  $S$  elementi iz  $S$  ( $S$  je „zatvoren na linearne kombinacije”), kažemo da je  $S$  **potprostor** od  $V$  (i pišemo  $S \leq V$ ). Drugim riječima, podskup  $S$  vektorskog prostora  $V$  je potprostor od  $V$  ako je i sam vektorski prostor s obzirom na iste operacije množenja skalarom i zbrajanja koje su definirane na  $V$ .

**Primjer 260.** Skup svih rješenja sustava iz primjera 259 je potprostor od  $\mathbb{R}^3$ .

Slično kao u primjeru 259 pokaže se da općenito vrijedi:

**Teorem 24.** Skup svih rješenja homogenog sustava linearnih jednadžbi s  $n$  nepoznanica je vektorski prostor, potprostor od  $\mathbb{R}^n$ .

**Zadatak 70.** Pokažite da je skup svih rješenja diferencijalne jednadžbe  $y' + a(x)y = 0$  potprostor skupa svih derivabilnih funkcija jedne varijable.

**Zadatak 71.** Ako je  $(\vec{a}, \vec{b})$  baza za  $V^2$ , je li  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  potprostor od  $V^2$ ?

Svaki vektorski prostor  $V$  ima dva očigledna (trivijalna) potprostora. To su on sam ( $V \leq V$ ) i nul-prostor  $\{\mathbf{0}\} \leq V$ . Ostali potprostori nazivaju se netrivialnim ili pravim potprostorima.

**Zadatak 72.** *Nađite po jedan netrivialni potprostor realnih vektorskih prostora  $\mathbb{C}$  i  $M_2$ .*

**Primjer 261.** *Neka je  $\vec{a}$  fiksirani odabrani vektor iz  $V^3$ . Tada je  $\{x\vec{a} : x \in \mathbb{R}\}$  pravi potprostor od  $V^3$ . Slično, ako su  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  dva fiksna vektora iz  $V^3$ , onda je  $\{x\vec{a} + y\vec{b} : x, y \in \mathbb{R}\}$  pravi potprostor od  $V^3$ .*

**Primjer 262.** *Vrijedi:*

$$C^1(\mathbb{R}) \leq C(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

Naravno, nije svaki podskup vektorskog prostora njegov potprostor.

**Primjer 263.** *Uzmimo  $V = \mathbb{C}$  (bilo kao realni bilo kao kompleksni vektorski prostor). Neka je  $S$  prvi kvadrant kompleksne ravnine, tj.  $S = \{x + iy : x, y > 0\} \subset V$ . Uzmemo li skalar  $\alpha = -1$  i vektor  $v = 2 + i \in S$ , vidimo da  $\alpha \cdot v = -2 - i \notin S$ . Dakle,  $S$  nije potprostor od  $V$ .*

U poglavlju 6.1 vidjeli smo da su dva geometrijska vektora  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  kolinearna točno onda, ako se svaki od njih može zapisati kao (jednočlana) linearna kombinacija drugog, tj. ako i samo ako je  $\vec{w} = x\vec{v}$  za neki broj  $x$ . Slično, tri geometrijska vektora su komplanarna točno ako se svaki od njih može zapisati kao linearna kombinacija druga dva:  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$  ako i samo ako je  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$  za neke brojeve  $x$  i  $y$ . S druge strane, dva vektora čine bazu za  $V^2$  odnosno  $V^2(O)$  točno ako su nekolinearni, a tri vektora čine bazu za  $V^3$  odnosno  $V^3(O)$  točno ako su nekomplanarni. Dakle, iz perspektive korištenja baza (odnosno koordinata), kolinearnost i komplanarnost su nepoželjna svojstva. Kolinearnost i komplanarnost geometrijskih vektora osnovni su primjeri općenitijeg odnosa „linearne zavisnosti”.

Primijetimo prvo: Koliko god vektora  $v, w, \dots$  iz nekog vektorskog prostora  $V$  uzeli, uvijek postoji njihova linearna kombinacija koja daje nulvektor (to je tzv. trivijalna linearna kombinacija  $0 \cdot v + 0 \cdot w + \dots = \mathbf{0}$ ). Također, u slučaju geometrijskih vektora, ako imamo dva kolinearna vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , tj.  $\vec{b} = x\vec{a}$ , onda imamo i njihovu netrivialnu linearnu kombinaciju  $x\vec{a} - 1 \cdot \vec{b} = \mathbf{0}$  koja je nulvektor (a ako imamo tri komplanarna vektora, tj.  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$  analogno  $x\vec{a} + y\vec{b} - 1 \cdot \vec{c} = \mathbf{0}$ ). Ovo razmišljanje dovodi do sljedeće definicije:



**Definicija 58 (Linearna (ne)zavisnost).** *Konačan skup vektora  $\{v, w, u, \dots\}$  u nekom vektorskom prostoru  $V$  je linearno zavisan ako postoji linearna kombinacija  $\alpha v + \beta w + \gamma u + \dots$  vektora tog skupa koja je jednaka nulvektoru, a u kojoj je bar jedan od koeficijenata  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  različit od 0. Skup vektora koji nije linearno zavisan zove se linearno nezavisan skup.*

Alternativno se iskaz sljedećeg teorema može uzeti kao definicija linearne zavisnosti, iz čega je vidljivo da su kolinearnost i komplanarnost geometrijskih vektora osnovni primjeri linearne zavisnosti.

**Teorem 25.** *Konačan podskup  $\{v, w, u, \dots\}$  vektorskog prostora  $V$  je linearno zavisan ako i samo ako se bar jedan od vektora tog skupa može zapisati kao linearna kombinacija ostalih.*

*Dokaz.* Ako je  $\{v, w, u, \dots\}$  linearno zavisan, po definiciji postoji linearna kombinacija  $\alpha v + \beta w + \gamma u + \dots = \mathbf{0}$  u kojoj je bar jedan od koeficijenata  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  različit od 0. Neka je taj koeficijent  $\alpha$  (inače zamijenimo oznake vektora). Tada dijeljenjem s  $\alpha$  dobivamo  $v = -\frac{\beta}{\alpha}w - \frac{\gamma}{\alpha}u - \dots$ , odnosno jedan od vektora smo zapisali kao linearnu kombinaciju ostalih. Obrnuto, ako se jedan vektor (npr.  $v$ ) može zapisati kao  $v = xw + yu + \dots$ , onda je  $-1 \cdot v + xw + yu + \dots = \mathbf{0}$  primjer linearne kombinacije iz definicije linearne zavisnosti.  $\square$

Sad lako vidimo: Svaki skup vektora koji sadrži nulvektor je linearno zavisan. Naime, ako gledamo skup  $\{\mathbf{0}, v, w, \dots\}$ , odmah vidimo da se jedan od tih vektora, nulvektor, može zapisati kao linearna kombinacija ostalih:  $\mathbf{0} = 0 \cdot v + 0 \cdot w + \dots$ . Nadalje, svaki jednočlan skup  $\{v\}$  s  $v \neq \mathbf{0}$  je linearno nezavisan.

**Primjer 264.** *Svaka dva proporcionalna vektora su linearno zavisna. Primjerice, vektori  $(1, 2, 3, 4)$  te  $i(1, 2, 3, 4) = (i, 2i, 3i, 4i)$  su linearno zavisni u  $\mathbb{C}^4$ .*

**Primjer 265.** *Pogledajmo dvije eksponencijalne funkcije s različitim bazama  $a$  i  $b$ . Ako bi one bile linearno zavisne, moralo bi vrijediti*

$$a^x = c \cdot b^x$$

za sve  $x \in \mathbb{R}$  i neki realan broj  $c$ . No, gornja jednakost je ekvivalentna s  $(a/b)^x = c$ , tj. eksponencijalna funkcija s bazom  $a/b \neq 1$  bi bila konstantna funkcija, što je nemoguće. Dakle, svake dvije eksponencijalne funkcije s različitim bazama su linearno nezavisne.

**Definicija 59 (Dimenzija i baza).** *Najveći broj elemenata kojeg u danom vektorskom prostoru može sadržavati neki linearno nezavisan skup vektora*

zove se *dimenzijom prostora*. Baza prostora je svaki linearno nezavisan skup vektora koji ima onoliko elemenata kolika je dimenzija prostora.

Ako je dimenzija konačna (prirodan broj), govorimo o konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru, a inače o beskonačnodimenzionalnom vektorskom prostoru. Do na rijetke primjere, u ovoj skripti se bavimo samo konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima. Za njih podrazumijevamo da su baze ne samo podskupovi, nego uređene; primjerice, ako je prostor dimenzije 4 i  $\{a, b, c, d\}$  njegova baza, gledamo ju kao uređenu četvorku  $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ .

Nećemo dokazivati, ali vrijedi zapamtiti:

**Teorem 26.** *Realni vektorski prostori  $\mathbb{R}^n$  su  $n$ -dimenzionalni realni vektorski prostori. Slično, vektorski prostori  $\mathbb{C}^n$  su  $n$ -dimenzionalni kompleksni vektorski prostori.*

**Korolar 3.** *Realni vektorski prostori  $M_{m,n}$  su  $m \cdot n$ -dimenzionalni realni vektorski prostori. Slično, vektorski prostori  $M_{m,n}(\mathbb{C})$  su  $m \cdot n$ -dimenzionalni kompleksni vektorski prostori.*

Korisno je zapamtiti: Svaki skup vektora koji sadrži više elemenata nego što je dimenzija prostora sigurno je linearno zavisna. Također, potprostor  $W \leq V$  ne može imati dimenziju veću od dimenzije prostora  $V$ .

**Primjer 266.** Matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 20 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  i  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  su linearno zavisne jer se radi o pet matrica iz  $M_2$  koji ima dimenziju  $2 \cdot 2 = 4$ .

Već smo rekli da  $\mathbb{C}$  brojeva možemo gledati i kao realni vektorski prostor, ako njegove elemente množimo samo s realnim brojevima. No, on više nije jednodimenzionalan. Naime, kad bi postojala jednočlana baza  $\{a\}$  ( $a = \alpha + \beta i$ ) za realni vektorski prostor  $\mathbb{C}$ , to bi značilo da se svaki  $z \in \mathbb{C}$  može zapisati kao  $z = x \cdot a$  s  $x \in \mathbb{R}$ . S obzirom na to da je svaki  $z$  oblika  $x' + y'i$  dobivamo uvjete  $x' = x\alpha$  i  $y' = x\beta$  koji moraju biti zadovoljeni istovremeno za proizvoljne realne  $x'$  i  $y'$ , uvijek s istim realnim  $\alpha$  i  $\beta$ , odnosno za zadani  $\alpha$  i  $\beta$  moralo bi vrijediti  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x'}{y'}$  za sve  $x'$  i  $y'$ . Kako nemaju svi realni brojevi isti kvocijent, to je nemoguće. S druge strane, očigledno je svaki  $z = x + yi = x \cdot 1 + y \cdot i$  za neke  $x, y \in \mathbb{R}$ , dakle je primjerice  $(1, i)$  baza za realni prostor  $\mathbb{C}$ , odnosno taj je prostor dvodimenzionalan.

**Napomena 24.** *Iz istog razloga vrijedi i općenito: Svi vektorski prostori  $\mathbb{C}^n$  i  $M_{m,n}(\mathbb{C})$  se mogu gledati kao kompleksni, ali i kao realni. U drugom slučaju*

im je dimenzija dvostruko veća nego u prethodnom korolaru jer za opisati jedan kompleksan broj trebamo dva realna broja.

**Primjer 267.** Vektorski prostori realnih svih/neprekidnih/derivabilnih/integrabilnih funkcija s istom domenom su beskonačnodimenzionalni: Ma koliko velik linearno nezavisan skup vektora (funkcija) uzeli, uvijek je moguće naći još neku funkciju koju možemo dodati u taj skup, a da on ostane linearno nezavisan.

No, ako bismo gledali sve linearne kombinacije dviju različitih eksponencijalnih funkcija (npr. onih s bazama 2 i  $e$ ), one čine potprostor prostora  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , no taj potprostor je dvodimenzionalan (bazu mu čine upravo te dvije eksponencijalne funkcije).

**Primjer 268.** Skup  $\mathcal{P}_3$  svih polinoma stupnja 3 (ili manjeg) je vektorski prostor: Zbroj dva polinoma stupnja 3 ili manjeg je polinom stupnja najviše 3, a također je i umnožak konstante i takvog polinoma opet polinom stupnja 3 ili manjeg.

Monomi  $x^n$  različitog stupnja su linearno nezavisni (provjerite!). Svaki polinom iz  $\mathcal{P}_3$  možemo zapisati u obliku  $a + bx + cx^2 + dx^3$ , stoga je skup  $(1, x, x^2, x^3)$  primjer baze tog prostora, odnosno dimenzija od  $\mathcal{P}_3$  jednaka je 4.

Smisao dimenzije vektorskog prostora je da je to najmanji broj vektora potreban da kao njihove linearne kombinacije možemo zapisati sve vektore tog vektorskog prostora, odnosno, osnovno svojstvo svake baze prostora je da se svaki vektor može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze, i to na jedinstven način. Takav zapis zovemo **prikaz vektora u bazi**. Koeficijenti u tom prikazu su **koordinate vektora s obzirom na bazu**. Želimo li odrediti koordinate vektora s obzirom na zadanu bazu, u pravilu je potrebno riješiti sustav linearnih jednadžbi koji proizlazi iz te definicije.

**Primjer 269.** Vektori  $(2, -1, 0, 1)$ ,  $(1, 2, 3, 4)$ ,  $(1, 1, 1, 0)$  i  $(0, 1, 0, 0)$  su baza za  $\mathbb{R}^4$  jer su linearno nezavisni.<sup>1</sup> Prikaz proizvoljnog vektora  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$  u toj bazi je po definiciji oblika

$$\begin{aligned}(x, y, z, w) &= \alpha(2, -1, 0, 1) + \beta(1, 2, 3, 4) + \gamma(1, 1, 1, 0) + \delta(0, 1, 0, 0) = \\ &= (2\alpha + \beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma + \delta, 3\beta + \gamma, \alpha + 4\beta).\end{aligned}$$

Želimo li recimo  $(1, 0, 0, 0)$  zapisati u toj bazi, trebamo naći  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  takve da je

$$(1, 0, 0, 0) = (2\alpha + \beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma + \delta, 3\beta + \gamma, \alpha + 4\beta)$$

---

<sup>1</sup>To možemo provjeriti iz definicije ili pak koristeći rang matrice, kako ćemo vidjeti malo kasnije.

tj. riješiti sustav

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + \gamma &= 1, \\ -\alpha + 2\beta + \gamma + \delta &= 0, \\ 3\beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + 4\beta &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje tog sustava je

$$\alpha = \frac{2}{5}, \beta = -\frac{1}{10}, \gamma = \frac{3}{10}, \delta = \frac{3}{10}.$$

Dakle, vektor  $(1, 0, 0, 0)$  s obzirom na zadanu bazu ima koordinate  $\left[\frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right]$ .

Za neke vektorske prostore postoje „najprirodnije” baze, odnosno baze koje preferiramo koristiti ako je to ikako moguće. Te baze nose naziv kanonske baze. One imaju smisla samo za vektorske prostore geometrijskih vektora, za prostore  $\mathbb{R}^n$  i  $M_{m,n}$  odnosno njihove kompleksne ekvivalente te za prostore polinoma stupnja  $n$  (i još neke rijetke slučajeve koje ovdje nećemo spominjati). **Kanonska baza** za  $\mathbb{R}^n$  (odnosno za  $\mathbb{C}^n$  kao kompleksni prostor) je uređena  $n$ -torka  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  vektora iz tog prostora takvih da  $e_i$  na  $i$ -toj poziciji ima broj 1, a na svim ostalim nule. Da je to baza vidi se po tome što je prikaz

$$\begin{aligned} x &= x_1(1, 0, 0, \dots, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0, 0) + \dots + x_n(0, 0, 0, \dots, 0, 1) = \\ &= x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n \end{aligned}$$

moguć i jedinstven za svaki vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  odnosno  $x \in \mathbb{C}^n$ . Za  $\mathbb{C}^n$  kao realan vektorski prostor kanonska baza uz vektore  $e_1, \dots, e_n$  sadrži i vektore  $ie_1, \dots, ie_n$ . Analogno, matrice  $E_{ij} \in M_{m,n}$  koje na svim pozicijama osim  $(i, j)$  imaju nule, a na toj poziciji imaju 1, čine kanonsku bazu od  $M_{m,n}$ . U prostorima geometrijskih vektora kanonske baze su standardne ortonormirane baze  $(\vec{i}, \vec{j})$  odnosno  $8\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Za vektorski prostor polinoma stupnja  $n$  kanonska baza je  $(x^n, x^{n-1}, \dots, x^2, x, 1)$  (usp. primjer 268).

**Primjer 270.** Kanonska baza za  $\mathbb{C}$  kao realan vektorski prostor je  $(1, i)$ .

**Primjer 271.** Vektor  $(1, 2, 3, 4, 5)$  iz prostora  $\mathbb{R}^5$  u kanonskoj bazi ima koordinate  $(1, 2, 3, 4, 5)$ .

Vrijedi istaknuti još jedan zaključak na koji nas navodi primjer 269 i koji stvarno uvijek vrijedi: Ako za neki vektor  $v$  kojemu znamo koordinate  $(b_1, \dots, b_n)$  u nekoj bazi želimo odrediti koordinate  $(x_1, \dots, x_n)$  u nekoj drugoj („novoj”) bazi, onda se tražene „nove” koordinate dobiju rješavanjem

sustava linearnih jednadžbi kojemu stupac slobodnih članova sadrži koordinate vektora u staroj bazi, a stupci koji odgovaraju nepoznanicama redom sadrže koordinate vektora „nove” baze s obzirom na staru bazu.

Kako provjeriti linearnu (ne)zavisnost nekog skupa vektora iz  $\mathbb{R}^n$  (ili  $\mathbb{C}^n$ ,  $M_{m,n}$  isl.)? To nas može zanimati primjerice jer ih imamo taman kolika je dimenzija i pitamo se radi li se o bazi. Jedan način je da po definiciji izjednačimo njihovu linearnu kombinaciju s nulvektorom i provjeravamo je li ju moguće postići tako da neki koeficijent bude različit od nule, što se u pravilu svodi na ispitivanje ima li određeni homogeni sustav linearnih jednadžbi netrivialnih rješenja.

**Primjer 272.** *Provjerimo jesu li vektori  $a = (1, 1, 1)$ ,  $b = (2, 3, 4)$  i  $c = (4, 6, 8)$  linearno nezavisni u  $\mathbb{R}^3$ . Gledamo za kakve skalare  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  je*

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = \mathbf{0},$$

$$(\alpha, \alpha, \alpha) + (2\beta, 3\beta, 4\beta) + (4\gamma, 6\gamma, 8\gamma) = (0, 0, 0),$$

$$\alpha + 2\beta + 4\gamma = \alpha + 3\beta + 6\gamma = \alpha + 4\beta + 8\gamma = 0,$$

što je homogeni sustav linearnih jednadžbi. Uz trivijalno rješenje  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  on ima i netrivialnih rješenja, npr.  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = -1$ , dakle su vektori  $a$ ,  $b$ ,  $c$  linearno zavisni.

Efikasniji način provjere linearne nezavisnosti je preko ranga matrice.

**Primjer 273.** *U matrici  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  možemo njene retke shvatiti kao dva vektora  $(2, 1, 3)$  i  $(0, -1, 2)$  u  $\mathbb{R}^3$ , a njene stupce kao tri vektora  $(2, 0)$ ,  $(1, -1)$  i  $(3, 2)$  u  $\mathbb{R}^2$ .*

**Definicija 60 (Rang matrice).** *Ako retke matrice (ili njene stupce) shvatimo kao vektore, rang matrice je broj linearno nezavisnih redaka (odnosno stupaca) te matrice.*

Može se dokazati da je rang broj na po retcima jednak rang u brojanom po stupcima, tj. da je gornja definicija dobra. Rang matrice određujemo tako da matricu podvrgnemo elementarnim transformacijama,<sup>2</sup> s tim da se smiju provoditi i sa stupcima, sve dok ne postignemo da su u njoj ispod ili iznad dijagonale svi elementi nula. Tada je broj nenul-elemenata na dijagonali jednak rang u matrice.

<sup>2</sup>Elementarne transformacije ne mijenjaju linearnu (ne)zavisnost redaka odnosno stupaca u matrici.

**Primjer 274.** Rang matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 6 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  je 2 (provjerite!) odnosno svaka dva njena retka i svaka dva njena stupca su linearno nezavisna.

Ako je matrica tipa  $m \times n$  njen rang ne može biti veći od manjeg od brojeva  $m$  i  $n$ . Primjerice, matrica iz  $M_{2,3}$  ne može imati rang veći od 2.

Želimo li za neke vektore utvrditi jesu li linearno zavisni ili ne, ukoliko su dani u koordinatnom obliku (s obzirom na neku bazu), dovoljno je zapisati ih kao stupce matrice i odrediti joj rang.

**Primjer 275.** Recimo da nas zanima jesu li vektori  $(1, -1, 0, 1)$ ,  $(2, 1, 1, 1)$  i  $(0, 1, 0, 1)$  linearno nezavisni vektori iz  $\mathbb{R}^4$ . Tada treba odrediti rang matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elementarnim transformacijama dobivamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

te je rang matrice 3 (tj. onoliko koliko smo imali vektora) te su zadani vektori linearno nezavisni.

Dva vektorska prostora su **izomorfna** ako do na smisao/vrstu vektora i operacija s njima nema razlika među njima. Smisao je sličan kemijskom: Izomorfnost znači jednakost struktura, ali dopušta različitost sadržaja.

**Primjer 276.** Vektorski prostori  $\mathbb{R}^3$ ,  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ ,  $V^3$  i  $V^3(0)$  su izomorfni. Prva dva su izomorfni jer iako su elementi prvog oblika  $(x, y, z)$ , a elementi drugog oblika  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , operacije se izvode po istim pravilima i s ekvivalentnim svojstvima, razlika je samo u stilu zapisa. Putem koordinatizacije  $V^3$  odnosno  $V^3(0)$  može se provjeriti da su i oni izomorfni s  $\mathbb{R}^3$ .

Općenito vrijedi: Vektorski prostori  $\mathbb{R}^n$  i  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  odnosno  $\mathbb{C}^n$  i  $M_{n,1}(\mathbb{C})$  su izomorfni.

**Primjer 277.** Svaki  $M_{m,n}$  je izomorfan s  $\mathbb{R}^{mn}$ . To se vidi tako da matricu shvatimo kao  $mn$ -torku jednostavnim nabiranjem njenih elemenata po retcima. Recimo, matricu  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  možemo shvatiti i kao uređenu četvorku  $(a, b, c, d)$ , bez da ima bitnih promjena u zbrajanju i množenju skalarom (zbrot dviju matrica odgovara zbroj odgovarajućih četvorki, a produktu matrice skalarom odgovara produkt odgovarajuće četvorke s tim skalarom), pa su  $M_2$  i  $\mathbb{R}^4$  izomorfni.

Zapravo vrijedi i više: Svi konačnodimenzionalni realni vektorski prostori iste dimenzije su izomorfni pa stoga prostore  $\mathbb{R}^n$  ili  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  (ovisno o tom s kojim nam je trenutno jednostavnije raditi) možemo smatrati prototipovima realnih  $n$ -dimenzionalnih prostora.

**Primjer 278.** Recimo da nas zanima jesu li matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  i  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  linearno zavisne, kako je  $M_2$  izomorfan s  $\mathbb{R}^{2 \cdot 2} = \mathbb{R}^4$ , treba ispitati linearnu nezavisnost vektora  $(0, 1, -1, 2)$ ,  $(5, 11, 0, 0)$  i  $(1, 0, 0, 0)$ .

### 8.2.3 Unitarni prostori

Nerijetko uz osnovne dvije operacije (zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom) vektorski prostor možemo na smislen način opskrbiti i operacijom koja ima ista svojstva kao skalarni produkt geometrijskih vektora (odjeljak 6.1.3). U tom slučaju govorim o unitarnim prostorima.

**Definicija 61 (Unitarni prostori).** Vektorski prostor  $V$  je unitaran ako je na njemu definirana dodatna računska operacija  $\langle v, w \rangle$  koja svakom paru vektora pridružuje po jedan skalar koja ima svojstva

$$\langle v, v \rangle \geq 0; \quad \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0},$$

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle},$$

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle,$$

$$\langle v, \alpha \cdot w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle.$$

<sup>3</sup> Pritom naravno ta svojstva moraju vrijediti za sve vektore  $v, w, u \in V$  i skalare  $\alpha$ . U tom slučaju operaciju  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nazivamo skalarnim produktom vektora.

---

<sup>3</sup>U standardnoj matematičkoj literaturi uzima se  $\langle \alpha \cdot v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$ , no ovdje smo odabrali konvenciju koja se koristi u kvantnoj teoriji.

Za realne unitarne prostore drugo definicijsko svojstvo svodi se na komutativnost skalarnog produkta (budući da je kompleksno konjugiran realan broj jednak sam sebi):

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle.$$

Uočite također da kombinacija drugog i četvrtog svojstva znači da vrijedi

$$\langle \alpha \cdot v, w \rangle = \overline{\alpha} \langle v, w \rangle.$$

Ako je unitarni prostor realan vidimo da se skalar može izlučiti iz bilo kojeg od faktora skalarnog produkta.

**Primjer 279.** Sa  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \varphi$  realni vektorski prostori  $V^2$ ,  $V^2(O)$ ,  $V^3$ ,  $V^3(O)$  postali su unitarni.

**Primjer 280.** Pogledajmo  $\mathbb{C}$  kao realan vektorski prostor. Ako definiramo

$$\langle x + i y, x' + i y' \rangle = x x' + y y'$$

može se provjeriti da smo tako dobili skalarni produkt. Primjerice,  $\langle 1 + i, 2 - i \rangle = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 1$ . S druge strane, ako  $\mathbb{C}$  gledamo kao kompleksan vektorski prostor mogli bismo skalarni produkt definirati i ovako:

$$\langle w, z \rangle = \overline{w} z.$$

U tom slučaju bilo bi  $\langle 1 + i, 2 - i \rangle = (1 - i) \cdot (2 - i) = 1 - 3i$ . Zašto ova druga definicija nije prikladna ako  $\mathbb{C}$  gledamo kao realan vektorski prostor?

Na  $\mathbb{R}^n$  uobičajeno je skalarni produkt definirati s

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Analogno, na  $\mathbb{C}^n$  kao kompleksnom vektorskom prostoru uobičajeno je skalarni produkt definirati s

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \overline{x_1} y_1 + \dots + \overline{x_n} y_n.$$

Na vektorskom prostoru realnih funkcija jedne varijable koje su integrabilne na  $I$  (gdje interval  $I$  može biti i neograničen) uobičajeno je skalarni produkt definirati s

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) g(x) dx.$$

Ako pak promatramo funkcije kojima je kodomena  $\mathbb{C}$  (kompleksne funkcije), odgovarajući skalarni produkt se definira s

$$\langle f, g \rangle = \int_I f^*(x) g(x) dx,$$



gdje je s  $f^*$  označena funkcija koja je definirana s  $f^*(x) = \overline{f(x)}$ . Ovaj skalarni produkt je vrlo čest u kvantnoj fizici i kemiji.

Uz gornje skalarne produkte (za koje nećemo provjeravati da stvarno zadovoljavaju svojstva iz definicije) prostori  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$  i prostori realnih ili kompleksnih funkcija integrabilnih na intervalu  $I$  postaju unitarni prostori. Na tim prostorima je moguće uvesti i drugačije skalarne produkte, ali oni nisu relevantni za primjene. S druge strane, na vektorskim prostorima matrica te na vektorskim prostorima  $\mathbb{C}^n$  gledanim kao realnim prostorima nema smislenog standardnog produkta (osim onog kojeg bismo uveli preko izomorfizma s prikladnim  $\mathbb{R}^k$ ) te se oni ne uzimaju kao unitarni prostori, a tako ni prostori funkcija koje nisu integrabilne na svojoj domeni (intervalu  $I$ ).

**Primjer 281.** U poglavlju o algebri vektora vidjeli smo da u slučaju vektora koji su zadani koordinatama obziroma na ortonormiranu bazu njihov skalarni produkt računamo po pravilu  $[x, y, z] \cdot [x', y', z'] = x x' + y y' + z z'$ . Primjerice, skalarni produkt vektora  $2\vec{i} - 5\vec{k}$  s vektorom  $-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  je  $[2, 0, -5] \cdot [-1, 1, -1] = -2 + 0 + 5 = 3$ .

Koristeći izomorfnost prostora  $V^3(O)$  s ortonormiranom bazom  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  i  $M_{3,1}$ , vidimo da za vektore  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  i  $v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  njihov skalarni produkt možemo izračunati kao

$$\langle v, v' \rangle = v^t \cdot v'.$$

U unitarnom prostoru može se definirati **norma vektora**, koja je poopćenje pojma iznosa ili duljine geometrijskih vektora. Norma se definira preko jednakosti:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (8.1)$$

U unitarnim prostorima geometrijskih vektora norma vektora podudara se s njegovim iznosom.

**Primjer 282.** U  $\mathbb{R}^n$  norma vektora se računa formulom

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

**Zadatak 73.** Izračunajte normu funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

Dva vektora unitarnog prostora nazivaju se **ortogonalnim** ako im je skalarni produkt 0.

**Primjer 283.** Vektori  $(1, -1, 2, 0, 3)$  i  $(0, 2, 1, 4, 0)$  su ortogonalni u  $\mathbb{R}^5$  jer im je skalarni produkt  $1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 0$ .

**Primjer 284.** Sada, vjerujemo, poprima smisao zadatak iz primjera 191, u kojemu se provjeravala ortogonalnost valnih funkcija.

**Zadatak 74.** Nađite primjer dviju ortogonalnih realnih funkcija koje nisu nulfunkcije, a koje su integrabilne na segmentu  $[-1, 1]$ .

Može se dokazati da je svaki skup vektora unitarnog prostora u kojem su svaka dva vektora ortogonalna linearno nezavisan.

**Definicija 62 (Ortogonalne i ortonormirane baze).** Baza unitarnog prostora čija svaka dva vektora su ortogonalna naziva se ortogonalnom bazom. Ortogonalna baza u kojoj svi vektori imaju normu 1 naziva se ortonormiranom bazom.

**Primjer 285.** Kanonske baze za  $\mathbb{R}^n$  su ortonormirane.

**Definicija 63 (Ortogonalne i unitarne matrice).** Kvadratnu realnu matricu reda  $n$  zovemo ortogonalnom ako joj retci (alternativno: stupci), shvaćeni kao vektori u  $\mathbb{R}^n$ , čine ortonormiranu bazu za  $\mathbb{R}^n$ . Kompleksna kvadratna matrica se uz analogne uvjete naziva unitarnom.

**Primjer 286.** Matrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

je primjer unitarne matrice reda 2.

**Zadatak 75.** Nađite dva različita primjera ortogonalnih matrica u  $M_2$ .

**Teorem 27.** Rang ortogonalne (ili unitarne) matrice iz  $M_n$  iznosi  $n$ .

**Dokaz.** Ako je matrica iz  $M_n$ , ona ima  $n$  redaka koji čine (ortonormiranu) bazu za  $\mathbb{R}^n$ . Vektori baze uvijek su linearno nezavisni, dakle imamo  $n$  linearno nezavisnih redaka, odnosno rang ortogonalne matrice reda  $n$  iznosi  $n$ .  $\square$

Ako je  $(e_1, \dots, e_n)$  neka ortonormirana baza vektorskog prostora  $V$  i  $v \in V$  bilo koji vektor, onda znamo da  $v$  ima neke koordinate  $(x_1, \dots, x_n)$  u toj bazi, dakle je  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ . Pomnožimo taj izraz skalarno (slijeva) s nekim od baznih vektora  $e_i$ . Budući da je skalarni produkt distributivan s obzirom na zbrajanje i da je  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$  za  $i \neq j$  (vektori ortonormirane baze su međusobno ortogonalni), preostat će nam  $\langle e_i, v \rangle = \langle e_i, x_i e_i \rangle = x_i \langle e_i, e_i \rangle = x_i$ . Dakle, pokazali smo:

**Teorem 28.** Koordinate vektora  $v$  iz konačnodimenzionalnog unitarnog prostora s obzirom na bilo koju ortonormiranu bazu jednake su redom skalarnim produktima vektora te baze s  $v$ .

**Primjer 287.** Ako je  $\vec{v} \in V^2$  i u  $V^2$  odabrana ortonormirana baza  $(\vec{i}, \vec{j})$ , onda je

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{j})\vec{j}.$$

Primjerice, koordinate  $\vec{v} = [-2, 3]$  s obzirom na bazu  $\vec{i}, \vec{j}$  znače da je  $\vec{v} \cdot \vec{i} = -2$  i  $\vec{v} \cdot \vec{j} = 3$ .

**Napomena 25.** U unitarnim prostorima uvijek vrijedi i nejednakost<sup>4</sup>:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori  $v$  i  $w$  linearno zavisni.



**Ponovimo bitno...** Vektorski prostori su skupovi čije elemente znamo zbrajati (i pritom dobivamo element istog skupa) i množiti skalarima (i pritom dobivamo element istog skupa). Ovisno o tome uzmemo li kao skup skalara skup  $\mathbb{R}$  ili  $\mathbb{C}$  govorimo o realnom ili kompleksnom vektorskom prostoru. Elementi vektorskih prostora zovu se vektori. Podskup vektorskog prostora koji je i sam vektorski prostor naziva se potprostorom.

Linearna kombinacija zadanih vektora je vektor koji se dobije zbrajanjem tih vektora pomnoženih s nekim skalarima. Ako je jedina linearna kombinacija danih vektora koja je jednaka nulvektoru  $\mathbf{0}$  ona u kojoj su svi skalari nula, kažemo da su ti vektori linearno nezavisni. Najveći broj vektora koje u danom vektorskom prostoru može sadržavati linearno nezavisan skup zove se dimenzija vektorskog prostora. Prototip vektorskih prostora dimenzije  $n$  su u realnom slučaju  $\mathbb{R}^n$ , a u kompleksnom  $\mathbb{C}^n$ . Linearno nezavisan skup vektora kojih ima onoliko kolika je dimenzija prostora naziva se bazom. Ako smo odabrali bazu vektorskog prostora, svaki vektor se može zapisati kao linearna kombinacija vektora baze na jedinstven način, a skalari u tom zapisu nazivaju se koordinate vektora (u toj bazi). Rang matrice je broj njezinih linearno nezavisnih redaka (ili stupaca) ako ih gledamo kao vektore u odgovarajućem prostoru tipa  $\mathbb{R}^n$  odnosno  $\mathbb{C}^n$ .

Ako je na vektorskom prostoru dodatno definirana operacija skalarnog produkta, govorimo o unitarnom prostoru. U unitarnim prostorima se može definirati norma vektora (drugi korijen od vektora skalarno pomnoženog sa sobom) i ortogonalnost dvaju vektora (vektori su ortogonalni ako im je skalarni produkt 0). Baza u kojoj su svi vektori međusobno ortogonalni i norme 1 naziva se ortonormiranom. Kvadratne matrice reda  $n$  čiji retci (ili stupci) čine ortonormiranu bazu za  $\mathbb{R}^n$  odnosno  $\mathbb{C}^n$  zovu se ortogonalne odnosno unitarne.



<sup>4</sup>Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog.

## 8.3 Linearni operatori

### 8.3.1 Pojam linearnog operatora

U prvom dijelu (odjeljak 2.4.1) spominjali smo linearne funkcije jedne realne varijable: To su funkcije koje sve nezavisne varijable množe s istim realnim brojem, dakle funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s pravilom tipa  $f(x) = ax$ . Promijenimo li u toj definiciji domenu sa skupa  $\mathbb{R}$  u unitarni prostor  $\mathbb{R}^n$  i izmijenimo izraz „množe ... s istim realnim brojem” u „skalarno množe ... s istim vektorom”, dobivamo opću definiciju linearne funkcije: **Linearne funkcije s  $n$  varijabli** su funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  s pravilom tipa  $f(x) = \langle a, x \rangle$ .

**Primjer 288.** Neka je  $a = (1, 2, 3, 4)$ . Tim vektorom određena je linearna funkcija  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \langle a, x \rangle$ . Ako je  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ , imamo:

$$f(x) = \langle (1, 2, 3, 4), (x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4.$$

Primijetimo da sada, kao što su linearne jednažbe s jednom nepoznanicom jednažbe u kojima je linearna funkcija jedne varijable izjednačena sa zadanom vrijednošću (slobodnim članom), tako su linearne jednažbe s  $n$  nepoznanica jednažbe u kojima je linearna funkcija s  $n$  varijabli izjednačena sa zadanom vrijednošću (slobodnim članom), odnosno sve linearne jednažbe su zapravo jednažbe s jednom nepoznanicom (vektorom  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ) i mogu se zapisati u obliku

$$\langle a, x \rangle = b$$

za neki  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

**Primjer 289.** Linearna jednažba  $2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 6x_5 = 7$  u vektorskom obliku glasi  $\langle a, x \rangle = 7$ , gdje je  $a = (2, -3, 1, 1, -6)$  i  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ .

S druge strane, linearnu funkciju jedne varijable možemo i na drugačiji način poopćiti na funkciju kojoj je domena bilo koji vektorski (ne nužno unitara) prostor. Naime, ako gledamo množenje svih vektora danog vektorskog prostora  $V$  s istim skalarom  $\alpha$ , dobili smo funkciju  $f : V \rightarrow V$ ,  $f(v) = \alpha v$  koju nazivamo **skaliranje** (skalarom  $\alpha$ ).

**Primjer 290.** Funkcija koja matrici  $A \in M_3$  pridružuje matricu  $3A \in M_3$  je funkcija koju možemo zapisati kao  $f : M_3 \rightarrow M_3$ ,  $f(A) = 3A$ .

I ovo se poopćenje može nazivati linearnim. Na prvi pogled, razlog je samo u tome što smo generalizirali pridruživanje  $x \mapsto ax$  s  $a, x \in \mathbb{R}$  na pridruživanje  $v \mapsto \alpha v$  s  $v \in V$ , gdje  $V$  može biti bilo koji vektorski prostor (te je  $\alpha$  realan ili kompleksan broj ovisno o tom je li prostor realan ili kompleksan),

odnosno na pridruživanje  $v \mapsto \langle a, v \rangle$  s  $a, v \in \mathbb{R}^n$ . No, nije stvar samo u tome. Naime, oba tipa poopćenja imaju ista svojstva s obzirom na obje temeljne operacije u svakom vektorskom prostoru, tj. zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom. Za oba tipa poopćenja vrijedi:

1. Svejedno je zbrojimo li prvo nezavisne varijable u domeni, pa ih preslikamo, ili prvo preslikamo nezavisne varijable zasebno i onda pripadne zavisne varijable zbrojimo u kodomeni.
2. Svejedno je skaliramo li prvo nezavisnu varijablu u domeni, pa ju preslikamo, ili prvo preslikamo nezavisnu varijablu i onda dobivenu zavisnu varijablu skaliramo (s istim skalarom) u kodomeni.

Zapisano algebarski, za sve funkcije  $f$  navedene u prethodnom dijelu ovog odjeljka vrijedi  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  i  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$  za sve elemente  $x$  i  $y$  domene od  $f$  i sve skalare  $\alpha$ .

Primijetimo da smo susreli i druge primjere preslikavanja s tim svojstvima, primjerice deriviranje (kao preslikavanje koje derivabilnim funkcijama jedne varijable pridružuje integrabilne funkcije, tj. njihove derivacije:  $f \mapsto f'$ ) i integriranje (kao preslikavanje koje integrabilnim funkcijama jedne varijable pridružuje derivabilne funkcije, tj. njihove neodređene integrale:  $f \mapsto \int f(x)dx$ ) realnih funkcija jedne varijable. Također, osna simetrija u ravnini ima ista svojstva: Svejedno je zbrojimo li prvo dva geometrijska vektora iz  $V^2$  pa ih zrcalimo s obzirom na danu os simetrije, ili ih prvo zrcalimo pa zbrojimo njihove slike, a isto tako je svejedno skaliramo li vektor prije ili poslije zrcaljenja.

Iako su navedena preslikavanja po svojoj prirodi vrlo raznolika, sva one imaju ista svojstva vezana za temeljne operacije u vektorskim prostorima. Takve se funkcije nazivaju linearnim operatorima.

**Definicija 64 (Linearan operator).** *Linearan operator<sup>5</sup> je funkcija  $\hat{A} : V \rightarrow W$  ( $V$  i  $W$  su vektorski prostori) koja ima sljedeća dva svojstva:*

$$\hat{A}(v + w) = \hat{A}(v) + \hat{A}(w) \quad (\text{aditivnost}),$$

$$\hat{A}(\alpha v) = \alpha \hat{A}(v) \quad (\text{homogenost})$$

za sve  $v, w \in V$  i skalare  $\alpha$ . Ako je  $W = \mathbb{R}$  odnosno  $W = \mathbb{C}$ , linearan operator zovemo linearnim funkcionalom.

---

<sup>5</sup>Sâm izraz „operator” obično se koristi za bilo kakvu funkciju kojoj su domena i kodomena vektorski prostori.

Primijetimo da domena i kodomena linearnog operatora moraju imati isti skup skalara, jer za svojstvo homogenosti moramo moći množiti sa istim skalarom i u domeni i u kodomeni. Dakle, linearni operatori idu s realnih prostora u realne, alternativno s kompleksnih u kompleksne.

U smislu gornje definicije, linearne funkcije s  $n$  varijabli su primjeri linearnih funkcionala. Drugačiji primjer linearnog funkcionala je **trag**. Trag kvadratne matrice je zbroj njezinih dijagonalnih elemenata:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$$

za  $A \in M_n$ . Ako gledamo trag kao funkciju  $\text{tr} : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ , lako je provjeriti da je  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$  i  $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$ , dakle je trag linearan funkcional na vektorskom prostoru  $M_n$ . Isto vrijedi i za kompleksni slučaj.

**Primjer 291.** Funkcija sinus nije primjer linearnog operatora (funkcionala) s  $\mathbb{R}$  u  $\mathbb{R}$  jer niti je aditivna niti je homogena.

**Zadatak 76.** Je li kvadriranje, korjenovanje, uzimanje recipročne vrijednosti aditivno? Homogeno?

Neki posebno jednostavni tipovi linearnih operatora i funkcionala mogu se naći za bilo koji vektorski prostor  $V$  uzet kao domenu. **Jedinični operator** je funkcija identiteta na vektorskom prostoru, tj. to je funkcija  $\hat{I} : V \rightarrow V$ ,  $\hat{I}(v) = v$ . Poopćenje jediničnog operatora je **operator skaliranja**  $\hat{S}_\alpha$ , tj. skaliranje skalarom  $\alpha$ , koje je također definirano na svakom vektorskom prostoru  $V$  i domena mu je jednaka kodomeni. **Nuloperator** je funkcija koja svim vektorima danog vektorskog prostora pridružuje nulvektor tog istog ili nekog drugog prostora, tj. to je funkcija  $\hat{O} : V \rightarrow W$ ,  $\hat{O}(v) = \mathbf{0}_W$ . Ako je kodomena jednodimenzionalna, govorimo o nulfunkcionalu.

Nuloperator i jedinični operator očigledno nulvektoru domene pridružuju nulvektor kodomene. Derivacija nulfunkcije je nulfunkcija. Ako u linearnu funkciju s  $n$  varijabli uvrstimo  $x = (0, 0, \dots, 0)$ , dobit ćemo 0. Osnosimetrična slika nulvektora je nulvektor. Što primjećujemo? Svi linearni operatori nulvektor domene preslikavaju u nulvektor kodomene, tj. vrijedi:

**Teorem 29.** Ako je  $\hat{A} : V \rightarrow W$  linearan operator, onda je  $\hat{A}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ .

**Primjer 292.** Funkcija koja svim vektorima domene pribraja isti vektor  $a$  (**translacija**) nije linearan operator osim ako je  $a = \mathbf{0}$ . Naime, ako  $a \neq \mathbf{0}$  onda translacija preslikava nulvektor  $\mathbf{0}$  u  $\mathbf{0} + a = a \neq \mathbf{0}$ . Translacija za nulvektor je, očito, isto što i jedinični operator.

S druge strane, funkcija sinus preslikava 0 u 0, ali ipak nije linearna.

Iz gornjeg primjera vidimo: Gornje svojstvo je korisno ako neku funkciju želimo isključiti iz svijeta linearnih operatora (ako ne preslikava nulvektor u nulvektor, sigurno nije linearna), no ako operator preslikava nulvektor u nulvektor ona može i ne mora biti linearan.

Od posebnog interesa u kemiji (stereokemiji, kristalografiji) su linearni operatori koji preslikavaju geometrijske vektore u geometrijske vektore, tj. linearni operatori kojima je su domena i kodomena jednake i pritom su to jedan od prostora  $V^2(O)$  ili  $V^3(O)$ . Neka je  $\hat{A}$  jedan takav operator.

Ako je  $p$  neki pravac kroz  $O$ , smjera određenog vektorom  $\vec{s}$ , onda se taj pravac sastoji točno od svih vektora oblika  $t\vec{s}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Budući da je  $\hat{A}$  homogen, imamo  $\hat{A}(t\vec{s}) = t\hat{A}(\vec{s})$ , tj. svi vektori s pravca  $p$  se preslikavaju u vektore pravca određenog vektorom  $\hat{A}(\vec{s})$ . Naravno, i preslikavanjem dobiveni pravac mora prolaziti kroz  $O$  jer  $\hat{A}$  mora nulvektor preslikati u nulvektor. Specijalno, ako je  $\hat{A}(\vec{s}) = \vec{0}$ , onda je slika pravca  $p$  samo ishodište  $O$ . Dakle, dokazali smo: Linearni operatori  $\hat{A} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$  i linearni operatori  $\hat{A} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$  pravce kroz ishodište preslikavaju ili u pravce kroz ishodište ili u samo ishodište. Analogno se dokazuje: Linearni operatori  $\hat{A} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$  ravnine koje prolaze kroz ishodište mogu preslikati samo u ravnine kroz  $O$ , u pravce kroz  $O$  ili jednostavno samo u  $O$ .

Za primjene u kemiji posebno su važni linearni operatori simetrija, koji su podvrsta ortogonalnih operatora, tj. operatora koji čuvaju normu vektora.

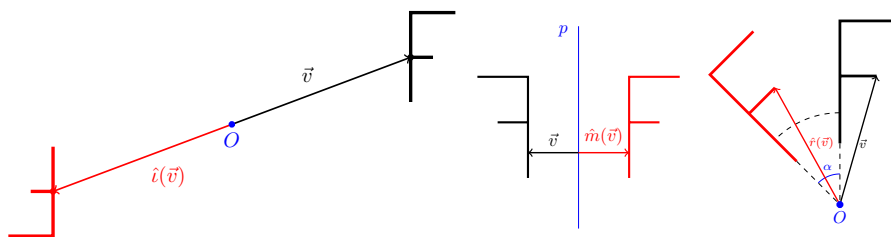
**Definicija 65 (Ortogonalni operator).** *Ako je  $V$  unitaran prostor, linearni operator  $\hat{A} : V \rightarrow V$  koji ima svojstvo  $\|\hat{A}(v)\| = \|v\|$  za sve  $v \in V$  naziva se ortogonalnim operatorom.*

Ako je  $V$  jedan od prostora  $V^2(O)$ ,  $V^3(O)$  ortogonalne operatore obično nazivamo **operatorima simetrije** (oni dakle čuvaju iznose geometrijskih vektora, jer je za geometrijske vektore norma isto što i iznos). Ako operator simetrije fiksira neki podskup prostora (preslikava taj podskup u samog sebe), govorimo o simetriji tog podskupa.

**Primjer 293.** *Ako je  $k$  kružnica oko  $O$  (u ravnini), onda je svaka rotacija oko  $O$  simetrija te kružnice.*

Osnovni tipovi operatora simetrije su sljedeći (usp. sliku 8.1).

- Najjednostavniji je **jedinični operator**  $\hat{I}$ , koji se kao operator simetrije obično označava s **1**. On je simetrija svakog podskupa ravnine odnosno prostora.
- **Centralna simetrija (inverzija)** s obzirom na centar (točku)  $O$  je definirana s  $\bar{1}(v) = -v$  (tj.  $\bar{1} = -1$ ).



Slika 8.1: Tri osnovna tipa operatora simetrije (centralna simetrija, zrcaljenje, rotacija)

- **Zrcaljenje (refleksija)** se različito definira u ravnini i u prostoru. Ako gledamo zrcaljenje ravnine, govorimo i o osnoj simetriji. To je linearni operator  $\hat{m} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$  za koji postoji pravac  $p$  (os simetrije) koji prolazi kroz  $O$  i koji ima svojstvo da za svaki  $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$  vrijedi da ako je  $\hat{m}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$ , onda je polovište dužine  $\overline{TT'}$  na pravcu  $p$  i pravac  $TT'$  je okomit na  $p$ . Zrcaljenje u prostoru je linearni operator  $\hat{m} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$  definiran analogno, samo umjesto osi simetrije za njega postoji ravnina simetrije  $\Pi$  sa istim svojstvom kao što je u dvodimenzionalnom slučaju navedeno za os simetrije.
- Kao i zrcaljenje, i **rotacija** se se različito definira u ravnini i u prostoru. Rotacija ravnine oko  $O$  je linearni operator  $\hat{r} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$  koji ima svojstvo da za svaki  $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$  vrijedi da ako je  $\hat{r}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$ , onda je (orijentirani) kut  $\alpha = \angle TOT'$  uvijek isti (nazivamo ga kutom rotacije). Rotacija prostora je linearni operator  $\hat{r} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$  za koji postoji pravac  $o$  kroz  $O$  (os rotacije) sa svojstvom da za svaki  $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$  vrijedi da ako je  $\hat{r}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$ , onda je (orijentirani) kut  $\angle TOT'$  uvijek isti, gdje je  $\overline{O}$  probodište osi  $o$  s ravninom okomitom na  $O$  koja sadrži  $T$ . Ako je kut rotacije  $360^\circ/n$  gdje je  $n$  prirodan broj, govorimo o rotaciji reda  $n$ . Rotacije reda  $n$  označavamo s  $\mathbf{n}$ .

**Primjer 294.** Rotacija reda 4 oko središta je jedna od simetrija kvadrata.

U dvodimenzionalnom slučaju nije potrebno razmatrati centralnu simetriju jer je ona isto što i rotacija drugog reda oko centra simetrije. S druge strane, u trodimenzionalnom slučaju se često razmatraju i rotoinverzije i rotorefleksije. Rotoinverzija je kompozicija rotacije i centralne simetrije, uz uvjet da je centar simetrije na osi rotacije. Rotorefleksija je kompozicija rotacije i zrcaljenja, uz uvjet da je ravnina simetrije okomita na os rotacije. Nije teško dokazati



**Teorem 30.** *Ako je kompozicija  $\hat{A} \circ \hat{B}$  linearnih operatora  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$  definirana, ona je također linearan operator. Ako su  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$  oba ortogonalni ili oba unitarna, takva je i njihova kompozicija.*

Budući da je kompozicija ortogonalnih linearnih operatora ortogonalan linearan operator, rotorefleksije i rotoinverzije prostora  $V^3(O)$  su također primjeri linearnih operatora simetrije.

### 8.3.2 Matrica linearnog operatora

U ovom odjeljku pretpostavljamo da su i domena i kodomena linearnog operatora vektorski prostori konačne dimenzije. Neka je  $\hat{A} : V \rightarrow W$  linearan operator i  $B_V = (e_1, \dots, e_n)$  neka baza njegove domene (dakle,  $V$  je dimenzije  $n$ ). Znamo da tada svaki vektor  $v \in V$  jednoznačno možemo zapisati u obliku

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

s nekim skalarima  $x_1, \dots, x_n$  (koordinatama vektora  $v$ ). Zbog linearnosti od  $\hat{A}$  vrijedi:

$$\hat{A}(v) = \hat{A}(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \hat{A}(e_1) + \dots + x_n \hat{A}(e_n).$$

Dakle, ako znamo kamo  $\hat{A}$  preslika vektore baze (ako znamo vektore  $\hat{A}(e_i)$  za  $i = 1, \dots, n$ ) znamo kamo preslika sve vektore:

**Teorem 31.** *Linearni operator je potpuno zadan svojim djelovanjem na jednoj bazi domene.*

**Primjer 295.** *Neka je  $(\vec{a}, \vec{b})$  neka baza za  $V^2(O)$  te neka je za linearan operator  $\hat{A} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$  poznato da prvi vektor baze preslikava u drugi ( $\hat{A}(\vec{a}) = \vec{b}$ ), a drugi u zbroj prvog i drugog ( $\hat{A}(\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$ ). To je dovoljno da bismo znali kako preslikava sve vektore ravnine: Ako je  $\vec{v} = [x, y] = x\vec{a} + y\vec{b}$ , onda je*

$$\begin{aligned} \hat{A}(\vec{v}) &= \hat{A}(x\vec{a} + y\vec{b}) = (\text{aditivnost}) = \hat{A}(x\vec{a}) + \hat{A}(y\vec{b}) = \\ &= (\text{homogenost}) = x\hat{A}(\vec{a}) + y\hat{A}(\vec{b}) = \vec{b} + y(\vec{a} + \vec{b}) = y\vec{a} + (x+y)\vec{b}. \end{aligned}$$

Vidimo da to možemo kraće zapisati kao  $\hat{A}([x, y]) = [y, x+y]$ . Uočimo da smo ovdje, budući da je domena jednaka kodomeni, za kodomenu pretpostavili istu bazu kao u domeni.

Dakle, da bismo potpuno znali kako  $\hat{A}$  djeluje trebamo odabrati jednu bazu  $B_V = (e_1, \dots, e_n)$  u domeni te zadati vektore  $v_1 = \hat{A}(e_1), \dots, v_n = \hat{A}(e_n)$  u kodomeni od  $\hat{A}$ . Budući da smo ovdje vektore domene zapisivali preko koordinata s obzirom na odabranu bazu  $B_V$  domene, prirodno je i vektore  $v_1, \dots, v_n$  zapisati koordinatno s obzirom na neku bazu kodomene. Budući da općenito domena i kodomena linearnog operatora ne moraju biti jedan te isti vektorski prostor, općenito ni baza kodomene neće biti  $B_V$ , nego neka druga baza  $B_W = (f_1, \dots, f_m)$ , gdje je  $m$  dimenzija kodomene. Ako je kodomena jednaka domeni ( $V = W$ ) uvest ćemo dogovor  $B_V = B_W$  te ćemo tu zajedničku bazu domene i kodomene dalje označavati jednostavno s  $B$  (iako ni u ovom slučaju nije nužno uzeti istu bazu u domeni i kodomeni, ali se to u svim primijenjenim situacijama poput one iz gornjeg primjera podrazumijeva). Ako smo dakle odabrali po jednu bazu  $B_V$  i  $B_W$  za domenu i kodomenu, možemo definirati:

**Definicija 66 (Matrica linearnog operatora).** *Matrica linearnog operatora  $\hat{A} : V \rightarrow W$  s obzirom na odabrane baze  $B_V$  i  $B_W$  domene i kodomene je matrica  $A$  u kojoj se redom u stupcima nalaze koordinate slika vektora baze  $B_V$  (dakle, od vektora  $\hat{A}(e_1), \hat{A}(e_2), \dots, \hat{A}(e_n)$ ) u bazi  $B_W$ .*

**Primjer 296.** *Pogledajmo operator iz primjera 295. Imamo  $B = (\vec{a}, \vec{b})$ , pa je  $\hat{A}(\vec{a}) = \vec{b} = [0, 1]$  (prvi stupac matrice operatora) i  $\hat{A}(\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b} = [1, 1]$  (drugi stupac matrice operatora). Dakle je matrica ovog operatora s obzirom na bazu  $B$  matrica*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Primjer 297.** *Neka je  $\hat{m}$  zrcaljenje prostora  $V^3(O)$  s obzirom na neku ravninu koja prolazi kroz  $O$ . Odaberimo bazu  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  prostora  $V^3(O)$  tako da je ta baza ortogonalna i da se ravnina simetrija podudara s  $(x, y)$ -ravninom. Tada je  $\hat{m}(\vec{a}) = \vec{a}$ ,  $\hat{m}(\vec{b}) = \vec{b}$  i  $\hat{m}(\vec{c}) = -\vec{c}$ . Stoga je operatora  $\hat{m}$  s obzirom na bazu  $B$  kao baz domene i kodomene*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ako je  $\hat{A}$  linearni operator s  $n$ -dimenzionalnog u  $m$ -dimenzionalni prostor, tada imamo  $n$  vektora u svakoj bazi domene, dakle svaka matrica tog operatora ima  $n$  stupaca. S druge strane,  $\hat{A}$  preslika svaki vektor te baze u kodomenu, u kojoj vektori imaju po  $m$  koordinata, dakle svaka matrica tog operatora ima  $m$  redaka. Dokazali smo:

**Teorem 32.** *Ako je  $\hat{A} : V \rightarrow W$  linearan operator, onda s obzirom na bilo koje baze domene i kodomene matrica od  $\hat{A}$  ima redaka kolika je dimenzija kodomene, a stupaca kolika je dimenzija domene.*

Posebno, ako su domena i kodomena iste dimenzije (kao što je recimo slučaj kod operatora simetrije), matrica linearnog operatora je kvadratna. Ako je  $\hat{A}$  linearni funkcional, matrica mu je matrica-redak. Iz gornjeg je također vidljivo zašto ne možemo definirati matricu linearnog operatora ako domena ili kodomena ima beskonačnu dimenziju.

Budući da nulvektor u svakoj bazi ima iste koordinate (sve su 0), vidimo da nuloperator  $\hat{0} : V \rightarrow W$  s obzirom na svaku bazu ima istu matricu, i to nulmatricu odgovarajućeg tipa. Jedinični operator  $\hat{I} : V \rightarrow V$  sve vektore preslikava u same sebe, dakle posebno je  $\hat{I}(e_i) = e_i$  za sve vektore baze  $B = (e_1, \dots, e_n)$  od  $V$ . Budući  $i$ -ti vektor bilo koje baze s obzirom na tu bazu ima koordinate  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , gdje je 1 na poziciji  $i$ , slijedi da je s obzirom na svaku bazu matrica jediničnog operatora oblika

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n.$$

Takve matrice zovemo **jedinične matrice**. Općenitije, na isti način se vidi da **operatori skaliranja**  $\hat{S}_\alpha : V \rightarrow V$  s obzirom na svaku odabranu bazu imaju istu matricu, matricu  $\alpha I_n$ . Takve matrice zovu se **skalarne matrice**.

**Primjer 298.** *Budući da je centralna simetrija definirana kao suprotni jedinični operator na  $V^3(O)$ , ona je zapravo operator skaliranja:  $\bar{\mathbf{I}} = \hat{S}_{-1}$ . Stoga je s obzirom na bilo koju bazu od  $V^3(O)$  matrica centralne simetrije suprotna jedinična matrica*

$$-I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3.$$

No, općenito matrica linearnog operatora, iz istog razloga kao koordinate pojedinog vektora, ne ovisi samo o operatoru, nego i odabranim bazama domene i kodomene.

**Primjer 299.** *Linearan operator  $\hat{A} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  zadan je kao tzv. pomak ulijevo:  $\hat{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, 0)$ . Odredimo njegove matrice obzirom na kanonsku bazu i obzirom na bazu  $B = (a, b, c, d)$  gdje su  $a = (4, 0, 3, 0)$ ,  $b = (-2, 1, 0, 0)$ ,  $c = (0, 0, -1, 1)$  i  $d = (0, 1, 0, 2)$ .*

Ako uzmemo kanonsku bazu, imamo redom  $\hat{A}(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$ ,  $\hat{A}(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\hat{A}(0, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, 0)$ ,  $\hat{A}(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0)$ , pa je s obzirom na kanonsku bazu matrica našeg operatora

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Za navedenu bazu  $B$  imamo redom  $\hat{A}(4, 0, 3, 0) = (0, 3, 0, 0) = v_1$ ,  $\hat{A}(-2, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) = v_2$ ,  $\hat{A}(0, 0, -1, 1) = (0, -1, 1, 0) = v_3$ ,  $\hat{A}(0, 1, 0, 2) = (1, 0, 2, 0) = v_4$ , no to matrica

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nije tražena matrica. Naime, kad smo ispisali  $A'$ , koordinate vektora  $v_1, v_2, v_3$  i  $v_4$  uzeli smo kao koordinate s obzirom na kanonsku bazu. Dakle,  $A'$  je matrica operatora  $\hat{A}$  ako u domeni uzmemo bazu  $B$ , a u kodomeni kanonsku bazu.

No, dogovorili smo se da se kod operatora kojima se domena i kodomena podudaraju u kodomeni bira ista baza kao u domeni. Stoga nam trebaju koordinate vektora  $v_1, v_2, v_3, v_4$  odrediti koordinate u bazi  $B$ . Kao što znamo, njih dobijemo rješavanjem sustava linearnih jednadžbi čiji koeficijenti uz nepoznanice, po stupcima, sadrže koordinate baze  $(a, b, c, d)$  u kanonskoj bazi, a u stupcu slobodnih članova koordinate vektora  $v_i$  u kanonskoj bazi. Budući da pri rješavanju sustava Gaußovom metodom eliminacija odluka o elementarnim transformacijama ovisi samo o „lijevom” dijelu, a ne o stupcu slobodnih članova i budući da u toj metodi ne dolazi do miješanja stupaca, možemo paralelno riješiti sva četiri sustava za dobivanje traženih koordinata:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & \frac{3}{2} & -6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 18 & 3 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -\frac{3}{2} & 5 & \frac{5}{2} \end{array} \right).$$

Dakle, matrica  $\hat{A}$  s obzirom na bazu  $B$  je

$$A'' = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & -1 \\ 12 & \frac{3}{2} & -6 & -\frac{5}{2} \\ 18 & 3 & -10 & -5 \\ -9 & -\frac{3}{2} & 5 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Iako su situacije kao u prethodnom primjeru moguće, u pravilu se za linearni operator uzima baza u kojoj on ima posebno zgodnu matricu. Pogledajmo koje su to „najzgodnije” baze i odgovarajuće matrice za operatore zrcaljenja i rotacije ravnine i prostora.

Ako gledamo zrcaljenje ravnine (osnu simetriju)  $\hat{m} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ , ako je moguće biramo *ortogonalnu* bazu  $B = (\vec{a}, \vec{b})$  tako jedan od vektora baze leži na osi simetrije, tj. da os simetrije bude jedna od koordinatnih osi. Analogno kao u primjeru 297 dobivamo da ako smo os simetrije uzeli kao  $x$ -os odnosno  $y$ -os, matrica operatora zrcaljenja je, ukoliko je koordinatni sustav zadan parametrima  $a, b, \alpha = \beta 90^\circ$ , dana s

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{odnosno} \quad M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ako gledamo zrcaljenje  $\hat{m} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ , po mogućnosti biramo bazu tako da ravnina simetrije bude jedna od koordinatnih ravnina, a treća os okomita na nju, tj. bazu takvu da je jedan vektor baze okomit na druga dva, koji pak leže u ravnini simetrije. Ovisno o tome jesmo li ravninu simetrije odabrali kao  $(x, y)$ -ravninu (i pritom je  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ), kao  $(y, z)$ -ravninu (i pritom je  $\beta = \gamma = 90^\circ$ ) ili pak kao  $(x, z)$ -ravninu (i pritom je  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ ), analogno kao u primjeru 297 dobit ćemo da zrcaljenje ima matricu

$$M_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{odnosno} \quad M_{yz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{odnosno} \quad M_{xz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ako pak promatramo rotacije, „lijepe“ matrice dobivamo samo uz odabir ortonormiranih baza. Za rotaciju ravnine  $\hat{r} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$  za kut  $\alpha$  oko  $O$  uz ortonormiranu bazu  $(\vec{i}, \vec{j})$  vidimo da se  $\vec{i}$  zarotira u  $\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$ , a  $\vec{j}$  se zarotira u  $-\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}$ . Stoga je dakle u ortonormiranoj bazi ravnine matrica rotacije za kut  $\alpha$  matrica

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Ako promatramo rotaciju  $\hat{r} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$  za kut  $\alpha$  oko neke osi  $o$  koja prolazi kroz  $O$ , po mogućnosti biramo ortonormiranu bazu  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  takoc da os rotacije bude jedna od koordinatnih osi.<sup>6</sup> Ako smo primjerice os rotacije postavili kao  $z$ -os, onda se vektorima  $z$ -koordinata rotacijom oko  $z$ -osi ne mijenja, a pogled duž  $z$ -osi za prve dvije koordinate situaciju svodi na prethodni

<sup>6</sup>Zapravo je dovoljno da je baza ortogonalna i da su samo oni vektori koji su okomiti na os rotacije iznosa 1, ali nećemo dalje razmatrati to poopćenje.

dvodimenzionalni slučaj. Stoga je matrica rotacije za kut  $\alpha$  oko  $z$ -osi, ukoliko je koordinatni sustav zadan parametrizacijom  $a = b = c = 1$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ , dana s

$$R_{z,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

**Zadatak 77.** Zaključite kako izgledaju matrice  $R_{x,\alpha}$  i  $R_{y,\alpha}$  rotacije za kut  $\alpha$  oko  $x$ - odnosno  $y$ -osi ako je koordinatni sustav Kartezijev!

Iako su kako vidimo matrice operatora simetrije vrlo raznolike, uvijek vrijedi:

**Teorem 33.** Za svaki operator simetrije na  $V^2(O)$  ili  $V^3(O)$  je svaka njegova matrica (s obzirom na bilo koju ortonormiranu bazu) ortogonalna matrica.

**Primjer 300.** Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ne može biti matrica operatora simetrije s obzirom na neku ortonormiranu bazu jer nije ortogonalna (norma prvog retka je  $\sqrt{2}$ , norma drugog je 1, a skalarni produkt im je 2).



**Ponovimo bitno...** Linearni operatori su funkcije kojima su domena i kodomena vektorski prostori i koje su aditivne i homogene, tj. poštuju dvije osnovne operacije svakog vektorskog prostora. Svaki linearni operator preslikava nulvektor domene u nulvektor kodomene. Ukoliko je kodomena linearnog operatora jednodimenzionalna, govorimo o linearnom funkcionalu.

Ako se pak domena i kodomena linearnog operatora podudaraju ( $\hat{A} : V \rightarrow V$ ) te ako je ta (ko)domena  $V$  unitaran prostor i  $\hat{A}$  čuva normu svakog vektora, govorimo o ortogonalnom ili u kompleksnom slučaju o unitarnom operatoru. Ako je  $V$  jedan od prostora geometrijski vektora, ortogonalni operator se naziva operatorom simetrije.

Ako su domena i kodomena linearnog operatora konačne dimenzije, linearni operator je potpuno zadan svojim djelovanjem na jednoj bazi domene. Ukoliko ispišemo koordinate slika vektora baze domene (s obzirom na odabranu bazu kodomene), dobivamo matricu linearnog operatora (broj redaka jednak je dimenziji kodomene, a broj stupaca dimenziji domene). Ona općenito ovisi i o odabranim bazama u domeni i kodomeni, a ne samo o linearnom operatoru.



## 8.4 Množenje matrica

Iako smo sad utvrdili *što* je to matrica linearnog operatora, iz prethodnog nije očito da od nje imamo ikakve koristi. No, algebarska operacija množenja matrica osmišljena je tako da množeći matricu linearnog operatora s matricom koja predstavlja vektor domene lako izračunamo kamo operator preslika taj vektor, a množeći matrice dvaju linearnih operatora dobivamo matricu koja odgovara njihovoj kompoziciji (za koju smo već rekli da je također linearni operator).

**Primjer 301.** *Recimo da nas zanima na koju poziciju se zarotira neka točka prostora  $T$  (neki radij-vektor  $\vec{r} = \overrightarrow{OT}$ ), ako se radi o rotaciji  $\mathbf{8}$  prostora  $V^3(O)$ . Odaberimo ortonormiranu bazu  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tj. Kartezijev koordinatni sustav, tako da os rotacije bude  $z$ -os. Tada je matrica našeg linearnog operatora matrica iz formule 8.2 uz  $\alpha = 45^\circ$ ,*

$$R_{z,45^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Svaki vektor  $\vec{r}$  ima neke koordinate  $[x, y, z]$  obzirom na bazu  $B$ . Rotacija je linearan operator pa znamo da je  $\mathbf{8}(\vec{r}) = x\mathbf{8}(\vec{i}) + y\mathbf{8}(\vec{j}) + z\mathbf{8}(\vec{k})$ . Stupci matrice operatora sadrže koordinate slika vektora baze, pa zaključujemo da je*

$$\mathbf{8}[x, y, z] = x[\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2] + y[0, 1, 0] + z[-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2] = [(x-z)\sqrt{2}/2, y, (x+z)\sqrt{2}/2].$$

*Ako bolje pogledamo prethodnu jednakost, vidimo da je prva koordinata od  $\mathbf{8}(\vec{r})$  jednaka skalarnom produktu prvog retka matrice  $R_{z,45^\circ}$  s  $(x, y, z)$ , druga koordinata od  $\mathbf{8}(\vec{r})$  jr skalarni produkt drugog retka matrice  $R_{z,45^\circ}$  s  $(x, y, z)$ , a treća koordinata od  $\mathbf{8}(\vec{r})$  jr skalarni produkt trećeg retka matrice  $R_{z,45^\circ}$  i  $(x, y, z)$  (sva tri skalarn produkta su u  $\mathbb{R}^3$ ).*

*To kraće zapisujemo ovako:*

$$R_{z,45^\circ} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-z)\sqrt{2}/2 \\ y \\ (x+z)\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Kao u prethodnom primjeru, pokazuje se da uvijek vrijedi: Ako je za linearni operator  $\hat{A} : V \rightarrow W$  poznata njegova matrica  $A$  s obzirom na odabrane baze  $B_V$  i  $B_W$  domene i kodomene te ako je vektor  $v \in V$  zadan koordinatama  $(x_1, \dots, x_n)$  s obzirom na bazu  $B_V$ , koordinate od  $\hat{A}(v)$  u bazi  $B_W$  su redom skalarni produkti redaka matrice  $A$  s  $(x_1, \dots, x_n)$ , gledani kao standardni skalarni produkti u  $\mathbb{R}^n$  (čak i ako se radi o kompleksnim prostorima).

Kažemo da smo matricu  $A$  pomnožili s matricom-stupcem koordinata od  $v$  i dobili matricu-stupac koja predstavlja sliku vektora  $v$  s obzirom na linearni operator  $\hat{A}$ . Uočimo da smo tako definirali množenje matrice  $A \in M_{m,n}$  (matrice linearnog operatora s  $n$ -dimenzionalnog u  $m$ -dimenzionalni prostor) s matricom  $X \in M_{n,1}$  (koordinatnom matricom vektora  $v$  domene s obzirom na baz  $B_V$ ) i rezultat je matrica-stupac u  $M_{m,1}$  (koordinatna matrica vektora  $\hat{A}(v)$  kodomene s obzirom na bazu  $B_W$ ):

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

pri čemu je

$$y_i = \langle (a_{i1}, \dots, a_{in}), (x_1, \dots, x_n) \rangle$$

(„ $i$ -ti redak od  $A$  skalarno pomnožen s  $v$ ”) za  $i = 1, \dots, m$ . Zbog tog što se (u konačnodimenzionalnom slučaju) djelovanje linearnog operatora svodi na množenje matrica, uobičajeno je pisati  $\hat{A}v$  umjesto  $\hat{A}(v)$  kad god je  $\hat{A}$  linearan operator, te ćemo stoga u nastavku tako i činiti.

**Napomena 26.** *Skalarni produkt u  $\mathbb{R}^n$  možemo shvatiti kao množenje matrica: Ako  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  poistovjetimo s odgovarajućim matricama-stupcima  $x, y \in M_{n,1}$ , onda je*

$$\langle x, y \rangle = x^t y.$$

**Primjer 302.** *Koje su, u ortonormiranoj bazi  $(\vec{i}, \vec{j})$ , koordinate vektora  $2\vec{i} - 5\vec{j} \in V^2(O)$  ako se on zarotira za  $60^\circ$  oko ishodišta? Matrica te rotacije je*

$$R_{60^\circ} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

pa je

$$R \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle (1/2, -\sqrt{3}/2), (2, -5) \rangle \\ \langle (\sqrt{3}/2, 1/2), (2, -5) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \end{bmatrix},$$

dakle se  $2\vec{i} - 5\vec{j}$  zarotira u vektor  $\left(1 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) \vec{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right) \vec{j}$ .

Linearni funkcional vektore preslikava u skalare, a i po prethodnom, vidimo da je rezultat množenja matrice-retka s matricom-stupcem skalar, preciznije:  $1 \times 1$ -matrica. Pritom, to množenje ima smisla samo ako su broj redaka matrice-stupca i matrice  $A$  jednaki (dimenzija domene).



**Zadatak 78.** Ima li smisla množiti matricu-stupac s matricom-stupcem?

Zbog svojstava skalarnog produkta lako se vidi da je množenje  $A \cdot X$  (za  $A \in M_{m,n}$  i  $X \in M_{n,1}$ ) distributivno ( $A \cdot (X_1 + X_2) = A \cdot X_1 + A \cdot X_2$ ) i kvaziasocijativno ( $A \cdot (\alpha X) = \alpha A \cdot X$ ). Stoga, slično kao što je svakim realnim brojem zadana linearna funkcija jedne varijable, svaka matrica predstavlja neki linearni operator. Preciznije, ako je  $A \in M_{m,n}$  proizvoljna matrica, s  $\hat{A}(X) = A \cdot X$  je zadan linearan operator  $\hat{A} : M_{n,1} \rightarrow M_{m,1}$  kojemu je  $A$  matrica s obzirom na kanonske baze domene i kodomene.

**Primjer 303.** Neka je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Budući da je  $A \in M_2 = M_{2,2}$ , odgovarajući linearan operator sigurno ide s 2-dimenzionalnog u 2-dimenzionalni vektorski prostor. Prototip (do na izomorfizam) realnog dvodimenzionalnog prostora je  $M_{2,1}$ . Definiramo li  $\hat{A} : M_{2,1} \rightarrow M_{2,1}$  s

$$\hat{A} \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y - x \end{bmatrix},$$

dobili smo linearan operator čija je matrica (s obzirom na kanonsku bazu) upravo  $A$ .

**Zadatak 79.** Kvadrat ima vrhove u točkama koje u Kartezijevom koordinatnom sustavu imaju koordinate  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,1)$ . Za danu  $M \in M_2$  neka je  $\hat{M}$  odgovarajući linearni operator, interpretiran (preko izomorfizma kojim  $[x y]^t \in M_{2,1}$  poistovjećujemo s  $x\vec{i} + y\vec{j}$ ) kao operator na  $V^2(O)$ . U kakve četverokute  $\hat{M}$  može preslikati zadani kvadrat? U kakve ne? Ako je neki drugi kvadrat određen vrhovima  $(4,4)$ ,  $(6,2)$ ,  $(8,4)$ ,  $(6,6)$ , uz koje uvjete na  $M$  će se oba kvadrata preslikati u isti tip četverokuta?

**Zadatak 80.** Tzv. opće pozicije u prostornoj grupi  $Pbcn$  su točke  $T + (0,0,0)$ ,  $T + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $T + (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $T + (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ ,  $T + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $T + (\frac{1}{2}, 0, 0)$ ,  $T + (0, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $T + (0, 0, \frac{1}{2})$ , uz  $T = (m, n, p) \in \mathbb{Z}^3$ . Pritom je kristalografska baza  $B$  ortogonalna, ali nije ortonormirana, preciznije, parametri baze su  $a \neq b \neq c \neq a$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ . Zapišite jednu ne-jediničnu matricu koja (obzirom na bazu  $B$ ) predstavlja operator simetrije za ovu kristalnu rešetku, tj. takav da se opće pozicije preslikavaju u opće pozicije.

Kao što je množenje matrice  $A \in M_{m,n}$  s matricom  $X \in M_{n,1}$  definirano tako da odgovara djelovanju linearnog operatora na vektor, tako se i općenito

množenje matrica definira tako da odgovara kompoziciji linearnih operatora. Konkretno, recimo da imamo linearne operatore  $\hat{A} : V \rightarrow W$  i  $\hat{B} : U \rightarrow V$ , kompozicija  $\hat{A} \circ \hat{B}$  ima smisla i linearni operator je s prostora  $U$  u prostor  $W$ . Ako je dimenzija od  $V$  jednaka  $n$ , a dimenzija od  $W$  jednaka  $m$  (dakle, sve matrice  $A$  od  $\hat{A}$  su tipa  $m \times n$ ), dobili smo prvi uvjet za množenje matrica  $A \cdot B$ : Budući je  $V$  ujedno kodomena od  $\hat{B}$ , matrica  $B$  mora imati redaka koliko  $A$  ima stupaca (njih  $n$ ). Matrice  $A$  i  $B$  kod kojih je broj stupaca prve jednak broju stupaca druge zovu se **ulančane matrice** i samo one se mogu množiti. Nadalje, kompozicija  $\hat{A} \circ \hat{B}$  ima domen  $U$ , a kodomen  $W$ , dakle matrica  $A \cdot B$  od  $\hat{A} \circ \hat{B}$  mora imati redaka koliko je dimenzija od  $W$  (broj redaka  $m$  od  $A$ ), a stupaca koliko je dimenzija od  $U$  (broj stupaca od  $B$ ). Dakle, umnožak dviju ulančanih matrica ima redaka koliko prva, a stupaca koliko druga. Ostaje još pitanje kako odrediti elemente u  $A \cdot B$ . To nećemo argumentirati, nego samo navodimo pravilo: Element na poziciji  $(i, j)$  umnoška  $A \cdot B$  je skalarni produkt  $i$ -tog retka od  $A$  i  $j$ -tog stupca od  $B$ , oba shvaćena kao elementi od  $\mathbb{R}^n$  (čak i ako se radi o kompleksnim matricama, ovi skalarni produkti se računaju kao u realnom slučaju).

**Napomena 27.** Gore smo podrazumijevali da smo za  $V$  uzeli istu bazu i kad gledamo matricu od  $\hat{A}$  i kad gledamo matricu od  $\hat{B}$ .

**Primjer 304.** S obzirom na standardnu ortonormiranu bazu, odredite matricu linearnog operatora  $\tilde{4}$  rotorefleksije reda 4. Odaberimo Kartezijev koordinatni sustav tako da je os rotacije, tj. rotorefleksije,  $z$ -os. Tada je ravnina simetrije  $(x, y)$ -ravnina. Rotacija oko  $z$ -osi za  $90^\circ$  ima matricu

$$R_{z,90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a zrcaljenje s obzirom na  $(x, y)$ -ravninu

$$M_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Budući da kompoziciji operatora odgovara množenje njihovih matrica, tražena je matrica

$$M_{xy} \cdot R_{z,90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

U prethodnom primjeru isti rezultat bismo dobili i množenjem u redosljedu  $R_{z,90^\circ} \cdot M_{xy}$ . No, budući da komponiranje funkcija općenito nije komutativno, ni množenje matrica općenito nije komutativno. To je uostalom očito i iz uvjeta ulančanosti: ako je  $A \cdot B$  definirano, ne znači da je i  $B \cdot A$  definirano. Npr. ako je  $A \in M_{2,3}$ , a  $B \in M_3$ , umnožak  $A \cdot B$  ima smisla, a  $B \cdot A$  nema. No, lako se uvjeriti i da čak i kad oba produkta  $A \cdot B$  i  $B \cdot A$  imaju smisla, oni u pravilu daju različite rezultate.

**Primjer 305.** *Neka su*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Tada je*

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

*ali*

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zbog nekomutativnosti množenja matrica, često se kao „mjera nekomutativnosti” uzima njihov **komutator**

$$[A, B] = AB - BA.$$

**Primjer 306.** *Komutator matrica  $A$  i  $B$  iz prethodnog primjera je*

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Primjer 307.** *Paulijeve matrice spina su tri matrice koje se ponekad koriste za opis spinova elektrona (po jedna za svaki kutni moment):*

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Za njih je*

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, [S_y, S_z] = i\hbar S_x, [S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

*i*

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Posljednja matrica predstavlja kvadrat spinskog kutnog momenta.*

No, kad god ima smisla, množenje matrica je asocijativno:  $(A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$  kad god je  $A$  ulančana s  $B$  i  $B$  s  $C$ ). Nadalje, jedinične matrice  $I_n \in M_n$  kad se množe s drugim matricama s kojima su ulančane ne mijenjaju ih ( $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$  za  $A \in M_{m,n}$ ). Također, vrijedi i distributivnost prema zbrajanju:  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  za  $A \in M_{m,n}$ ,  $B, C \in M_{n,p}$  i  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$  za  $A, B \in M_{m,n}$ ,  $C \in M_{n,p}$ , te kvaziasocijativnost  $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B$  ako su  $A$  i  $B$  ulančane.

**Zadatak 81.** *Ako je  $A \in M_{m,n}$ , za koje  $p$  i  $q$  ima smisla  $A \cdot 0_{p,q}$ ?  $0_{p,q} \cdot A$ ? Što je rezultat tih umnožaka?*

Osim nekomutativnosti, množenje matrica ima još jednu manu. Kako dobro znamo, ako je umnožak dva realna ili kompleksna broja 0, bar jedan od njih je sigurno 0. No, kod matrica ne možemo zaključiti analogno. Primjerice, umnožak matrice-retka  $A = [1 \ 2]$  s matricom-stupcem  $B = [-2 \ 1]^t$  je  $[0] \in M_1$  iako ni  $A$  ni  $B$  nije nulmatrica.



**Ponovimo bitno...** Množenje matrica je podešeno tako da odgovara kompoziciji linearnih operatora: Ako su  $A$  i  $B$  matrice linearnih operatora  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$ , umnožak  $A \cdot B$  je matrica linearnog operatora  $\hat{A} \circ \hat{B}$ . Posljedično, iz uvjeta mogućnosti kompozicije proizlazi uvjet mogućnosti množenja matrica: Umnožak  $A \cdot B$  ima smisla ako su  $A$  i  $B$  ulančane, tj. ako je broj stupaca od  $A$  jednak broju redaka od  $B$ . Element na poziciji  $(i, j)$  u  $A \cdot B$  je tad jednak skalarnom umnošku  $i$ -tog retka od  $A$  s  $j$ -tim stupcem od  $B$ , gdje se taj skalarni umnožak računa kao u prostoru  $\mathbb{R}^n$  (čak i za kompleksne matrice). Ako je  $B$  matrica-stupac, umnožak  $A \cdot B$  odgovara djelovanju linearnog operatora  $\hat{A}$  na vektor čije koordinate (s obzirom na odabranu bazu domene) su sadržane u  $B$ . 

## 8.5 Inverz matrice

Kao što je kompozicija linearnih operatora, kad ima smisla, ponovno linearni operator, tako vrijedi i:

**Teorem 34.** *Ako je linearan operator  $\hat{A}$  bijekcija, onda je i njegova inverzna funkcija  $\hat{A}^{-1}$  također linearan operator.*

Budući da su linearni operatori potpuno zadani djelovanjem na jednoj bazi domene, linearan operator koji je invertibilan mora imati domenu i kodomenu iste dimenzije.

**Zadatak 82.** Objasnite zašto linearan operator s 2-dimenzionalnog u 3-dimenzionalni prostor ne može biti injekcija i zašto linearan operator s 3-dimenzionalnog u 2-dimenzionalni prostor ne može biti surjekcija.

Neka je dakle  $\hat{A} : V \rightarrow W$  bijektivan,  $\dim V = \dim W = n$ . Znamo i da su svi konačnodimenzionalni prostori iste dimenzije međusobno izomorfni, možemo uzeti da je domena jednaka kodomeni, tj. razmatramo samo linearne operatore tipa  $\hat{A} : V \rightarrow V$  (govorimo o linearnim operatorima na  $V$ ). Ako je takav linearni operator bijekcija i  $\hat{A}^{-1}$  pripadni inverzni linearni operator, po definiciji inverzne funkcije imamo

$$\hat{A} \circ \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} \circ \hat{A} = \hat{I}_V.$$

Pitanja na koja sad želimo odgovoriti su: Ako znamo matricu  $A$  našeg bijektivnog linearnog operatora  $\hat{A}$  s obzirom na neku bazu od  $V$ , kako odrediti matricu od  $\hat{A}^{-1}$  (s obzirom na istu bazu)? I, ako znamo matricu linearnog operatora, kako iz nje saznati je li odgovarajući linearni operator invertibilan (bijektivan)?

Neka je  $\hat{A} : V \rightarrow V$  bijektivan linearni operator,  $\dim V = n$ . Tada je svaka njegova matrica  $A$  kvadratna ( $A \in M_n$ ). Također i linearni operator  $\hat{A}^{-1} : V \rightarrow V$  posjeduje kvadratnu matricu  $B \in M_n$  i mora vrijediti

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n,$$

jer komponiranju operatora odgovara množenje njihovih matrica, a jediničnom operatoru s obzirom na svaku bazu odgovara jedinična matrica. Ovo razmišljanje navodi na sljedeću definiciju:

**Definicija 67 (Inverzna matrica).** Za kvadratnu matricu  $A \in M_n$  njen *inverz (inverzna matrica od  $A$ )* je, ako postoji, kvadratna matrica  $B \in M_n$  takva da vrijedi  $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ . Ako takva matrica  $B$  postoji, jedinstveno je određena te se označava s  $A^{-1}$  (a matricu  $A$  zovemo invertibilnom ili regularnom matricom).

Dakle, ako je  $A$  matrica invertibilnog linearnog operatora  $\hat{A} : V \rightarrow V$  s obzirom na neku bazu od  $V$ , onda je  $A^{-1}$  matrica operatora  $\hat{A}^{-1}$  s obzirom na istu bazu. Također primijetimo da nema smisla govoriti o invertibilnosti nekvadratnih matrica jer one odgovaraju linearnim operatorima kojima domena i kodomena nisu iste dimenzije, pa sigurno nisu bijekcije.

**Primjer 308.** Neka je  $\hat{A} : M_{2,1} \rightarrow M_{2,1}$  zadan s  $\hat{A}X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Podsjećamo da je za tako zadan linearni operator njegova matrica s obzirom

na kanonsku bazu od  $M_{2,1}$  točno

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ako je taj linearan operator invertibilan, onda postoji matrica

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

takva da je

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dakle postoje brojevi  $a, b, c, d$  takvi da su istovremeno zadovoljene jednadžbe

$$2a + c = 1, \quad 2b + d = 0, \quad -a = 0, \quad -b = 1.$$

Taj sustav ima jedinstveno rješenje  $(a, b, c, d) = (0, -1, 1, 2)$ , dakle naš operator  $\hat{A}$  je invertibilan i matrica njegovog inverza (s obzirom na kanonsku bazu od  $M_{2,1}$ ) je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Primjer 309.** Ako je  $R_{z,\alpha}$  matrica rotacije za kut  $\alpha$  oko  $z$ -osi, onda je matrica rotacije oko  $z$ -osi za kut  $2\pi - \alpha$  jednaka matrici  $R_{z,2\pi-\alpha}$  jer su te dvije rotacije međusobno inverzne.

Lako je uvjeriti se da nije svaka kvadratna matrica invertibilna. Naime, nisu svi linearni operatori  $\hat{A} : V \rightarrow V$  bijekcije. Prvo, očito nuloperator ne može biti bijektivan (on sve vektore šalje u nulvektor pa ne može biti injekcija). No, nuloperatori nisu jedini ne-bijektivni operatori.

**Primjer 310.** Neka je  $V$  vektorski prostor dimenzije 5 i  $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$  bilo koja njegova baza. Definiramo linearni operator  $\hat{A} : V \rightarrow V$  njegovim djelovanjem na bazi kao  $\hat{A}e_i = 3e_1$  za  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  (dakle, sve vektore baze šalje u trostruki prvi vektor baze). Matrica tog operatora je matrica  $A \in M_5$  kojoj je prvi redak  $(3, 3, 3, 3, 3)$ , a svi ostali elementi su joj 0. Očigledno  $\hat{A}$  nije bijekcija te  $A$  iako nije nulmatrica nije invertibilna.

Iz prethodnog primjera generalizacijom na proizvoljne  $n$  i zamjenom  $3e_1$  s bilo kojim fiksiranim vektorom vidimo da na svakom vektorskom prostoru postoji beskonačno mnogo linearnih operatora na svakom (netrivijalnom) vektorskom prostoru koji nisu bijektivni. Primijetimo da vrijedi i sljedeće:

**Teorem 35.** *Ako postoji vektor  $v \in V$  koji nije nulvektor, ali ga linearni operator  $\hat{A}$  preslika u nulvektor, onda  $\hat{A}$  nije invertibilan. Matrično izrečeno: Matrice koje sadrže nulstupac nisu invertibilne.*

Dokaz je jednostavan: Znamo da svaki linearan operator preslikava nulvektor u nulvektor, pa ako postoji još neki  $v$  koji se preslika u nulvektor imamo dva elementa domene koji su se preslikali u isti element kodomene te operator nije injekcija.  $\square$

Zaključujemo da beskonačno mnogo kvadratnih matrica nije invertibilno. Stoga, iako definicijsko svojstvo podsjeća na svojstvo recipročnog broja u skupu  $\mathbb{R}$  ( $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$  za  $x \neq 0$ ) ne možemo generalizirati definiciju dijeljenja brojeva ( $x : y = x \cdot y^{-1}$  za  $y \neq 0$ ) na dijeljenje matrica jer bismo iz njega morali isključiti beskonačno mnogo matrica-djelitelja.

Vratimo se na problem određivanja inverzne matrice i provjere je li dana matrica invertibilna. Iz primjera 308 vidimo da je ukoliko za matrice od  $\hat{A}$  i  $\hat{A}^{-1}$  pretpostavljamo istu bazu, problem pitanja invertibilnosti i, u slučaju potvrdnog odgovora o invertibilnosti, određivanja matrice inverznog operatora je ekvivalentan rješavanju sustava linearnih jednačbi koji proizlazi iz uvjeta  $A \cdot B = I_n$ . Pritom taj sustav ima  $n^2$  nepoznanica (elementi matrice  $B$  inverznog operatora  $\hat{A}^{-1}$ ) i  $n^2$  jednačbi (po jedna koja proizlazi iz izjednačavanja svih pozicija od  $A \cdot B$  s odgovarajućim pozicijama u  $I_n$ ). Ako malo bolje pogledamo isti primjer, odnosno ako iskoristimo opću definiciju množenja matrica, vidimo da matricu  $A^{-1}$  zapravo možemo odrediti rješavanjem  $n$  sustava tipa  $n \times n$  i oblika  $A \cdot X_j = I_j$ , gdje je  $X_j$  matrica-stupac nepoznanica koja sadrži  $j$ -ti stupac od  $A^{-1}$ , a  $I_j$  je  $j$ -ti stupac jedinične matrice. Kako u Gaußovoj metodi eliminacija odluke o elementarnim transformacijama koje se provode ne ovise o stupcu slobodnih članova i kako pri toj metodi ne dolazi do miješanja stupaca, tih  $n$  sustava možemo riješiti paralelno Gaußovom metodom eliminacija primijenjenom na matricu  $[A|I_n]$ . Ukoliko tom metodom na lijevoj strani uspijemo dobiti jediničnu matricu, znači da su svih  $n$  sustava jednoznačno rješivi i u desnom dijelu redom po stupcima imamo njihova rješenja, dakle će se u desnom dijelu naći  $A^{-1}$ :

$$[A|I_n] \sim \dots \sim [I_n|A^{-1}].$$

Ukoliko pak u lijevom dijelu ne uspijemo dobiti jediničnu matricu, polazna matrica nije invertibilna.

**Primjer 311.** *Inverz matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dobivamo eliminacijom

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

te je  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 5/2 & 3 & 1/2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ . Točnost računa provjeravamo pomoću definicije:  $AA^{-1} = I_3$ .

**Zadatak 83.** Uz koji uvjet je operator skaliranja invertibilan? Kako izgleda inverzna matrica njegove matrice?

Za invertiranje su posebno zgodne ortogonalne matrice. Primijetimo da se ranija definicija ortogonalne matrice može koristeći množenje matrica kraće zapisati kao

$$AA^t = A^t A = I_n.$$

Dakle, matrica je ortogonalna točno ako joj je inverz jednak transponiranoj matrici. Posebno, inverzna matrica bilo kojeg operatora simetrije je njezina transponirana matrica, uz uvjet da se radi o matrici tog operatora s obzirom na neku ortonormiranu bazu. Slično vrijedi, matrica je unitarna ako joj je inverz jednak hermitski konjugiranoj matrici.

**Zadatak 84.** S obzirom na ortonormiranu bazu za  $V^3(O)$  odredite matricu inverza rotorefleksije reda 5 kojoj je os rotacijske komponente  $x$ -os.

**Napomena 28.** Sve matrice danog linearnog operatora su međusobno slične: Ako su  $A$  i  $A'$  dvije matrice istog operatora  $\hat{A}$ , obzirom na različite baze, onda postoji invertibilna matrica  $X$  takva da je  $A' = X^{-1}AX$ .



**Ponovimo bitno...** Kvadratna matrica je invertibilna ako postoji kvadratna matrica (njezin inverz) tako da njihov umnožak daje jediničnu matricu. Inverzna matrica odgovara inverznom linearnom operatoru te ne postoji ako odgovarajući linearni operator nije bijekcija. Ortogonalne matrice su invertibilne i njihov inverz je jednak njihovoj transponiranoj matrici. 🦆



## 8.6 Veza sustava linearnih jednadžbi s matricama

Nakon što smo se upoznali s općim vektorskim prostorima, linearnim operatorima i množenjem matrica, konačno smo u mogućnosti argumentirati



tvrdnje koje smo iznijeli u poglavlju 7.2. Prvo, sad je bitno jednostavnije definirati linearnu jednadžbu s  $n$  nepoznanica  $x_1, \dots, x_n$ : To je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$\langle a, x \rangle = b$$

gdje je  $a = (a_1, \dots, a_n)$  zadani vektor iz  $\mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  nepoznati vektor iz  $\mathbb{R}^n$ , a  $b$  zadani realni broj (slobodni član). Sustav linearnih jednadžbi stoga sad poprima oblik  $m$  jednadžbi  $\langle a_i, x \rangle = b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) kojima tražimo zajedničko rješenje. Ako vektore koeficijenata  $a_i$  ispišemo u matricu  $A$  kao njezine retke, dobili smo matricu tipa  $m \times n$ , a naš sustav poprima oblik

$$AX = B,$$

gdje su  $X \in M_{n,1}$  i  $B \in M_{m,1}$  matrice-stupci koje sadrže nepoznanice odnosno slobodne članove. Primijetimo da ovdje ponovno koristimo izomorfizam između prostora tipa  $\mathbb{R}^n$  i  $M_{n,1}$ .

**Primjer 312.** Za sustav iz primjera 237 imamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 8 & -24 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Uočimo da nam umnožak  $i$ -tog retka od  $A$  s  $X$  i izjednačavanje s  $b_i$  točno daje  $i$ -tu jednadžbu sustava.

Lako je uočiti: Ako uz matricu koeficijenata  $A$  nadopišemo matricu-stupac slobodnih članova  $B$  (u oblik  $(A|B)$ ), dobili smo ono što smo u poglavlju 7.2 zvali matricom sustava. Stogo matematički, matrica sustav je samo  $A$ , da  $(A|B)$  je tzv. proširena matrica sustava, ali ćemo ovdje zadržati prethodno uvedenu terminologiju.

Znamo da  $AX$  odgovara djelovanju nekog linearnog operatora  $\hat{A}$  na neki vektor  $x$ , dakle  $AX$  predstavlja vektor kodomene od  $\hat{A}$  koji treba biti jednak  $B$ . Drugim riječima, rješavanje sustava linearnih jednadžbi je pitanje određivanja vektora domene kojeg zadani operator preslikava u zadani vektor kodomene (kao što je rješavanje jednadžbe  $x^2 - 5x + 1 = 8$  određivanje elementa  $x$  domene funkcije  $x \mapsto x^2 - 5x + 1$  kojeg ta funkcija preslikava u 8 u kodomeni).

Neka je prvo naš sustav  $AX = B$  homogen, tj. oblika  $AX = 0_{m,1}$ . On sigurno ima bar jedno, trivijalno, rješenje  $x = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  jer svaki linearan operator preslikava nulvektor u nulvektor. Ako bi naš sustav imao više

od jednog rješenja, neka su to  $x$  i  $y$  s odgovarajućim matricama stupcima  $X$  i  $Y$ . Tada je  $A(X + Y) = AX + AY = 0_{m,1} + 0_{m,1} = 0_{m,1}$ , dakle je i  $x + y$  također rješenje istog sustava. Nadalje, ako je  $\alpha$  bilo koji realan skalar, imamo  $A(\alpha X) = \alpha AX = 0_{m,1}$ , dakle ako je  $x$  rješenje homogenog sustava, onda je i  $\alpha x$  rješenje istog sustava. Time smo dokazali:

**Teorem 36.** *Skup rješenja svakog homogenog sustava linearnih jednadžbi s  $n$  nepoznanica je potprostor od  $\mathbb{R}^n$ .*

Budući da vektorski prostori s više od jednog elementa sadrže beskonačno mnogo vektora, slijedi:

**Korolar 4.** *Svaki homogeni sustav linearnih jednadžbi ili ima jedinstveno (trivijalno) rješenje ili ima beskonačno mnogo rješenja.*

Ako pak gledamo nehomogeni sustav  $AX = B$ , očigledno je moguće da nema rješenja (sami osmislite primjer). Ako pak takav sustav ima bar jedno rješenje, odaberimo jedno od njegovih rješenja i označimo ga s  $x_P$  (tzv. partikularno rješenje). Nadalje, homogeni sustav s istom matricom koeficijenata, dakle sustav  $AX = 0_{m,1}$ , nazivamo (sustavu  $AX = B$ ) pripadnim homogenim sustavom. On ili ima samo trivijalno rješenje ili ih ima beskonačno mnogo. Neka je  $x_H$  bilo koje rješenje pripadnog homogenog sustava i  $x = x_P + x_H$ . Tada je  $AX = A(X_P + X_H) = AX_P + AX_H = B + 0_{m,1} = B$ , dakle je za svako rješenje  $x_H$  pripadnog homogenog sustava  $x = x_P + x_H$  rješenje sustava  $AX = B$ . Time smo dokazali da vrijedi:

**Korolar 5.** *Svaki sustav linearnih jednadžbi ili nema rješenja ili ima jedinstveno rješenje ili ih ima beskonačno mnogo. Skup rješenja sustava  $AX = B$ , ako nije prazan, se uvijek može zapisati u obliku  $\{x_P + x_H : x_H \in \mathcal{H}\}$ , gdje je  $x_P$  fiksirano partikularno rješenje sustava  $AX = B$ , a  $\mathcal{H}$  prostor rješenja pripadnog homogenog sustava.*

**Napomena 29.** *Skup rješenja nehomogenog sustava nije vektorski prostor: Ako su  $X$  i  $Y$  dva rješenja, imamo  $A(X + Y) = AX + AY = B + B = 2B \neq B$  ako  $B$  nije nulmatrica.*

Ako je  $n \times n$ -sustav linearnih jednadžbi zapisan u matričnom obliku  $AX = B$  te ako je  $A$  invertibilna, onda množenjem jednakosti  $AX = B$  slijeva s  $A^{-1}$  daje  $A^{-1}AX = A^{-1}B$ , odnosno  $X = A^{-1}B$ . Dakle, vrijedi:

**Teorem 37.** *Ako je matrica  $A$  koeficijenata  $n \times n$ -sustava  $AX = B$  invertibilna, taj sustav je Cramerov i njegovo jedinstveno rješenje je  $X = A^{-1}B$ .*

Jedinstvenost rješenja u slučaju invertibilne  $A$  je još lakše argumentirati ovako: Ako je  $A$  invertibilna, odgovarajući linearan operator je bijekcija, pa svaki zadani  $B$  u kodomeni ima svoj jedinstveni „original”  $X$  u domeni.

Gornji teorem u praksi nije od velike koristi jer za računanje inverza od  $A$  trebamo više operacija nego za direktno rješavanje sustava  $AX = B$ , a uz to u slučaju da se  $A$  pokaže neinvertibilnom ne znamo radi li se o sustavu bez rješenja ili s beskonačno mnogo rješenja.



**Ponovimo bitno...** Svaki sustav linearnih jednadžbi može se zapisati kao matricna jednadžba oblika  $AX = B$ . Za homogeni sustav iz linearnosti operatora  $\hat{A}$  određenog matricom  $A$  proizlazi da je njegov skup rješenja vektorski prostor. Za nehomogeni sustav aditivnost linearnog operatora povlači da je njegov skup rješenja ili prazan skup ili oblika  $\{x_P + x_H : x_H \in \mathcal{H}\}$ , gdje je  $x_P$  fiksirano partikularno rješenje sustava  $AX = B$ , a  $\mathcal{H}$  prostor rješenja pripadnog homogenog sustava  $AX = 0_{m,1}$ . Sustav  $AX = B$  tipa  $n \times n$  je Cramerov točno ako je  $A$  invertibilna. 🦆🦆🦆

## 8.7 Determinante matrica

Lako je provjeriti da je

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tj. da je

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Dakle, vidimo da je inverz kvadratne matrice reda 2 moguće izračunati uvijek, osim ako je umnožak njenih dijagonalnih elemenata umanjen za umnožak ostala dva elementa (broj  $ad - bc$ ) jednak 0. Brojevi tipa  $ad - bc$  pojavljuju se i u raznim drugim kontekstima.

**Primjer 313.** Ako su u Kartezijevom koordinatnom sustavu zadane točke  $P = (a, b)$  i  $Q = (c, d)$ , površina  $A$  paralelograma određenog s  $\overrightarrow{OP}$  i  $\overrightarrow{OQ}$  je

$$A = |\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = |ad - bc|.$$

Vidimo da je invertibilnost matrice  $A \in M_2$  moguće karakterizirati jednim brojem koji se iz nje lako izračuna. Taj broj nazivamo determinantom matrice  $A$ :<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Prava matematička definicija je drugačija i temelji se na permutacijama. Zainteresirane čitatelje u tu svrhu upućujemo na standardnu matematičku literaturu iz linearne algebre.

**Definicija 68 (Determinanta).** Broj koji karakterizira invertibilnost kvadratne matrice (ako je jednak 0, matrica nema inverz, a ako je različit od 0, ima ga) zove se determinantom matrice.

Za nas će biti važno zapamtiti da vrijedi:

**Teorem 38.** Sve matrice jednog linearnog operatora  $\hat{A} : V \rightarrow V$  imaju istu determinantu i isti trag.

Kao digresiju, iskoristit ćemo gornji teorem da dokažemo jednu kristalografski važnu činjenicu:

**Teorem 39 (Kristalografska restrikcija).** Rotacije koje su simetrije rešetke (bilo u ravnini bilo u trodimenzionalnom prostoru) kristalografska restrikcija mogu biti samo rotacije redova 1, 2, 3, 4 i 6.

**Dokaz.** Podsjetimo se: Za odabrani koordinatni sustav rešetka je skup svih točaka s cjelobrojnim koordinatama. Ako je  $\hat{r}$  rotacija prostora  $V^2(O)$  (oko  $O$ ) ili  $V^3(O)$  (oko neke osi  $o$  kroz  $O$ ) koja je simetrija rešetke, to znači da točke rešetke preslikava u točke rešetke. Neka je  $R$  matrica te rotacije s obzirom na ortonormiranu bazu (u trodimenzionalnom slučaju bazu odaberimo tako da joj je treći vektor na osi rotacije  $o$ ). Trag od  $R$  je (vidi odjeljak 66) jednak  $1 + 2 \cos \alpha$ , gdje je  $\alpha$  kut rotacije. Ako pak matricu istog operatora uzmemo s obzirom na bazu u kojoj točke rešetke imaju cjelobrojne koordinate, budući da se radi o simetriji rešetke, dobit ćemo matricu  $R'$  kojoj je trag cijeli broj. Iz prethodnog teorema slijedi da je  $1 + 2 \cos \alpha$  cijeli broj, tj.  $2 \cos \alpha$  je cijeli broj, dakle je  $\cos \alpha$  jedan od brojeva  $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ .  $\square$

Vratimo se determinantama. Po prethodnom vidimo da je determinanta kvadratne matrice  $A$  reda 2 (uz oznake kao gore) jednaka  $ad - bc$ . Determinanta matrice  $A$  označava se sa  $\det(A)$ , a ako su matrici  $A$  ispisani njezini elementi, njezina determinanta omeđuje se vertikalnim crtama:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Kako iz većih kvadratnih matrica izračunati broj koji zadovoljava definiciju matrice? Determinante kvadratnih matrica reda 3 imaju značajnu primjenu u klasičnoj algebri vektora, vezano za sve primjene vektorskog i mješovitog produkta (vidi odjeljak 6.1.4), dakle za izračunavanje površina paralelograma i trokuta, provjeru kolinearnosti i komplanarnosti, volumene prizmi i piramida, ... Za determinante reda 3 često se koristi **Sarrusovo pravilo**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \textcolor{red}{a}_{11} & \textcolor{blue}{a}_{12} & \textcolor{blue}{a}_{13} \\ \textcolor{red}{a}_{21} & \textcolor{red}{a}_{22} & \textcolor{blue}{a}_{23} \\ \textcolor{red}{a}_{31} & \textcolor{red}{a}_{32} & \textcolor{red}{a}_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \textcolor{blue}{a}_{21} & (a_{22}) \\ \textcolor{blue}{a}_{31} & \textcolor{blue}{a}_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

**Primjer 314.**

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 4 - (-2) \cdot (-1) \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 1 = -2$$

Sarrusovo pravilo je lako zapamtiti, ali njegova generalizacija na veće matrice ne rezultira brojevima koji zadovoljavaju našu definiciju determinante. U općem slučaju se stoga za računanje determinanti koristi Laplaceov razvoj (koje je primjenjivo i na matrice reda 3). Ideja Laplaceovog razvoja determinante je sukcesivno, korak po korak, danu determinantu svoditi na računanje manjih determinanti. Laplaceov se razvoj može provoditi po bilo kojem ( $i$ -tom) retku ili bilo kojem ( $j$ -tom) stupcu. U obliku formula, Laplaceov razvoj je dan s

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \quad \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Pritom je s  $A_{ij}$  označena matrica koju iz  $A$  dobijemo brisanjem  $i$ -tog retka i  $j$ -tog stupca. Dakle, Laplaceov razvoj po nekom retku (ili stupcu) izračunava determinantu kvadratne matrice  $A$  reda  $n$  tako da svaki element tog retka (odnosno stupca) pomnoži s determinantom matrice koju bismo iz  $A$  dobili tako da iz nje pobrišemo redak i stupac tog elementa. Tako dobijemo  $n$  umnožaka, koje zatim naizmjenično zbrajamo i oduzimamo. Kod razvoja po neparnim retcima (stupcima) alterniranje zbrajanja i oduzimanja je  $+-+--$   $+-\dots$ . Kod razvoja po parnim retcima (stupcima) alterniranje zbrajanja i oduzimanja kreće s  $-$ .

**Primjer 315.** Izračunajmo  $\det(A)$  razvojem po prvom stupcu ako je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Imamo*

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot \det(A_{11}) - 2 \cdot \det(A_{21}) + 0 \cdot \det(A_{31}) - 3 \cdot \det(A_{41}) = \\ &= 2\det(A_{11}) - 2\det(A_{21}) - 3\det(A_{41}). \end{aligned}$$

$$\text{Dalje je } \det(A_{11}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 32, \det(A_{21}) = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -44 \text{ i } \det(A_{41}) = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 36 \text{ pa je}$$

$$\det(A) = 2 \cdot 32 - 2 \cdot (-44) - 3 \cdot 36 = 44.$$

Kako se iz prethodnog primjera može vidjeti, količina računa se smanjuje ako je u retku (ili stupcu) po kojemu razvijamo poneka nula. Stoga se preporuča da se determinanta matrice računa razvojem po onom retku ili stupcu u kojem je najviše nula.

**Primjer 316.**

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

(razvoj po trećem stupcu)

$$= (-5) \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

(razvoji po trećim retcima)

$$= -5 \cdot \left( 3 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) + \left( - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -5 \cdot (24 - 6) + (-6 + 14) = -82.$$

S obzirom na to da Laplaceov razvoj po  $i$ -tom stupcu daje isti rezultat kao razvoj po  $i$ -tom retku zaključujemo da je determinanta svake matrice jednaka determinanti njezine transponirane matrice:

$$\det(A^t) = \det(A).$$

Za kompleksne matrice imamo  $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$ .

Nadalje, znamo da matrice koje sadrže nulstupac odgovaraju neinvertibilnim linearnim operatorima (a i Laplaceov razvoj po nulstupcu dao bi nulu). Ako matrica sadrži nulredak, njezina transponirana matrica sadrži nulstupac, pa također dobivamo determinantu nula. Ukratko, vrijedi:

**Propozicija 5.** *Ako kvadratna matrica  $A$  sadrži nulstupac ili nulredak, onda je  $\det(A) = 0$ .*

Specijalno vrijedi:

$$\det(0_n) = 0.$$

**Gornje-/donjetrokutaste matrice** su one kvadratne matrice čiji svi elementi ispod/iznad dijagonale su 0. Matrice koje su istovremeno gornje- i donjetrokutaste zovu se **dijagonalne**. Uzastopnim Laplaceovim razvojem po prvom retku odnosno stupcu lako zaključimo:

**Propozicija 6.** *Determinanta gornjetrokutaste, donjetrokutaste ili dijagonalne matrice jednaka je produktu elemenata na dijagonali.*

Specijalno, vrijedi:

$$\det(I_n) = 1.$$

Nećemo argumentirati, ali kao važno svojstvo determinanti ističemo sljedeći teorem o odnosu determinanti prema elementarnim transformacijama:

**Teorem 40.** *Zamjena dva retka ili dva stupca matrice mijenja predznak determinante.*

*Ako matrici neki redak ili stupac pomnožimo skalarom  $\alpha$ , determinanta dobivene matrice je  $\alpha$  puta determinanta matrice prije tog množenja.*

*Ako jedan redak matrice pribrojimo nekom drugom (ili jedan stupac drugom stupcu), determinanta se ne mijenja.*

Posljedično, determinanta se ne mijenja niti kad višekratnik nekog retka dodamo drugom (ili višekratnik nekog stupca dodamo drugom stupcu). Iz gornjeg teorema može se lako dokazati da za kvadratnu matricu  $A$  reda  $n$  vrijedi

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

Dakle, determinanta kao funkcija  $\det : M_n \rightarrow \mathbb{R}$  za  $n \neq 1$  nije homogena (a lako je uvjeriti se da nije ni aditivna), pa nije linearan funkcional.

Prethodni teorem se može iskoristiti za pojednostavljivanje izračunavanja determinanti velikih matrica.

**Primjer 317.**

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 10 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & -9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 9 & 10 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & 25 & -6 & -29 \\ 0 & 6 & 25 & -4 & -16 \\ 0 & -2 & 14 & -1 & -17 \\ 0 & 2 & 12 & -8 & -23 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 25 & -6 & -29 \\ 6 & 25 & -4 & -16 \\ -2 & 14 & -1 & -17 \\ 2 & 12 & -8 & -23 \end{vmatrix} =$$

(zadnji korak bio je razvoj po prvom stupcu, a sad dvostruki prvi red dodan drugom, četvrti dodan trećem)

$$= - \begin{vmatrix} -3 & 25 & -6 & -29 \\ 0 & 75 & -16 & -74 \\ 0 & 26 & -9 & -40 \\ 2 & 12 & -8 & -23 \end{vmatrix} =$$

(prvi red puta 2, četvrti puta 3)

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -6 & 50 & -12 & -58 \\ 0 & 75 & -16 & -74 \\ 0 & 26 & -9 & -40 \\ 6 & 36 & -24 & -69 \end{vmatrix} =$$

(prvi red dodan četvrtom)

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -6 & 50 & -12 & -58 \\ 0 & 75 & -16 & -74 \\ 0 & 26 & -9 & -40 \\ 0 & 86 & -36 & -127 \end{vmatrix} = -(-6) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 75 & -16 & -74 \\ 26 & -9 & -40 \\ 86 & -36 & -127 \end{vmatrix} =$$

(prvi stupac dodan trećem)

$$= \begin{vmatrix} 75 & -16 & 1 \\ 26 & -9 & -14 \\ 86 & -36 & -41 \end{vmatrix} =$$

(prvi red oduzet od trećeg)

$$= \begin{vmatrix} 75 & -16 & 1 \\ 26 & -9 & -14 \\ 11 & -20 & -42 \end{vmatrix} = \dots = -8079.$$

Koristeći prethodni teorem zaključujemo i da ako u matrici imamo dva proporcionalna retka (ili stupca), oduzimanje prikladnog višekratnika jednog od drugog ne mijena determinantu, ali rezultira matricom s nulretkom (odnosno nulstupcem). Dakle, vrijedi:



**Propozicija 7.** *Ako matrica sadrži dva proporcionalna retka (ili stupca), determinanta joj je 0.*

Iz definicije determinante vidimo da matrice koje imaju nul-redak, nul-stupac, dva proporcionalna retka ili dva proporcionalna stupca nisu invertibilne.

Svojstvo da determinanta promijeni predznak pri zamjeni redaka ili stupaca iskorišteno je pri formalizaciji Paulijevog principa u kvantnoj mehanici.

**Primjer 318 (Slaterova determinanta).** *Paulijev princip glasi: Ukupna elektronska valna funkcija, koja uključuje i spin, mora biti antisimetrična na izmjenju bilo kojeg para elektrona. Jednostavnija formulacija je: Nikoja dva elektrona u istom atomu ne mogu imati iste sve kvantne brojeve. To se izvodi iz nemogućnosti razlikovanja elektronâ.*

Valne funkcije su funkcije koje opisuju vjerojatnost da se neki elektron nađe u nekoj točki prostora. Ako atom ima  $n$  elektrona, svaki od njih je opisan po jednom valnom funkcijom  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ . Želimo li opisati ukupnu valnu funkciju koja opisuje svih  $n$  elektrona istovremeno, najjednostavnija ideja bila bi definirati ju kao produkt svih valnih funkcija pojedinih elektrona, no tako definirana ukupna valna funkcija omogućavala bi razlikovanje elektronâ pa nije prihvatljiva. Primjerice, za slučaj dva elektrona 1 i 2 (možemo ih poistovjetiti primjerice s njihovim pozicijama tj. radij-vektorima), moguće su dvije valne funkcije sustava:  $\psi_1(1)\psi_2(2)$  i  $\psi_1(2)\psi_2(1)$ . Zbog nemogućnosti razlikovanja elektronâ slijedi da ne možemo dati prednost jednoj od te dvije funkcije, pa se kao ukupna valna funkcija uzima jedna od dvije funkcije  $\psi_1(1)\psi_2(2) \pm \psi_1(2)\psi_2(1)$ . Čestice kojima odgovara opis pomoću antisimetrične varijante (promjena redoslijeda mijenja predznak valne funkcije)  $\psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_1(2)\psi_2(1)$  zovu se fermioni (to su primjerice elektroni), a one kojima odgovara simetrična varijanta  $\psi_1(1)\psi_2(2) + \psi_1(2)\psi_2(1)$  zovu se bosoni (primjerice fotoni).

Poopćenjem gornje ideje dobiva se da je za sustav od  $n$  elektrona (ili općenitije fermiona) ukupna valna funkcija dana tzv. Slaterovom determinantom

$$\psi(1, 2, \dots, n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) & \dots & \psi_1(n) \\ \psi_2(1) & \psi_2(2) & \dots & \psi_2(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_n(1) & \psi_n(2) & \dots & \psi_n(n) \end{vmatrix}.$$

Iako determinanta nema svojstvo linearnosti, ima jedno drugo dobro svojstvo:

**Teorem 41 (Binet-Cauchy).** *Determinanta umnoška matrica jednaka je umnošku njihovih determinanti:*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

za kvadrante matrice  $A$  i  $B$  istog reda  $n$ .

Posljedica Binet-Cauchyjevog teorema je da je determinanta inverzne matrice recipročna determinanti polazne matrice. Naime, iz  $A \cdot A^{-1} = I_n$  slijedi  $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1$ . Po Binet-Cauchyjevom teoremu lijeva strana zadnje jednakosti je  $\det(A) \cdot \det(A^{-1})$  pa je

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Iz toga se ponovno vidi da vrijedi svojstvo istaknuto u definiciji: Ako je matrica invertibilna, determinanta joj je različita od nule i obrnuto, ako je  $\det(A) \neq 0$ , onda je  $A$  invertibilna.

Budući da je za ortogonalne matrice  $A^t = A^{-1}$ , a znamo i  $\det(A^t) = \det(A)$ , zaključujemo da za ortogonalne matrice vrijedi

$$\det(A) = \det(A^t) = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},$$

tj.

$$\det(A)^2 = 1.$$

Budući da su elementi ortogonalne matrice realni, slijedi da joj je i determinanta realan broj pa dobivamo:

**Teorem 42.** *Determinanta ortogonalne matrice je uvijek ili 1 ili  $-1$ .*

Analogno se vidi da je determinanta unitarne matrice uvijek kompleksan broj apsolutne vrijednosti 1.

S obzirom na to da je determinanta invarijanta operatora, tj. sve matrice istog operatora imaju jednake determinante, te znajući da operatori simetrije u ortonormiranim bazama imaju ortogonalne matrice, zaključujemo i:

**Korolar 6.** *Svaki operator simetrije u svakoj bazi ima matricu s determinantom 1 ili  $-1$ .*

Jedna od primjena determinanti je i **Cramerovo pravilo** za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Cramerov sustav je  $n \times n$ -sustav s jedinstvenim

rješenjem (tj. sustav  $AX = B$  s invertibilnom  $A$ ). Komponente rješenja takvog sustava lako se opisuju preko determinanti: Ako su nepoznanice  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , onda je

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

za sve  $i$ , gdje je  $D = \det(A)$ , a  $D_i$  je determinanta matrice koju iz  $A$  dobijemo tako da joj  $i$ -ti stupac zamijenimo stupcem slobodnih članova  $B$ . Ovo pravilo ima više nedostataka. Praktično je samo za  $2 \times 2$ - i  $3 \times 3$ -sustave jer za veće sustave računanje determinanti iziskuje više računa nego Gaußova metoda eliminacija. Nadalje, u slučaju da je  $D = 0$ , ne možemo zaključiti ima li sustav beskonačno mnogo rješenja ili ih uopće nema. Uz to, Cramerovo pravilo nije primjenjivo na sustave kod kojih broj nepoznanica nije jednak broju jednadžbi.

**Primjer 319.** *Riješimo sustav*

$$2x - y + z = 2,$$

$$-x - y + 3z = 0,$$

$$x + 2y - 5z = 1$$

*Cramerovim pravilom. Imamo:*

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -4,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -11, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

pa je  $x = (-4)/(-1) = 4$ ,  $y = (-11)/(-1) = 11$  i  $z = (-5)/(-1) = 5$ .

**Zadatak 85.** *Za kakve  $m$  i  $n$  sustav*

$$mx + ny = 1, \quad x + y = mn$$

*ima jedinstveno rješenje?*

Promotrimo sad ponovno prostor geometrijskih vektora  $V^3(O)$ . Neka je dana neka njegova desna baza  $B = (\vec{v}_e, \vec{b}, \vec{c})$  (direktna baza).. Znamo da je volumen jedinične ćelije  $V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ . Vektori baze  $B$  mogu se zapisati svojim

koordinatama u ortonormiranoj bazi  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ :  $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ ,  $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ ,  $\vec{c} = [c_1, c_2, c_3]$ . Neka je

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Tada je zbog invarijantnosti determinante matrice operatora

$$V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \det A.$$

Iz svojstava determinanti znamo i da je  $\det(A A^t) = \det A \cdot \det A^t = \det A \cdot \det A = (\det A)^2 = V^2$ . No,

$$\begin{aligned} A A^t &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Budući da su koordinate  $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ ,  $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ ,  $\vec{c} = [c_1, c_2, c_3]$  dane s obzirom na ortonormiranu bazu, posljednja matrica jednaka je matrici

$$M = \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{pmatrix},$$

te slijedi  $V^2 = \det M$ , odnosno

$$V = \sqrt{\det M}.$$

Matrica  $M$  naziva se metričkim tenzorom baze  $B$  te se osim za izračunavanje volumena jedinične ćelije može iskoristiti i za računanje skalarnog produkta dvaju vektora zadanim koordinatama u bazi  $B$ :

$$[x, y, z] \cdot [x', y', z'] = (x \ y \ z) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

**Zadatak 86.** Za neki kristal pripadna kristalografska direktna baza ima parametre  $a = b = c = 255 \text{ Å}$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 75,5^\circ$ . Izračunajte  $d_{111}$ ,  $V^*$  i kut između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{a}^*$ .

**Zadatak 87.** Dokažite da je za svaku direktnu bazu metrički tenzor njezine recipročne baze inverz njenog metričkog tenzora.



**Ponovimo bitno...** Kvadratna matrica je invertibilna ako i samo ako joj je determinanta različita od 0. U tom je slučaju determinanta inverzne matrice recipročna determinanti polazne matrice. Posebno, determinanta ortogonalne matrice je 1 ili  $-1$ . Matrice koje sadrže nulredak (nulstupac) ili dva proporcionalna retka (stupca) imaju determinantu 0, dakle nisu invertibilne.

Transponiranje ne mijenja determinantu, kao ni pribrajanje jednog retka (stupca) nekom drugom. Zamjena dva retka (stupca) mijenja predznak determinante. Ako iz nekog retka (stupca) izlučimo neki faktor, time smo ga izlučili iz čitave determinante. Determinanta nije linearna, ali je determinanta umnoška matrica jednaka umnošku njihovih determinanti. 🦆🦆



## 8.8 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

U ovom zadnjem od odjeljaka vezanih za linearnu algebru u ovom udžbeniku upoznat ćemo se s dvama za kemičare i fizičare izuzetno korisnim pojmovima vezanim za linearne operatore i matrice, a to su svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti. Sljedeća tri primjera će nas uvesti u ideju svojstvenih vektora linearnih operatora.

**Primjer 320.** Vektori paralelni s osi rotacije se u odnosu na ostale vektore prostora  $V^3$  ističu (s obzirom na odnos prema rotaciji) time da se ne mijenjaju: Ako je  $\vec{v}$  paralelan s osi rotacije  $\hat{r}$ , onda je  $\hat{r}\vec{v} = \vec{v}$ . Reći ćemo: Za operator rotacije u  $V^3$  svaki vektor paralelan osi rotacije je svojstven, s pripadnom svojstveneom vrijednosti 1.

**Primjer 321.** Promotrimo linearni operator određen matricom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

na standardni način (dakle, operator  $\hat{A} : M_{2,1} \rightarrow M_{2,1}$ ,  $\hat{A}X = A \cdot X$ ). Za  $X = (x_1 \ x_2)^t$  imamo

$$\hat{A}X = \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Postoji li za ovaj operator vektor domene koji se preslika u samog sebe? Ako da, trebalo bi vrijediti  $(x_1, x_2) = (x_1 + 5x_2, x_2)$ . U drugoj komponenti sigurno

dolazi do podudaranja, a iz uvjeta podudarnost prvih komponenti ( $x_1 = x_1 + 5x_2$ ) proizlazi uvjet  $x_2 = 0$ . Dakle, ako je  $X = (x_1 \ 0)^t$ , onda je  $\hat{A}X = X$ . Reći ćemo: Linearan operator  $\hat{A}$  posjeduje svojstveni vektor s pripadnom svojstvenom vrijednosti 1.

**Primjer 322.** Operator skaliranja  $\hat{S}_\alpha : V \rightarrow V$ , tj. množenje skalarom  $\alpha$  svaki vektor  $v$  preslikava u  $\alpha v$ . Reći ćemo: Za operator skaliranja s  $\alpha$  svi vektori su svojstveni i odgovarajuća svojstvena vrijednost je  $\alpha$ .

Kao što sugeriraju primjeri, kad govorimo o svojstvenim vektorima i svojstvenim vrijednostima, za dani linearni operator nas zanima koje vektore preslikava u njihove skalarne višekratnike („kojim vektorima se čuva smjer“ bi bilo prikladno pitanje da se radi o linearnim operatorima na prostorima geometrijskih vektora). Budući da su za svaki vektor  $v$  i njegov svaki skalarni višekratnik elementi istog vektorskog prostora, vidimo da ovakvo pitanje ima smisla samo za linearne operatore kojima se domena i kodomena podudaraju. Neka je stoga u nastavku  $\hat{A} : V \rightarrow V$  linearni operator.

**Definicija 69 (Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti).** Neka je  $\hat{A} : V \rightarrow V$  linearni operator. Za skalar  $\lambda$  kažemo da je svojstvena vrijednost operatora  $\hat{A}$  ako postoji vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , takav da je

$$\hat{A}v = \lambda v.$$

Ako je  $\lambda$  svojstvena vrijednost linearnog operatora  $\hat{A}$ , svaki  $v \in V$  koji zadovoljava gornju jednakost zovemo svojstvenim vektorom operatora  $\hat{A}$  (pripadnim svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ ).

Zašto smo u definiciji svojstvenih vrijednosti „zabranili“ nulvektor? Zato jer bi inače svaki skalar bio svojstvena vrijednost svakog linearnog operatora:

$$\hat{A}0 = 0 = \lambda 0$$

za sve skalare  $\lambda$ . No, naravno, za svaku svojstvenu vrijednost je nulvektor jedan od pripadnih svojstvenih vektora.

**Primjer 323.** Stacionarna Schrödingerova jednadžba  $\hat{H}\psi = E\psi$  je problem svojstvenih vrijednosti Hamiltonijana: Svojstvene vrijednosti Hamiltonijana su moguće energije sustava.

**Teorem 43.** Skup svih svojstvenih vektora linearnog operatora na  $V$  koji odgovaraju istoj svojstvenoj vrijednosti čine potprostor od  $V$ , tzv. *svojstveni potprostor*.

Dokažimo to. Neka je  $\lambda$  svojstvena vrijednost operatora  $\hat{A} : V \rightarrow V$  i neka je  $v$  neki pripadni svojstveni vektor. Tada su svi njemu proporcionalni vektori  $w = \mu v$  također svojstveni za  $\hat{A}$  uz istu svojstvenu vrijednost:

$$\hat{A}(\mu v) = \mu \hat{A}v = \mu \lambda v = \lambda(\mu v).$$

Nadalje, ako su  $v$  i  $w$  dva svojstvena vektora koji odgovaraju svojstenoj vrijednosti  $\lambda$  imamo

$$\hat{A}(v + w) = \hat{A}v + \hat{A}w = \lambda v + \lambda w = \lambda(v + w),$$

odnosno dokazali smo da je zbroj dva svojstvena vektora ponovno svojstveni vektor, uz istu svojstvenu vrijednost. Dakle, skup svih svojstvenih vektora linearnog operatora  $\hat{A} : V \rightarrow V$  koji odgovaraju danoj svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$  čini potprostor od  $V$ .  $\square$

Svojstveni potprostor operatora  $\hat{A} : V \rightarrow V$  koji odgovara svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$  označit ćemo s  $V_{\hat{A}, \lambda}$ . Skup svih svojstvenih vrijednosti linearnog operatora zove se **spektar**.

**Primjer 324.** Iz primjera 322 vidimo da je za svaki operator skaliranja  $\hat{S}_\alpha : V \rightarrow V$

$$V_{\hat{S}_\alpha, \alpha} = V$$

i da je to jedini svojstveni potprostor za taj slučaj (spektar od  $\hat{S}_\alpha = \{\alpha\}$ ).

Specijalno, budući da je  $\hat{I} = \hat{S}_1$ , jedinični operator ima jednu svojstvenu vrijednost, to je 1 (spektar mu je  $\{1\}$ ), a pripadni svojstveni potprostor je čitava domena tog operatora.

Pogledajmo linearne operatore simetrija na  $V^2(O)$  i  $V^3(O)$ . Budući da u tim prostorima vrijedi da su dva vektora istog smjera točno ako je jedan jednak skalar puta drugi, vidimo da su operatorima simetrije svojstveni oni vektori kojima se djelovanjem operatora ne promijeni smjer.

U dvodimenzionalnom slučaju imali smo operatore rotacija oko  $O$  i operatore osnih simetrija s obzirom na pravce kroz  $O$ . Netrivijalna rotacija u dvodimenzionalnom slučaju nema svojstvenih vektora ni vrijednosti (spektar joj je prazan) jer svakom vektoru osim nulvektora mijenja smjer. Osna simetrija čuva smjer vektorima koji su na osi simetrije ili koji su okomiti na nju. Prvi se preslikavaju sami u sebe, pa je odgovarajuća svojstvena vrijednost 1, odnosno svojstveni potprostor osne simetrije koji odgovara svojstvenoj vrijednosti 1 je skup svih vektora na osi simetrije. Oni drugi se preslikavaju u sebi suprotne, pa je odgovarajuća svojstvena vrijednost  $-1$ , odnosno svojstveni potprostor osne simetrije koji odgovara svojstvenoj vrijednosti  $-1$  je

skup svih vektora na pravcu kroz  $O$  koji je okomit na os simetrije. Spektar osne simetrije je  $\{-1, 1\}$ .

U trodimenzionalnom slučaju uz rotacije oko osi kroz  $O$  i zrcaljenja s obzirom na ravnine kroz  $O$  imamo i centralne simetrije, no one su skalarni operatori s faktorom  $-1$  pa im je cijeli  $V^3(O)$  svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost  $-1$  i nemaju drugih svojstvenih vrijednosti. Spektar centralne simetrije je  $\{-1\}$ . Netrivijalna rotacija u trodimenzionalnom slučaju, kao što smo vidjeli u uvodnom primjeru ovog odjeljka, ima svojstvenu vrijednost  $1$ , a pripadni svojstveni potprostor čine vektori na osi rotacije. Ostalim vektorima se netrivialnom rotacijom mijenja smjer, pa je  $1$  jedina svojstvena vrijednost za rotacije. Spektar netrivialne rotacije prostora je  $\{1\}$ . Za zrcaljenja u trodimenzionalnom slučaju kao i u dvodimenzionalnom imamo dvije svojstvene vrijednosti  $1$  i  $-1$ , odnosno opet je spektar  $\{-1, 1\}$ . No, prvoj sad odgovara svojstveni potprostor svih vektora u ravnini simetrije. Drugoj kao i u prethodnom slučaju odgovara svojstveni potprostor vektora na normali ravnine simetrije.

Posljednji slučaj se ističe u odnosu na ostale: Za zrcaljenje u  $V^3(O)$  imamo svojstvenu vrijednost (to je  $1$ ) kojoj odgovara svojstveni potprostor dimenzije veće od  $1$ . U takvom slučaju govorimo o degeneraciji: Ako istoj svojstvenoj vrijednosti odgovaraju dva ili više linearno nezavisnih svojstvenih vektora (tj. svojstveni potprostor ima dimenziju veću od  $1$ ), tu svojstvenu vrijednost nazivamo **degeneriranom**.

**Primjer 325.** *U kvantnoj mehanici u slučaju degeneriranih svojstvenih vrijednosti govorimo o degeneriranom stanju sustava. Primjerice, za energetske nivoe (svojstvene vrijednosti Hamiltonijana) opisane glavnim kvantnim brojem  $n > 1$  i azimutnim kvantnim brojem  $0 < l < n$  dolazi do degeneracija, tj. postoji više neproporcionalnih valnih funkcija (različitih orbitala, primjerice za  $l = 1$  i  $n = 2$  imamo 3 tzv. 2p-orbitale, koje opisuju elektrone s istom energijom).*

Ako je operator  $\hat{A} : V \rightarrow V$  invertibilan, on ne može nenul vektor preslikati u nulvektor (zašto?), dakle ne postoji  $v \neq \mathbf{0}$  takav da je  $\hat{A}v = 0 \cdot v$ . Budući da invertibilnim operatorima odgovaraju invertibilne matrice, zaključujemo:

**Teorem 44.** *Linearni operator je invertibilan (odnosno, matrica je invertibilna) točno ako mu (joj) spektar ne sadrži  $0$ .*

Također, budući da je  $\hat{A}v = \lambda v$  za svaku svojstvenu vrijednost  $\lambda$  i pripadni svojstveni vektor  $v$ , u slučaju kad je  $V$  unitaran imamo  $\|\hat{A}v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ . Ako je  $\hat{A}$  još ortogonalan operator znamo i  $\|\hat{A}v\| = \|v\|$ , dakle je  $|\lambda| = 1$ , odnosno dokazali smo:



**Teorem 45.** *Svojstvene vrijednosti ortogonalnih operatora (operatora simetrije) mogu biti samo 1 i  $-1$ .*

Potpuno analogno se dokazuje da sve svojstvene vrijednosti unitarnih operatora imaju apsolutnu vrijednost 1.

Podsjetimo se da su determinanta i trag invarijante linearnih operatora, tj. sve matrice istog linearnog operatora imaju istu determinantu i isti trag, tj. možemo govoriti o determinanti i tragu operatora. Stoga ako znamo da je  $\hat{A}$  neki operator simetrije na  $V^2(O)$  ili  $V^3(0)$ , kako smo vidjeli u prethodnim odjeljcima, on ima determinantu 1 ili  $-1$  i, kako smo vidjeli gore, jedine moguće svojstvene vrijednosti su mu  $\pm 1$ . Ako ima determinantu  $-1$ , radi se o centralnoj simetriji, zrcaljenju, rotoinverziji ili rotorefleksiji, a ako ima determinantu 1, onda se radi o rotaciji. Ako je  $\det \hat{A} = 1$ , tj. ako je  $\hat{A}$  rotacija, onda (kao u dokazu kristalografske restrikcije) znamo i da je  $\operatorname{tr} \hat{A} = 1 + 2 \cos \varphi$ , tj. kut rotacije je  $\arccos \frac{\operatorname{tr} \hat{A} - 1}{2}$ . Os rotacije je pravac na kojem leži bilo koji od nenul-svojstvenih vektora. Ako je pak  $\det \hat{A} = -1$ , vrstu operatora simetrije kao i položaj njegovog centra/osi/ravnine dobijemo analiziranjem svojstvenih potprostora, vidi kasniji primjer 328.

Kako odrediti svojstvene vektore i vrijednosti danog linearnog operatora  $\hat{A} : V \rightarrow V$  (na konačnodimenzionalnom prostoru  $V$ ,  $\dim V = n$ )? Neka je  $A \in M_n$  matrica tog operatora obzirom na neku bazu  $B$  od  $V$ . Budući da djelovanju operatora na vektor odgovara množenje matrice operatora s matricom stupcem, definicijska jednakost sad poprima matrični oblik

$$Av = \lambda v,$$

(gdje je  $v$  matrica-stupac koja sadrži koordinate svojstvenog vektora u bazi  $B$ ). Ta je jednakost ekvivalentna s

$$(A - \lambda I_n)v = 0_{n,1}, \quad (8.3)$$

što je matrična jednadžba koja odgovara homogenom  $n \times n$ -sustavu linearnih jednadžbi s matricom koeficijenata  $A - \lambda I_n$ . Znamo da takav sustav ima jedinstveno, trivijalno rješenje, točno ako je ta matrica invertibilna, tj. ako joj je determinanta različita od 0. Dakle, ako je  $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ , onda jedino nulvektor zadovoljava definicijsku jednakost pa  $\lambda$  nije svojstvena vrijednost. Uzevši u obzir da je determinanta invarijanta operatora,  $\det(A - \lambda I_n)$  će imati istu vrijednost neovisno o odabiru baze  $B$ , dakle vrijedi:

**Teorem 46.** *Ako je  $A \in M_n$  matrica linearnog operatora  $\hat{A}$ , svojstvene vrijednosti operatora  $\hat{A}$  su rješenja jednadžbe (stupnja  $n$ )*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Ta jednađba se zove se *karakterističnom jednađbom* operatora  $\hat{A}$  (odnosno, matrice  $A$ ).

Vidimo da iz toga slijedi da su ne samo determinanta i trag, nego i svojstveni vektori, spektar i karakteristični polinom invarijante operatora, tj. uvijek ćemo za njih dobiti iste rezultate neovisno o tome koju matricu danog linearnog operatora odaberemo.

**Zadatak 88.** *Dokažite da linearni operator na trodimenzionalnom prostoru uvijek ima bar jednu realnu svojstvenu vrijednost.*

**Zadatak 89.** *Dokažite da ako su svih  $n$  rješenja karakteristične jednađbe realna, onda je njihov umnožak (svako množimo onoliko puta kolika mu je kratnost) jednak determinanti operatora  $\hat{A}$ . Uputa: Koristite Vièteove formule.*

Budući da je stupanj karakteristične jednađbe jednak dimenziji od  $V$ , vidimo da spektar operatora sadrži najviše  $n$  različitih svojstvenih vrijednosti. Ako smo odredili spektar od  $\hat{A}$ , za svaki  $\lambda$  u spektru odgovarajući svojstveni potprostor je skup rješenja homogenog sustava 8.3. Točnije, rješenja tog sustava daju koordinate (u bazi na koju se odnosi matrica  $A$ ) svojstvenih vektora koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ .

**Primjer 326.** *Odredimo spektar i svojstvene vektore operatora  $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  koji je obzirom na neku bazu od  $\mathbb{R}^2$  prikazan matricom*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Karakteristična jednađba je*

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -4 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0.$$

*Njena rješenja su  $\lambda_1 = -2$  i  $\lambda_2 = 3$ , dakle spektar našeg operatora je skup  $\{-2, 3\}$ .*

*Svojstvene vektore koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti 3 dobijemo rješavanjem homogenog sustava kojem je matrica koeficijenata  $A - 3I$ :*

$$\left( \begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

*pa je  $x_1 + 4x_2 = 0$ , tj.  $x_1 = -4t$ ,  $x_2 = t \in \mathbb{R}$ . Rješenja (svojstveni vektori matrice, tj. operatora  $A$  koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti 3) su vektori iz  $\mathbb{R}^2$  oblika*

$$(x_1, x_2) = (-4t, t) = t(-4, 1).$$

**Zadatak 90.** Odredite svojstvene vektore operatora iz prethodnog primjera koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti  $-2$ .

**Primjer 327.** Promotrimo linearni operator na  $\mathbb{R}^3$  koji obzirom na neku bazu ima matricu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Njegov karakteristični polinom je

$$k_A(\lambda) = -\lambda(2 - \lambda)^2$$

pa su mu svojstvene vrijednosti  $\lambda = 0$  i  $\lambda = 2$ . Odredimo svojstvene vektore za svojstvenu vrijednost 2, tj. riješimo homogeni sustav s matricom  $A - 2I$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim (1 \ 0 \ -1 \mid 0).$$

Rješenje sustava su sve trojke  $(x_1, x_2, x_3)$  sa svojstvom  $x_1 - x_3 = 0$ ,  $x_2 = t \in \mathbb{R}$  i  $x_3 = s \in \mathbb{R}$ , tj. trojke oblika  $(s, t, s) = s(1, 0, 1) + t(0, 1, 0)$ . Za  $t = 0$  dobivamo svojstveni vektor  $(1, 0, 1)$ , a za  $s = 0$  svojstveni vektor  $(0, 1, 0)$ . Vektori  $(1, 0, 1)$  i  $(0, 1, 0)$  nisu proporcionalni, dakle su linearno nezavisni, pa svojstvenoj vrijednosti 2 odgovaraju dva linearno nezavisna svojstvena vektora. Prema tome,  $\lambda = 2$  je degenerirana svojstvena vrijednost operatora prikazanog matricom  $A$ .

**Primjer 328.** Linearni operator  $\hat{A}$  na  $V^3(O)$  je ortogonalan i s obzirom na neku bazu ima matricu

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} - 1 & 2 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 - \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -1 & 1 + \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinanta ove matrice je  $-1$ , dakle se radi o centralnoj simetriji, zrcaljenju, rotoinverziji ili rotorefleksiji.

Trag ove matrice je 1, dakle se ne može raditi o centralnoj simetriji (trag bi bio  $-3$ ).

Trag svakog zrcaljenja je 1, rotorefleksije je  $2 \cos \alpha - 1$ , a rotoinverzije  $-2 \cos \alpha - 1$ . Dakle, ako se radi o rotorefleksiji morao bi biti  $\alpha = 360^\circ$  (tj. rotorefleksija koja je „čisto“ zrcaljenje), a ako se radi o rotoinverziji morao bi biti  $\alpha = 180^\circ$  (no, nije teško uvjeriti se da je rotoinverzija reda 2

oko neke osi isto što i zrcaljenje s obzirom na ravninu okomitu na os). Dakle, naš linearan operator je zrcaljenje s obzirom na neku ravninu.

Svojstvene vrijednosti su 1 i  $-1$ , pri čemu je 1 degenerirana. Dakle, ravnina ovog zrcaljenja je ravnina kroz  $O$  kojoj normala ima smjer svojstvenih vektora od  $-1$ . Jedan takav je  $\vec{n} = [1, 0, 1]$ , tj. ravnina zrcaljenja je ravnina kroz  $O$  normale  $\vec{n} = \vec{a} + \vec{c}$  ako je  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  baza s obzirom na koju je dana gornja matrica. Ako je ta baza ortonormirana, jednadžba ravnine zrcaljenja bila bi  $x + z = 0$ , a inače bismo jednadžbu te ravnine  $Ax + By + Cz = 0$  dobili tako da odredimo koordinate  $[A, B, C]^*$  vektora  $\vec{n}$  u recipročnoj bazi baze  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

**Primjer 329.** Ako je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onda je

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4 - \lambda)(-1 - \lambda)$$

pa je spektar te matrice  $\{0, 4, -1\}$ .

Gornji rezultat nije slučajna, naime vrijedi:

**Teorem 47.** Svojstvene vrijednosti linearnog operatora kojemu u nekoj bazi odgovara dijagonalna matrica su brojevi na njenoj dijagonali. Odgovarajući svojstveni vektori su redom vektori baze na koju se odnosi ta matrica.

**Dokaz.** Neka je  $A$  dijagonalna matrica koja odgovara operatoru  $\hat{A}$  u bazi  $(e_1, \dots, e_n)$ . Neka su brojevi na njezinoj dijagonali redom  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Po definiciji matrice operatora imamo da je  $\hat{A}e_i = \lambda_i e_i$ , dakle je za svako  $i$  vektor  $e_i$  svojstven za svojstvenu vrijednost  $\lambda_i$ .  $\square$

S obzirom da su dijagonalne matrice posebno zgodne za račune s matricama, postavlja se pitanje dijagonalizacije: Može li se zadani linearni operator **dijagonalizirati**, tj. postoji li baza za  $V$  s obzirom na koju mu je matrica dijagonalna? Posljedica prethodnog teorema je:

**Korolar 7.** Linearni operator  $\hat{A} : V \rightarrow V$  se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza od  $V$  čiji svi elementi su njegovi svojstveni vektori.

**Primjer 330.** U modelu krutog rotora koji se koristi za objašnjenje rotacijskih spektara molekula, molekula se gleda kao skup jezgri na fiksnim međusobnim položajima određenim prosječnom geometrijom molekule u određenom

elektronskom i vibracijskom stanju. Kinetička energija  $T$  rotacije krutog tijela može se izračunati formulom

$$T = \frac{1}{2} \omega^t I \omega,$$

gdje je  $\omega$  vektor kutne brzine, a  $I$  tzv. tenzor inercije (kvadratna matrica reda 3 na čijoj dijagonali su momenti inercije obzirom na odabrane koordinatne osi, a izvan dijagonale su tzv. produkti inercije).

Matrica  $I$  se uvijek može dijagonalizirati u nekoj bazi  $\{a, b, c\}$  — ti dijagonalni elementi (svojstvene vrijednosti  $I_a \leq I_b \leq I_c$ ) zovu se glavni momenti inercije, a vektori baze  $\{a, b, c\}$  (odnosno odgovarajuće koordinatne osi) zovu se glavne osi inercije. Vrijedi:

$$T = \frac{1}{2} (I_a \omega_a^2 + I_b \omega_b^2 + I_c \omega_c^2),$$

gdje su  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$  koordinate od  $\omega$  obzirom na bazu  $\{a, b, c\}$ .

Temeljem te dijagonalizacije rotori se klasificiraju na linearne ( $I_a = 0, I_b = I_c$ ), sferne ( $I_a = I_b = I_c$ ), simetrične (dva jednaka glavna momenta inercije, treći različit) i asimetrične (sva tri glavna momenta inercije različita).

Općenito nije lako iz dane jedne matrice linearnog operatora saznati može li se taj operator dijagonalizirati. Iznimka su simetrični i hermitski operatori na unitarnim prostorima.

**Definicija 70 (Simetrični i hermitski linearni operatori).** Ako je  $V$  realan (kompleksan) unitaran prostor, linearan operator  $\hat{A} : V \rightarrow V$  je simetričan (hermitski) ako vrijedi:  $\langle \hat{A}v, w \rangle = \langle v, \hat{A}w \rangle$  za sve vektore  $v, w \in V$ .

Simetrični i hermitski operatori imaju isključivo realne svojstvene vrijednosti. Za slučaj konačnodimenzionalnih  $V$  vrijedi: Sve matrice simetričnog operatora su simetrične, odnosno sve matrice hermitskog operatora su hermitske. Simetrični i hermitski operatori, tj. operatori kojima je u nekoj bazi matrica simetrična odnosno hermitska, mogu se dijagonalizirati.

**Primjer 331.** Jedan od postulata kvantne mehanike je ne samo da se dinamičke veličine  $\Omega$  klasične fizike u kvantnoj mehanici opisuju linearnim operatorima  $\hat{\Omega}$  (na prostorima valnih funkcija), nego i da se mjerenjem veličine  $\Omega$  za rezultat mogu dobiti samo svojstvene vrijednosti operatora  $\hat{\Omega}$ . Primjerice, kad bismo mjerili energiju sustava, dobivali bismo svojstvene vrijednosti Hamiltonijana.

Da bismo se osigurali da mjerne veličine budu realne, postavlja se zahtjev: dinamičke veličine  $\Omega$  klasične fizike se u kvantnoj mehanici opisuju hermitskim linearnim operatorima  $\hat{\Omega}$ .

**Zadatak 91.** *Argumentirajte zašto se linearni operator čija karakteristična jednačba ima onoliko različitih rješenja kolika je dimenzija prostora sigurno može dijagonalizirati!*



**Ponovimo bitno...** Svojstvena vrijednost linearnog operatora  $\hat{A} : V \rightarrow V$  je skalar za koji postoji nenul vektor kojeg taj operator preslika u taj skalar puta samog sebe; odgovarajući vektor je svojstveni vektor. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora zovemo spektar, skup svih svojstvenih vektora koji odgovaraju pojedinoj svojstvenoj vrijednosti čini potprostor od  $V$  (svojstveni potprostor). Ako je svojstveni potprostor dimenzije veće od 1, svojstvenu vrijednost nazivamo degeneriranom.

Ako je  $V$  konačnodimenzionalan, spektar je skup rješenja karakteristične jednačbe, tj. jednačbe koju dobijemo izjednačavanjem nule i determinante matrice  $A$  operatora od koje je oduzeta  $\lambda I_n$ . Ako postoji baza za koju je matrica operatora dijagonalna (ta se baza sastoji od svojstvenih vektora), operator se može dijagonalizirati – matrica s obzirom na tu bazu svojstvenih vektora je dijagonalna, na dijagonali su joj točno sve svojstvene vrijednosti tog operatora. 🦆🦆🦆

### Dodatak: Linearna algebra u jednom zadatku

Ovim odjeljkom želimo kroz jedan naizgled jednostavan zadatak ponoviti sve bitne pojmove ovog poglavlja. Zadatak je sljedeći:

**Zadatak 92.** *Odredite sve operatore simetrije  $\hat{A} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$  koji za zadanu proizvoljnu bazu  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  vektor  $[1, 1]$  preslikavaju u  $[1, 0]$ . Odredite i njihove determinante, tragove, svojstvene vrijednosti i svojstvene potprostore.*

Parametre baze označit ćemo s  $a$  (duljina prvog vektora baze),  $b$  (duljina drugog vektora baze) i  $\gamma$  (kut među njima).

Kao prvo, podsjetimo se definicije ortogonalnog operatora i operatora simetrije (definicija ??), za razumijevanje koje je pak neophodan pojam unitarnog prostora (definicija ??) i norme vektora (formula 8.1). Nadalje, podsjetimo se da se za vektorske prostore geometrijskih vektora norma vektora podudara s njegovim iznosom. Također, potrebno nam je razumijevanje značenja koordinata vektora (str. 220) u odnosu na danu bazu prostora (definicija 59). Kombinacija tih znanja za nas znači da

$$\hat{A}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a},$$

posebno da mora vrijediti

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| = a.$$

Kako je  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = a^2 + 2ab \cos \gamma + b^2$ , slijedi da je uvjet da operator iz zadatka uopće može postojati  $b^2 + 2ab \cos \gamma = 0$ . Kako je  $b \neq 0$  (nikoja baza ne može sadržavati nulvektor) dobivamo uvjet rješivosti zadatka. Naš zadatak nije rješiv osim ako je

$$b = -2a \cos \gamma. \quad (8.4)$$

Kako duljina vektora ne može biti negativna, a vektora baze niti 0, imamo i da kut  $\gamma$  mora biti tup (točnije,  $90^\circ < \gamma < 180^\circ$  jer je svaki kut između dva vektora između  $0$  i  $180^\circ$ , ali bazni vektori ne smiju biti kolinearni, pa kut  $180^\circ$  nije dozvoljen).

U drugom koraku iskoristimo sljedeću činjenicu: Ako je  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  baza, onda je to i  $\{\vec{a}, \vec{b}'\}$ , gdje je  $\vec{b}' = \vec{a} + \vec{b}$ . Naime, baza mora biti linearno nezavisan skup (definicija 58), a dvočlani skup je linearno nezavisan točno ako se nikoji od vektora ne može napisati kao skalar puta drugi vektor. Kad bi  $\vec{b}'$  bio oblika  $\alpha \vec{a}$  za neki skalar (realan broj  $-V^2(O)$  je realan vektorski prostor)  $\alpha$ , imali bismo  $\vec{a} + \vec{b} = \alpha \vec{a}$ , odnosno  $\vec{b} = (\alpha - 1) \vec{a}$ , pa bi  $\vec{b}$  bio oblika skalar puta  $\vec{a}$ , što je nemoguće jer znamo da je  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  baza.

Pogledajmo sad matricu  $A'$  od  $\hat{A}$  s obzirom na bazu  $\{\vec{a}, \vec{b}'\}$ . S obzirom na njezinu definiciju 66 i uvjet zadatka da je  $\hat{A} \vec{b}' = \vec{a}$ , drugi stupac od  $A'$  mora biti  $(1, 0)^t$ . Nadalje, determinanta je invarijanta matrice operatora (teorem 38), a kako  $\hat{A}$  mora biti operator simetrije,  $\det A'$  mora biti 1 ili  $-1$  (teorem 42) pa je

$$A' = \begin{pmatrix} p & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Imamo dakle  $\hat{A} \vec{a} = p \vec{a} \pm \vec{b}' = (p \pm 1) \vec{a} \pm \vec{b}$ . Nadalje,  $\hat{A} \vec{b} = \hat{A}(\vec{b}' - \vec{a})$ , što je pak zbog linearnosti operatora  $\hat{A}$  (definicija 64) jednako  $\hat{A} \vec{b}' - \hat{A} \vec{a} = \vec{a} - ((p \pm 1) \vec{a} \pm \vec{b})$ , opet po definiciji matrice operatora. Dakle,  $\hat{A} \vec{b} = (1 - p \mp 1) \vec{a} \mp \vec{b}$ . Stoga s obzirom na bazu  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  imamo dva tipa moguće matrice za  $\hat{A}$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} p+1 & -p \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} p-1 & 2-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sad ćemo iskoristiti znanje o svojstvenim vrijednostima (definicija 69), koje za operatore simetrije mogu biti samo 1 i/ili  $-1$  ili pak ne postojati (teorem 45). Svojstvene vrijednosti (u slučaju linearnih operatora) su rješenja karakteristične jednadžbe (teorem 46). Karakteristična jednadžba za matricu  $A_1$  je  $\lambda^2 - p\lambda - 1 = 0$ , a za  $A_2$  ona je  $\lambda^2 - p\lambda + 1 = 0$ . Ako u

karakterističnu jednadžbu za  $A_1$  uvrstimo moguća rješenja 1 i  $-1$ , dobivamo  $p = 0$ . Ako pak pretpostavimo da  $A_1$  nema svojstvenih vrijednosti, diskriminanta karakteristične jednadžbe mora biti negativna, tj.  $p^2 + 4 < 0$ , što je nemoguće. Dakle, jedini mogući linearni operator koji zadovoljava da mu je determinanta  $-1$  i da nema svojstvenih vrijednosti osim  $\pm 1$  ima matricu  $A_1$  s  $p = 0$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ako pak pogledamo opcije 1 je svojstvena vrijednost,  $-1$  je svojstvena vrijednost ili nema svojstvenih vrijednosti za  $A_2$ , dobivamo da su one redom moguće za  $p = 2$ ,  $p = -2$  odnosno  $p^2 - 4 < 0$  (tj.  $|p| < 2$ ). Imamo dakle tri opcije za matricu  $A_2$  koja zadovoljava naše uvjete:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(determinanta 1, svojstvena vrijednost 1),

$$A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(determinanta 1, svojstvena vrijednost  $-1$ ) i

$$A_4 = \begin{pmatrix} p-1 & 2-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

uz  $|p| < 2$  (determinanta 1, spektar – skup svih svojstvenih vrijednosti – je prazan).

Ostaje pitanje koje od tih četiriju matrica  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  su stvarno operatori simetrije, tj. čuvaju normu. S obzirom na to da ćemo za provjeru čuvanja norme morati uspoređivati norme (iznose) proizvoljnih vektora prije i poslije preslikavanja, praktično je izvesti formulu za kvadrat iznosa vektora  $[x, y] = x\vec{a} + y\vec{b}$ , naravno uz pretpostavku iz formule ???. Imamo:

$$|[x, y]|^2 = x^2a^2 + 2xya(-2a \cos \gamma) \cos \gamma + y^2(-2a \cos \gamma)^2,$$

odnosno

$$|[x, y]|^2 = a^2(x^2 + 4y(y-x) \cos^2 \gamma). \quad (8.5)$$

Npr,  $|[2, 1]|^2 = a^2(4 + 4 \cdot (1-2) \cos^2 \gamma) = 4a^2(1 - \cos^2 \gamma)$ .

Kao što znamo, djelovanje operatora u matičnom obliku postaje množenje matrice operatora s matricom-stupcem koja sadrži koordinate vektora. Dakle,  $\hat{A}_1[x, y] = [x, x-y]$ . Iz formule 8.5 dobivamo da je  $|[x, x-y]|^2 = a^2(x^2 +$



$4((x-y)^2 - x(x-y)) \cos^2 \gamma$ . Kad sredimo desnu stranu, dobit ćemo točno isti izraz kao u formuli 8.5, dakle je  $||[x, y]|| = |\hat{A}[x, y]|$  za svaki vektor  $[x, y]$ , odnosno operator određen matricom  $A_1$  je stvarno operator simetrije.

Lako je vidjeti da  $A_2$  i  $A_3$  ne preslikavaju prvi bazni vektor u vektor istog iznosa pa nisu operatori simetrije:  $a = |[1, 0]|$ , ali  $|A_2[1, 0]| = |[1, -1]| = a\sqrt{1+8\cos^2\gamma}$  pa bi moralo biti  $1 = 1+8\cos^2\gamma$ , odnosno  $\gamma = 90^\circ$ , što nije tupi kut. Analogno,  $|A_3[1, 0]| = |[-3, -1]| = a\sqrt{9-8\cos^2\gamma}$ , pa bi moralo biti  $9-8\cos^2\gamma = 0$ , odnosno  $\cos^2\gamma > 1$ , što je nemoguće.

Ako uvjet očuvanja duljine pri preslikavanju prvog baznog vektora ispišemo za  $A_4$ , dobijemo (nakon sređivanja) uvjet  $p^2 + 2p(2\cos^2\gamma - 1) = 0$ . Dakle, operator određen s  $A_4$  je operator simetrije samo ako je  $p = 0$  ili ako je  $p = 2 - 4\cos^2\gamma$  (uočimo da oba zadovoljavaju uvjet  $|p| < 2$ ). Dobili smo dakle još dva operatora simetrije:

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(stari  $A_4$  uz  $p = 0$ ) i

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 - 4\cos^2\gamma & 4\cos^2\gamma \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(stari  $A_4$  uz  $p = 2 - 4\cos^2\gamma$ ). Oba čuvaju duljinu od  $\vec{a}$ . Provjermimo još čuvaju li duljinu proizvoljnog vektora  $[x, y]$ , tj. provjerimo jesu li duljine slika od  $[x, y]$  putem  $A_4$  odnosno  $A_5$  jednake izrazu u formuli 8.5.

Za  $A_4$  imamo

$$A_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - x \\ y - x \end{pmatrix},$$

a po formuli 8.5 je

$$|[2y-x, y-x]|^2 = a^2((2y-x)^2 + 4(y-x)(y-x-2y+x) \cos^2 \gamma) = a^2((2y-x)^2 - 4y(y-x) \cos^2 \gamma).$$

To bi za sve  $x$  i  $y$  moralo biti jednako  $||[x, y]||^2 = a^2(x^2 + 4y(y-x) \cos^2 \gamma)$  (ako je  $A_4$  matrica operatora simetrije), dakle imamo uvjet

$$x^2 + 4y(y-x) \cos^2 \gamma = 4y^2 - 4xy + x^2 - 4y(y-x) \cos^2 \gamma$$

za sve  $x$  i  $y$ . Odnosno, mora vrijediti  $2y(y-x) \cos^2 \gamma = y(y-x)$  za sve  $x$  i  $y$ , pa stoga dobivamo  $2\cos^2 \gamma = 1$ . Budući da  $\gamma$  mora biti tupi, zaključujemo: Matrica  $A_4$  je matrica operatora simetrije ako i samo ako je  $\gamma = 135^\circ$  (i  $b = -2a \cos \gamma = a\sqrt{2}$ ).

Za  $A_5$  imamo

$$A_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4 \cos^2 \gamma (y - x) \\ y - x \end{pmatrix},$$

a po formuli 8.5 je

$$\begin{aligned} |[x + 4 \cos^2 \gamma (y - x), y - x]|^2 &= a^2((x + 4 \cos^2 \gamma (y - x))^2 + 4(y - x)((1 - 4 \cos^2 \gamma)(y - x) - x) \cos^2 \gamma) = \\ &= a^2(x^2 + 8x(y - x) \cos^2 \gamma + 16(y - x)^2 \cos^4 \gamma + 4(y - x)^2 \cos^2 \gamma - 16(y - x)^2 \cos^4 \gamma - 4x(y - x) \cos^2 \gamma) = \\ &= a^2(x^2 + 8x(y - x) \cos^2 \gamma + 4(y - x)^2 \cos^2 \gamma - 4x(y - x) \cos^2 \gamma) = \\ &= a^2(x^2 + 4(y - x) \cos^2 \gamma (2x + y - x - x)) = a^2(x^2 + 4y(y - x) \cos^2 \gamma), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Dakle,  $A_5$  je matrica operatora simetrije za sve baze koje zadovoljavaju početni uvjet.

Naposlijetku, primijetimo:  $A_5 = A_4$  ako je  $\gamma = 135^\circ$ .

Zaključujemo: Ako je  $\gamma$  tup i  $b = -2a \cos \gamma$ , onda postoje dva tipa operatora simetrije koji preslikavaju  $\vec{a} + \vec{b}$  u  $\vec{a}$ :

- Operator određen matricom  $A_1$  u bazi  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ , kojemu je determinanta  $-1$  i ima svojstvene vrijednosti  $1$  i  $-1$ , te
- operator određen matricom  $A_5$  u bazi  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ , kojemu je determinanta  $1$  i ima svojstvenu vrijednost  $-1$  (ako je  $\gamma = 135^\circ$ ) ili nema svojstvenih vrijednosti (za ostale dopustive  $\gamma$ ).

Prema karakterizaciji operatora simetrije temeljem determinanti i svojstvenih vrijednosti (str. 303) te skicirajući jediničnu ćeliju i njezinu sliku putem  $A_1$  odnosno  $A_5$ , zaključujemo: Operator određen s  $A_1$  je osna simetrija s obzirom na simetralu od  $\vec{a} + \vec{b}$  i  $\vec{a}$  (a okomica na nju je kolinearna s  $\vec{b}$  i ona je svojstveni potprostor za  $-1$ ), dok je operator određen s  $A_5$  rotacija oko  $O$  za kut  $\theta$  koji zadovoljava  $\text{tr} A_5 = 2 \cos \theta = 2 - 4 \cos^2 \gamma$ , dakle  $\theta = \arccos(1 - 2 \cos^2 \gamma)$ .



# Poglavlje 9

## Obične diferencijalne jednačbe

### 9.1 Osnovni pojmovi

U odjeljku 3.5 upoznali smo se s pojmom diferencijalne jednačbe i njezinog rješenja te saznali kako za konkretnu funkciju provjeriti je li ona rješenje zadane diferencijalne jednačbe te ako jest, kako iskoristiti početne uvjete da se ta funkcija jednoznačno odredi. U ovom ćemo poglavlju formalizirati navedene pojmove i saznati kako se rješavaju neki česti tipovi diferencijalnih jednačbi, tj. jednačbi u kojima je nepoznanica funkcija, a jednačba iskazuje vezu između te nepoznate funkcije, njezine nezavisne varijable i njezinih derivacija.

Preciznije rečeno, bavit ćemo se samo **običnim diferencijalnim jednačbama**, a to su one čije nepoznanice su funkcije  $y$  jedne nezavisne varijable (obično označene s  $t$  ili  $x$ ). Diferencijalne jednačbe čije nepoznanice su funkcije više varijabli nazivaju se parcijalnim diferencijalnim jednačbama i odgovarajuća teorija je izvan dometa ovog udžbenika. Budući da ćemo se baviti isključivo običnim diferencijalnim jednačbama, najčešće ćemo ispuštati pridjev „obična”.

Prije formalne definicije obične diferencijalne jednačbe promotrimo jedan primjer vezan za prethodno poglavlje.

**Primjer 332.** *Deriviranje po  $x$  je linearan operator  $\frac{d}{dx}$  kojemu recimo kao domenu i kodomenu uzmemo (beskonačnodimenzionalni) vektorski prostor funkcija jedne varijable (sa zajedničkom domenom) koje posjeduju derivacije svih redova. Taj operator djeluje na funkciju tako da joj pridružuje njezinu derivaciju:*

$$\frac{d}{dx}f = f'.$$

*Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti operatora deriviranja su onda funk-*

cije  $f$  i skalarni (realni brojevi)  $\lambda$  za koje je

$$\frac{d}{dx}f = \lambda f,$$

tj.  $f'(x) = \lambda f(x)$  za sve  $x$ . Vidimo da je problem određivanja svojstvenih vektora i vrijednosti za operator deriviranja diferencijalna jednačba (prvog reda jer se u njoj pojavljuje samo prva derivacija nepoznate funkcije).

Formalizirajmo sad gornje ideje:

**Definicija 71 (Obična diferencijalna jednačba).** Obična diferencijalna jednačba je jednačba koja se može zapisati u obliku

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

gdje je  $F$  izraz ovisan o  $n + 2$  varijable; nezavisnoj varijabli  $t$ , zavisnoj varijabli  $y$  i bar jednoj derivaciji od  $y$ . Rješenje takve jednačbe na intervalu  $I$  je funkcija  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  čije uvrštavanje u jednačbu daje istinitu jednakost za svaku vrijednost varijable  $t \in I$ . Red (stupanj) obične diferencijalne jednačbe je red najviše derivacije nepoznate funkcije koja se u njoj pojavljuje, tj. red jednačbe  $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  je  $n$ .

**Primjer 333.** Jednačba  $\sin \frac{y}{y'} = e^t$  je diferencijalna jednačba prvog reda,  $y' y'' = y$  je diferencijalna jednačba drugog, a  $y''' - 3y' = 2e^y - t$  je diferencijalna jednačba trećeg reda.

**Primjer 334.** Funkcija  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y(t) = e^t$  je jedno rješenje diferencijalne jednačbe  $y' = y$  na  $I = \mathbb{R}$  jer uvrštavanje daje  $e^t = e^t$ , što vrijedi za sve  $t \in \mathbb{R}$ . Možete li pogoditi još koje rješenje iste diferencijalne jednačbe?

Postoje mnoge podvrste diferencijalnih jednačbi, razni postupci za njihovo rješavanje, a neke nisu egzaktno rješive. Mi ćemo se baviti onim vrstama koje su egzaktno rješive, a česte su kao modeli kemijskih i fizikalnih problema. Budući da su u primjenama najčešće diferencijalne jednačbe one u kojima je varijabla nepoznate funkcije vrijeme  $t$ , a same jednačbe iskazuju vezu između nepoznate funkcije (pozicije, koncentracije, ...) i brzine njezine promjene te eventualno ubrzanja, slijedi da su za primjene najbitnije diferencijalne jednačbe prvog i drugog reda, te ćemo se baviti (gotovo) isključivo s njima. U kemiji, diferencijalne jednačbe se najviše pojavljuju u kemijskoj kinetici.

**Primjer 335.** Kretanje čestice mase  $m$  po pravcu (opisano pozicijom  $x(t)$  u trenutku  $t$ ), pod utjecajem sile  $F(t)$ , opisano je drugim Newtonovim zakonom, koji je diferencijalna jednačba drugog reda:

$$F(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \ddot{x}.$$

Osnovna tehnika u pozadini rješavanja diferencijalnih jednačbi je integriranje. Najjednostavnije diferencijalne jednačbe su oblika

$$y' = f(t)$$

i one se mogu riješiti direktnim integriranjem.

**Primjer 336.** *Jednačba*

$$y' = \exp(x)$$

je diferencijalna jednačba prvog reda i možemo ju riješiti direktnim integriranjem:

$$\int y' dx = \int \exp(x) dx,$$

$$y(x) = \exp(x) + C.$$

**Primjer 337.** *Ako u primjeru 335 razmatramo slobodni par, tj.  $F(x) = -mg$ , dobivamo diferencijalnu jednačbu*

$$m\ddot{x} = -mg.$$

*Rješenje dobivamo tako da dvaput integriramo:  $x'(t) = -gt + C_1$ ,  $x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1t + C_2$ .*

Posljednja dva primjera ukazuju na to da je u pozadini rješavanja diferencijalne jednačbe prvog reda jedno integriranje koje rezultira jednom konstantom integriranja, a za jednačbe drugog reda potrebno je dvaput integrirati pa dobivamo dvije konstante integriranja. Rješenja diferencijalnih jednačbi koja sadrže neodređene konstante integriranja nazivaju se općim. Preciznije:

**Definicija 72** (Opće, partikularno i singularno rješenje). *Opće rješenje diferencijalne jednačbe reda  $n$  je njeno rješenje koje sadrži  $n$  neodređenih konstanti.*

*Partikularno rješenje je ono koje odgovara uvrštavanju nekih konkretnih vrijednosti konstanti u opće rješenje.*

*Singularno rješenje diferencijalne jednačbe je njeno rješenje koje se ne može dobiti uvrštavanjem nikojih vrijednosti u konstante općeg rješenja.*

**Primjer 338.** *Opće rješenje diferencijalne jednačbe  $y' = y$  je  $y(x) = Ce^x$ . Primjer partikularnog rješenja te jednačbe je  $y(x) = 0$  koje se dobije za  $C = 0$ .*

**Primjer 339.** Opće rješenje Clairautove jednadžbe

$$y = xy' + (y')^2$$

je  $y(x) = Cx + C^2$ . No, i funkcija  $y_S(x) = -\frac{1}{4}x^2$  je također rješenje, koje ni za koji  $C$  ne možemo dobiti iz općeg rješenja:  $y_S$  je singularno rješenje Clairautove jednadžbe.

U primjenama se u pravilu uz samu diferencijalnu jednadžbu pojavljuje i početni uvjet koji omogućuje odabir partikularnog rješenja koje odgovara postavljenom problemu.

**Primjer 340.** Slobodni pad tijela mase  $m$  opisan je diferencijalnom jednadžbom  $m\ddot{x} = -mg$ , odnosno

$$\ddot{x} = -g.$$

Vidili smo da je opće rješenje te jednadžbe  $x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1t + C_2$ . Ukoliko ishodište postavimo u mjesto otkud je tijelo počelo padati i pretpostavimo da je tijelo samo ispušteno, onda su nam poznata i dva dodatna podatka koja zajedno čine početni uvjet za gornju jednadžbu:

$$x(0\text{ s}) = 0\text{ m},$$

$$x'(0\text{ s}) = 0\text{ m s}^{-1}.$$

Uvrstimo li prvi dio početnog uvjeta u opće rješenje dobivamo da je  $C_2 = 0$ , tj.  $x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1t$ . Ako to deriviramo, dobijemo  $\dot{x}(t) = -gt + C_1$ , što usporedbom s drugim dijelom početnog uvjeta daje  $C_1 = 0$ , dakle je partikularno rješenje koje odgovara problemu  $x(t) = -\frac{g}{2}t^2$ .

**Definicija 73 (Početni uvjet).** Diferencijalna jednadžba  $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  je zadana s početnim uvjetom ako su poznate vrijednosti  $y(t_0)$ ,  $y'(t_0)$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)}(t_0)$  za neku konkretnu vrijednost varijable  $t_0$ .

Važno je paziti da se početni uvjet iskoristi tek na kraju, tj. tek kad je određen potpun oblik općeg rješenja diferencijalne jednadžbe. To je jasno iz njegovog smisla: on služi odabiru partikularnog rješenja, dakle neodređenih konstanti u već određenom općem rješenju.

Razliku općeg i partikularnog rješenja diferencijalne jednadžbe možemo opisati i geometrijski: Opće rješenje predstavlja familiju tzv. integralnih krivulja u koordinatnoj ravnini koje zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu, a partikularno rješenje je jedna od tih krivulja.

**Primjer 341.** Integralne krivulje diferencijalne jednačbe  $y''' = 0$  su sve parabole u ravnini kojima je os simetrije vertikalna (tj. opće rješenje te jednačbe je  $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$ ). Da je bio zadan početni uvjet  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 2$  dobili bismo partikularno rješenje, parabolu  $y = x^2 + 1$ .

Za obične diferencijalne jednačbe 1. reda moguće je naslutiti oblik njihovih integralnih krivulja gledajući u kojim točkama  $(x, y)$  s postižu razne konkretne vrijednosti  $y'$ .

**Primjer 342.** Opišimo familiju integralnih krivulja diferencijalne jednačbe  $y' = x^2 - x - 2$ .

Prvo uočimo da je  $y' = 0$  za  $x = -1$  i  $x = 2$ , dakle sve integralne krivulje u svojim točkama s apscisama  $-1$  i  $2$  imaju horizontalne tangente. Nadalje,  $y' < 0$  za  $-1 < x < 2$ , dakle sve integralne krivulje padaju na intervalu  $\langle -1, 2 \rangle$  (a rastu inače). Štoviše,  $f(x) = x^2 - x - 2$  pada za  $x < \frac{1}{2}$ , a raste za  $x > \frac{1}{2}$ , dakle imamo:

- Za  $x < -1$  integralne krivulje rastu, ali sve sporije slijeva udesno (dakle, konkavno rastu);
- za  $-1 < x < \frac{1}{2}$  integralne krivulje padaju, ali sve strmije (dakle, konkavno padaju);
- za  $-\frac{1}{2} < x < 2$  integralne krivulje padaju, ali sve blaže (dakle, konveksno padaju);
- za  $x > 2$  integralne krivulje rastu i to sve strmije što je veći  $x$  (dakle, konveksno rastu).

Vidimo dakle i da će sve integralne krivulje imati točku lokalnog maksimuma  $-1$  i točku lokalnog minimuma  $2$ .

**Napomena 30.** Strogo matematički, osnovno pitanje oko diferencijalnih jednačbi je pitanje uz koje uvjete postoje njihova rješenja, odnosno kada su jedinstvena. Mi ćemo ovdje podrazumijevati da su za sve razmatrane tipove jednačbi odgovarajući teoremi o postojanju i po potrebi o jedinstvenosti rješenja dokazani. Zainteresirani čitatelj može potrebnu matematičku teoriju naći u svakom standardnom udžbeniku o običnim diferencijalnim jednačbama za studij matematike.



**Ponovimo bitno...** Obične diferencijalne jednačbe su jednačbe koje opisuju nepoznatu funkciju jedne varijable preko veze između varijable,



te funkcije i njenih derivacija. Najviša derivacija koja se u jednadžbi pojavljuje je red diferencijalne jednadžbe. Opće rješenje diferencijalne jednadžbe je njeno rješenje koje sadrži onoliko neodređenih konstanti koliki je red jednadžbe; uvrštavanjem konkretnih vrijednosti za te konstante dobivamo partikularno rješenje. Rješenja koja se ne mogu dobiti kao partikularna zovu se singularna. Ukoliko su uz diferencijalnu jednadžbu zadane vrijednosti nepoznate funkcije i njenih derivacija (do reda za jedan manjeg od reda jednadžbe) u nekoj konkretnoj vrijednosti varijable, kažemo da je jednadžba zadana s početnim uvjetom; početni uvjet omogućuje odabir vrijednosti konstanti u općem rješenju tako da dobijemo partikularno rješenje koje odgovara tom uvjetu. 🐤🐤🐤

## 9.2 Metoda separacije varijabli

Mnoge diferencijalne jednadžbe prvog reda mogu se svesti na oblik

$$y' = f(t) g(y),$$

tj. takav da je derivacija nepoznate funkcije izražena kao umnožak dviju funkcija, jedne koja ovisi samo o nezavisnoj i druge koja ovisi samo o zavisnoj varijabli. Primjerice, jednadžba  $y' = y$  je oblika  $y' = 1 \cdot y$ , tj.  $f(t) = 1$  i  $g(y) = y$ . Takve diferencijalne jednadžbe (**jednadžbe sa separiranim varijablama**) rješavaju se sljedećim postupkom separacije varijabli:

$$\frac{dy}{dt} = f(t) g(y),$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t) dt,$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t) dt.$$

Načelno, svaki od dva integrala u prethodnom koraku sa sobom nosi svoju konstantu integriranja. No, ako je  $G(y) + C_1$  neodređeni integral od  $1/g(y)$ , a  $F(t) + C_2$  neodređeni integral od  $f(t)$ , dobili bismo  $G(y) + C_1 = F(t) + C_2$ , tj.  $G(y) = F(t) + C_2 - C_1$ . Budući da je razlika konstanti konstanta, možemo to kraće pisati kao  $G(y) = F(t) + C_0$ , tj. pri integriranju diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama konstantu integriranja pišemo samo na desnoj strani.

**Primjer 343.** *Riješimo jednadžbu*

$$t y' = y.$$

Separiramo varijable:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}.$$

Integriranje daje

$$\ln |y| = \ln |x| + C_0.$$

Ovo je implicitni oblik rješenja, ali kad god je moguće, rješenje se izražava eksplicitno. Ako na posljednju jednakost djelujemo eksponencijalnom funkcijom s bazom  $e$ , dobivamo

$$|y| = e^{C_0} |x|.$$

Budući da je  $C_0$  (bilo kakva) konstanta,  $e^{C_0}$  je također (pozitivna) konstanta pa ćemo ju nazvati  $C$ :

$$|y| = C |x|.$$

Znamo da je  $|y|$  jednak  $y$  ili  $-y$  i analogno za  $|x|$ , možemo smatrati da je odgovarajuće kombinacija predznaka uključena u konstantu  $C$  te je konačni oblik rješenja

$$y = C x,$$

gdje je  $C$  bilo kakva realna konstanta.

Često je moguće da se jednačba koja nije rješiva separacijom varijabli prikladnom supstitucijom svodi na jednačbu sa separiranim varijablama. Važna podvrsta takvih jednačbi su homogene diferencijalne jednačbe.

### 9.2.1 Homogene diferencijalne jednačbe

**Homogene diferencijalne jednačbe** su diferencijalne jednačbe koje se mogu zapisati u obliku

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right).$$

Ne valja ih miješati s homogenim linearnim jednačbama, o kojima ćemo govoriti u sljedećem odjeljku. Homogene diferencijalne jednačbe rješavaju se supstitucijom

$$u = \frac{y}{t}$$

(„staru” nepoznatu zavisnu varijablu  $y$  zamjenjujemo novom nepoznatom zavisnom varijablom  $u$  iste nezavisne varijable  $t$ ). Dakle,  $u' = \frac{ty' - y}{t^2} = \frac{y'}{t} - \frac{u}{t}$ , iz čega slijedi  $tu' = y' - u$ , tj.

$$y' = tu' + u.$$

Time naša jednađba poprima oblik

$$tu' + u = f(u),$$

a ona se može riješiti separacijom varijabli.

**Primjer 344.** *Jednađba  $ty' = 5t + 2y$  je homogena: dijeljenjem s  $t$  poprima oblik*

$$y' = 5 + 2\frac{y}{t}.$$

*Supstitucija  $u = \frac{y}{t}$  daje  $tu' + u = 5 + 2u$ , tj.  $tu' = 5 + u$ . Separacija varijabli prevodi ju u oblik*

$$\frac{du}{5+u} = \frac{dt}{t}.$$

*Integriranje daje  $\ln|5+u| = \ln|t| + C_0$ , odnosno*

$$5 + \frac{y}{t} = Ct.$$

*Stoga je opće rješenje polazne jednađbe*

$$y = Ct^2 - 5t.$$

### 9.2.2 Jednađbe sa separiranim varijablama u primjenama

Jednađbe sa separiranim varijablama su prilično česte u primjenama. Slijede neki karakteristični primjeri.

Prvi tip primjena su eksponencijalni i logistički procesi. **Eksponencijalni procesi** su procesi u vremenu (biološki, fizikalni, ekonomski, ...) kod kojih je brzina promjene praćene veličine u svakom trenutku razmjerna iznosu te veličine (konstanta proporcionalnosti se obično naziva stopom rasta ili pada). Klasičan primjer eksponencijalnog procesa je radioaktivni raspad.

**Primjer 345.** *Brzina raspadanja radioaktivne tvari, tj. brzina promjene broja  $N$  radioaktivnih čestica u vremenu  $t$ , razmjerna je trenutnoj brojnosti  $N$  radioaktivnih čestica:*

$$\dot{N} = -\lambda N.$$

*Tu je  $\lambda$  je pozitivna konstanta koju nazivamo konstantom raspada. Uočimo da je ovo jednađba koja iskazuje da je funkcija  $N$  svojstveni vektor operatora deriviranja po vremenu za svojstvenu vrijednost koja je suprotna vrijednost konstante raspada. Separacijom varijabli te korištenjem početnog uvjeta  $N(0) = N_0$  dobivamo rješenje*

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t).$$

Kao primjer eksponencijalnog rasta često se navodi i rast populacija u biologiji. No, u stvarnom svijetu neograničeni rast populacija nije moguć, dakle u jednadžbu treba uključiti ograničenje rasta: maksimalni kapacitet okoline dotične populacije (opisan konstantom  $K$ ). Rast populacija u biologiji nije jedini takav proces. Mnogi procesi nisu u cijelom trajanju eksponencijalni, nego započinju kao eksponencijalni da bi se nakon nekog vremena eksponencijalni rast usporio (ili eksponencijalni pad ubrzao) i nastavio prema nekoj stabilnoj vrijednosti (horizontalnoj asimptoti). Takvi procesi nazivaju se logistički. Oni se modeliraju logističkom diferencijalnom jednadžbom. Ona opisuje mnoge procese: ovisnost brojnosti neke biološke populacije o vremenu uz ograničene resurse za preživljavanje, u medicini ovisnost veličine tumora o vremenu, u ekonomiji ovisnost širenja neke inovacije na tržištu, u kemiji ovisnosti koncentracija reaktanata i produkata u autokatalitičkim reakcijama, ... Neka ovisnost veličine  $Y$  o vremenu rastući logistički proces s kapacitetom  $K$  (dakle,  $Y$  ne može postati veći od  $K$ ). Dok je  $Y$  puno manji od  $K$ , rast je eksponencijalan (sa stopom rasta  $r > 0$ ), a što je  $Y$  bliži  $K$ , to se rast više usporava. Odgovarajući graf ovisnosti  $Y$  o  $t$  je stoga rastući s jednom točkom infleksije (u kojoj konveksni rast prelazi u konkavni) i desnom horizontalnom asimptotom  $Y = K$ . Diferencijalna jednadžba eksponencijalnog rastućeg procesa je  $\dot{Y} = rY$ . Nju treba podesiti da dobijemo traženu infleksiju i usporavanje rasta. To se čini tako da desnu stranu pomnožimo s faktorom  $\frac{K-Y}{K} = 1 - \frac{Y}{K}$ . Dok je  $Y$  puno manji od  $K$ , taj faktor iznosi približno 1, odnosno za  $Y$  mnogo manji od  $K$  taj dodatni faktor bitno ne mijenja jednadžbu eksponencijalnog procesa. No,  $\lim_{Y \rightarrow K} \frac{K-Y}{K} = 0$ , dakle kako se  $Y$  približava kapacitetu  $K$  taj faktor postaje blizu nuli, tj. diferencijalna jednadžba se približava obliku  $\dot{Y} = 0$ , odnosno  $Y$  postaje približno konstantan — približava se horizontalnoj asimptoti. **Logistička jednadžba** je dakle jednadžba oblika

$$\dot{Y} = rY \left(1 - \frac{Y}{K}\right)$$

s konstantama  $r, K > 0$ . Kao i jednadžba eksponencijalnog procesa, ona u pravilu dolazi s početnim uvjetom  $Y(0) = Y_0$  (naravno, mora biti  $Y_0 < K$ ). Metodom separacije varijabli dobije se njezino partikularno rješenje

$$Y(t) = \frac{KY_0}{Y_0 + (K - Y_0) \exp(-rt)}.$$

Budući da s porastom  $t$  ( $t \rightarrow +\infty$ )  $\exp(-rt) \rightarrow 0$ , vidimo i da je  $Y = K$  horizontalna asimptota. Nadalje, iz  $\dot{Y} = rY \left(1 - \frac{Y}{K}\right) > 0$  za sve  $t$ , vidimo da je  $Y$  uvijek rastuća funkcija vremena. Deriviranjem logističke jednadžbe

dobivamo

$$\ddot{Y} = r \dot{Y} - \frac{2r Y \dot{Y}}{K} = r^2 Y \left(1 - \frac{Y}{K}\right) \left(1 - \frac{2Y}{K}\right).$$

Od svih tih faktora jedini koji može biti 0 je zadnji, i to ako je  $Y = K/2$  (koji je pripadni  $t$ ?), i tu  $\ddot{Y}$  mijenja predznak, tj. graf od  $Y$  ima točku infleksije s ordinatom  $K/2$ .

**Zadatak 93.** *Podesite logističku jednadžbu za padajuće procese kod kojih  $Y$  ne može pasti ispod nekog iznosa  $K$ .*

Jednadžbe sa separiranim varijablama česte su i u kemijskoj kinetici. U tu svrhu trebamo uvesti nekoliko osnovnih pojmova (za dublje razumijevanje upućujemo na literaturu iz fizikalne kemije): Stehiometrijski koeficijenti (oznaka:  $\nu$ ) reaktanata uzimaju se kao negativni, a oni od produkata pozitivni. Brzina reakcije je definirana s

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu_J} \cdot \frac{d[J]}{dt},$$

gdje je  $J$  proizvoljni sudionik reakcije (dakle, bilo reaktant bilo produkt), a  $[J]$  njegova množinska koncentracija u trenutku  $t$ . Veličina  $x$ , tzv. koncentracija izvedenih pretvorbi, ovisi o vremenu i za nju uvijek vrijedi  $x(0) = 0$ . Integriramo li  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu_J} \cdot \frac{d[J]}{dt}$  po  $t$  od 0 do nekog trenutka  $T$ , dobijemo  $\nu_J x(t) = [J]_T - [J]_0$ , odnosno u svakom trenutku vrijedi

$$(\heartsuit) \quad [J] = [J]_0 + \nu_J \cdot x. \quad (9.1)$$

Formula 9.1 je korisna jer omogućuje određivanje koncentracija svih sudionika  $J$  o vremenu ako je određena ovisnost  $x$  o vremenu. Ona pomaže i za slučaj da je samo određena koncentracija jednog sudionika  $A$  o vremenu jer je u toj formuli  $x$  isti za sve sudionike, pa se može izraziti preko koncentracije od  $A$  i onda uvrstiti u istu takvu formulu za koncentraciju bilo kojeg drugog sudionika  $J$ .

Diferencijalne jednadžbe koje opisuju kinetiku kemijske reakcije proizlaze iz zakona brzine reakcije. To je eksperimentalno potvrđeno pravilo da je u svakom trenutku brzina svake reakcije proporcionalna umnošku nekih fiksnih potencija trenutnih koncentracija svih reaktanata:

$$v = k \cdot [R_1]^{m_1} \cdot [R_2]^{m_2} \cdot \dots,$$

gdje su  $R_1, R_2, \dots$  svi reaktanti u promatranoj reakciji. Zbroj eksponenata koncentracija u zakonu brzine ( $m = \sum m_i$ ) se zove red reakcije, a pojedinačni

eksponenti  $m_i$  se zovu parcijalni redovi reakcije s obzirom na reaktante  $R_i$ . Konstanta proporcionalnosti  $k > 0$  (ovisna o temperaturi, ali konstantna s obzirom na vrijeme) zove se koeficijent brzine reakcije. Uvrstimo li na lijevu stranu zakona brzine definiciju brzine reakcije i iskoristimo formulu 9.1 dobivamo **diferencijalni oblik zakona brzine reakcije**:

$$\frac{dx}{dt} = k([R_1]_0 + \nu_{R_1} \cdot x)^{m_1}([R_2]_0 + \nu_{R_2} \cdot x)^{m_2} \dots$$

Uočimo da je neovisno o redu reakcije ovo uvijek diferencijalna jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama. Njezino rješenje naziva se **integriranim oblikom zakona brzine reakcije**.

**Primjer 346.** Promotrimo reakcije na čiju brzinu utječe samo jedan reaktant R. Zakon brzine reakcije tada je

$$v = k[R]^m.$$

Iz definicije brzine reakcije dobijemo diferencijalni oblik zakona brzine

$$\frac{1}{\nu_R} \frac{d[R]}{dt} = k[R]^m.$$

Za  $m = 1$  ovo je eksponencijalni proces, a za  $m = 0$  brzina je neovisna o trenutnim koncentracijama sudionika.

Odredite odgovarajući integrirani oblik za sve prirodne brojeve  $m$ . Za  $m = 0, 1$  i  $2$  skicirajte graf ovisnosti koncentracije bilo kojeg reaktanta ili produkta o vremenu.

**Zadatak 94.** Neka reakcija stehiometrije  $A + 2B \longrightarrow C$  je prvog reda ( $m = 1$ ) i brzina  $v$  joj u svakom trenutku ovisi samo o trenutnoj koncentraciji reaktanta A. Početne koncentracije od A i B su jednake. Nakon koliko vremena će koncentracija od A pasti na pola početne koncentracije? Ovisi li to vrijeme o početnoj koncentraciji od A? Kolika će u tom trenutku biti koncentracija od B?

**Zadatak 95.** Reakcija stehiometrije  $A + 3B \longrightarrow 2C$  je drugog reda ( $m = 2$ ) s ima parcijalnim redovima 1 ( $m_1 = m_2 = 1$ ) s obzirom na oba reaktanta kojima su poznate početna koncentracije. Skicirajte ovisnost koncentracije produkta C o vremenu.



**Ponovimo bitno...** Separacijom varijabli možemo riješiti one diferencijalne jednadžbe prvog reda koje se mogu zapisati u obliku u kojem su

svi članovi s nepoznatom funkcijom na jednoj, a svi članovi s njenom varijablom na drugoj strani jednakosti. U tom slučaju za dobivanje općeg rješenja potrebno je integrirati obje strane jednadžbe.

Homogene diferencijalne jednadžbe su prvog reda koje se mogu svesti na oblik u kojem je derivacija nepoznate funkcije  $y$  izjednačena s izrazom koji se može zapisati kao funkcija od  $u$  gdje je  $u = y/t$  ( $t$  je varijabla nepoznate funkcije  $y$ ). Supstitucijom  $u = y/t$  one se svode na oblik rješiv separacijom varijabli. 

## 9.3 Linearne diferencijalne jednadžbe

### 9.3.1 Linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda

Jedna važna i korisna klasa običnih diferencijalnih jednadžbi su linearne diferencijalne jednadžbe, pri čemu su u primjenama najčešće one prvog i drugog reda.

**Definicija 74** (Linearna diferencijalna jednadžba 1. reda). *Linearna diferencijalna jednadžba 1. reda je obična diferencijalna jednadžba koja se može zapisati u obliku*

$$y' + a(t)y = b(t).$$

Ako je  $b$  nulfunkcija, govorimo o homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi prvog reda.

Homogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda (takva je bila npr. jednadžba eksponencijsalnog procesa) se rješava separacijom varijabli:

$$y' + a y = 0$$

je ekvivalentno s

$$\frac{dy}{y} = -a(t) dt,$$

pa integriranje daje  $\ln |y| = -\int a(t) dt$ , odnosno

$$|y(t)| = \exp\left(-\int a(t) dt\right).$$

Za rješavanje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda  $y' + a(t)y = b(t)$  koristimo **metodu varijacije konstante**. Metoda varijacije konstante ima dva koraka:

1. Riješimo pripadnu homogenu jednadžbu  $y' + a(t)y = 0$ . Njezino opće rješenje  $y_H$  sadrži jednu neodređenu konstantu  $C$ .

2. Pretpostavimo da je opće rješenje  $y$  polazne nehomogene jednadžbe istog oblika kao  $y_H$ , ali s  $C$  funkcijom nezavisne varijable  $t$  („variramo konstantu“) te taj pretpostavljeni oblik rješenja deriviramo i uvrstimo u polaznu jednadžbu. Time dobivamo eksplicitni izraz za  $C'(t)$  te se  $C(t)$  može dobiti integriranjem.

**Primjer 347.** *Sjetimo se pečene patke iz primjera 82. Temperatura patke koja se peče u pećnici opisana je diferencijalnom jednadžbom oblika*

$$\dot{\vartheta} = k(200^\circ\text{C} - \vartheta)$$

koja potječe iz Newtonovog zakona hlađenja. Tu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\dot{\vartheta} + k\vartheta = k 200^\circ\text{C}$$

iz kojeg vidimo da se radi o nehomogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Pripadna homogena jednadžba je

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -k dt$$

čije rješenje  $\vartheta_H = C \exp(-kt)$  dobijemo separacijom varijabli. Stoga za metodu varijacije konstante pretpostavljamo da je rješenje polazne jednadžbe oblika

$$\vartheta(t) = C(t) \exp(-kt).$$

Deriviramo po  $t$ :  $\dot{\vartheta} = \dot{C}(t) \exp(-kt) - kC(t) \exp(-kt)$ . Uvrstimo  $\vartheta$  i  $\dot{\vartheta}$  u polaznu jednadžbu:

$$C'(t) \exp(-kt) - kC(t) \exp(-kt) + kC(t) \exp(-kt) = k \cdot 200^\circ\text{C},$$

odnosno  $C'(t) = k 200^\circ\text{C} \exp(kt)$  što integriranjem po  $t$  daje

$$C(t) = 200^\circ\text{C} \exp(kt) + C_1.$$

Stoga je opće rješenje naše jednadžbe

$$\vartheta(t) = (200^\circ\text{C} \exp(kt) + C_1) \exp(-kt) = 200^\circ\text{C} + C_1 \exp(-kt).$$

Linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda pojavljuju se i u tzv. zadacima miješanja. U takvim se zadacima podrazumijeva da su sve otopine u svakom trenutku homogene, a brzina promjene količine otopljene tvari (mase, množine, ...) jednaka je razlici brzina ulijevanja i izlivanja (mase, množine, ...).



**Primjer 348.** U cisternu obujma 1000 L ulijeva se i iz nje izlijeva vodena otopina neke tvari. Na početku je u cisterni 800 L vode u kojoj je otopljeno 20 g te tvari. Otopina s masenom koncentracijom spomenute tvari od 50 g/L ulijeva se brzinom 3 L/h. Otopina se iz cisterne izlijeva brzinom 2 L/h. Hoće li prije masa otopljene tvari u cisterni dosegnuti 5 kg ili će se prvo cisterna napuniti?

Prvo, budući da u 1 satu u cisternu dodatno uđu 3, a izađu 2 litre tekućine, slijedi da je  $V(t) = V_0 + (\dot{V}_U - \dot{V}_I) \cdot t = (800 + t \text{ h}^{-1}) \text{ L}$ . Budći da cisterna ima kapacitet 1000 L, proces miješanja će trajati najdulje do vremena  $t$  kad je  $800 + t \text{ h}^{-1} = 1000$ , tj. cisterna će se napuniti za 200 h.

Drugo, u opisanoj situaciji je količina otopljene tvari u cisterni očito opisana njezinom masom  $m = m(t)$ . Kao što je gore rečeno, brzina promjene mase, tj.  $\dot{m}$ , jednaka je razlici brzina ulijevanja ( $\dot{m}_U$ , tj. promjena mase otopljene tvari u vremenu pri ulijevanju) i izlijevanja ( $\dot{m}_I$ , tj. promjena mase otopljene tvari u vremenu pri izlijevanju):

$$\dot{m} = \dot{m}_U - \dot{m}_I \quad (9.2)$$

Brzina ulijevanja je opisana time da u cisternu ulaze  $\dot{V}_U = 3 \text{ L/h}$  otopine masene koncentracije  $\gamma_U = 50 \text{ g/L}$ , dakle je  $\dot{m}_U = \dot{V}_U \gamma_U = 150 \frac{\text{g}}{\text{h}}$ . Slično,  $\dot{m}_I = \dot{V}_I \gamma_I = 2 \frac{\text{L}}{\text{h}} \cdot \frac{m(t)}{V(t)}$ , gdje je  $V(t)$  trenutni volumen otopine u cisterni.

Uvrstimo li  $\dot{m}_U$  i  $\dot{m}_I$  u jednadžbu (9.2) dobijemo da je situacija opisana diferencijalnom jednadžbom

$$\dot{m} = 150 \frac{\text{g}}{\text{h}} - \frac{2m}{800 \text{ h} + t}$$

s početnim uvjetom  $m(0) = 20 \text{ g}$ . Pripadna homogena jednadžba je  $\dot{m} + \frac{2}{800 \text{ h} + t} m = 0$  s rješenjem  $m_H(t) = \frac{C}{(800 \text{ h} + t)^2}$ . Za  $C = C(t)$  se metodom varijacije konstante dobije  $C(t) = 50 \frac{\text{g}}{\text{h}} (800 \text{ h} + t)^3 + C_1$ , dakle je

$$m(t) = 50 \frac{\text{g}}{\text{h}} (800 \text{ h} + t) + \frac{C_1}{(800 \text{ h} + t)^2}.$$

Početni uvjet povlači  $C_1 = -2,55872 \cdot 10^{10} \text{ g h}^2$ , tj. ovisnost mase otopljene tvari u cisterni o vremenu je

$$m(t) = 50 \frac{\text{g}}{\text{h}} (800 \text{ h} + t) - \frac{2,55872 \cdot 10^{10} \text{ g}}{(800 + t/\text{h})^2}.$$

Ako bismo uvrstili uvjet  $m(t) = 5000 \text{ g}$ , dobili bismo kubnu jednadžbu koju ne znamo egzaktno riješiti. Korištenjem nekog programa za aproksimativno

(tzv. numeričko) rješavanje jednadžbi, primjerice <https://www.wolframalpha.com/>, vidjeli bismo da se ta masa postiže za približno 34,628 sati, tj. masa otopljene tvari će dosegnuti 5 kg prije nego se cisterna napuni. Kako bismo to mogli pokazati bez korištenja programa za aproksimativno rješavanje jednadžbi? Jednostavno: Rješenje možemo modelirati racionalnom funkcijom  $y(t) = 50 \cdot (800 + x) - \frac{255872 \cdot 10^{10}}{(800+x)^2}$  na intervalu  $I = [0, 200]$ . Njena derivacija je  $y' = 50 + \frac{51174400000}{(800+x)^3}$ , koja je na  $I$  pozitivna, dakle je  $y$  rastuća. Iznos  $y(200) = 24412,8$  je masa (u gramima) otopljene tvari nakon 200 sati pa budući da je  $y$  rastuća masa otopljene tvari raste od početnih 20 g do 24412,8 g, dakle se masa od 5 kg postiže prije nego se cisterna napuni.

**Primjer 349.** RL-strujni krug s jednim otpornikom otpora  $R$  i jednom zavojnicom induktiviteta  $L$  te baterije elektromotorne sile  $E$  opisan je (temeljem drugog Kirchhoffovog zakona) nehomogenom linearnom diferencijalnom jednadžbom 1. reda:

$$L \dot{I} + R I = E.$$

**Primjer 350.** Objekt mase  $m$  izbačen je iz helikoptera. Potrebno je odrediti njegovu brzinu  $u$  proizvoljnom trenutku ako se pretpostavi da je u svakom trenutku otpor zraka proporcionalan trenutnoj brzini. Drugi Newtonov zakon povlači da je odgovarajući model nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda:

$$m \dot{v} = m g - k v.$$

Poopćenjem gornje ideje na slučaj kad otpor zraka (ili sila trenja) nisu proporcionalne trenutnoj brzini, nego nekoj njezinoj potenciji, dobiva se **Bernoullijeva diferencijalna jednadžba**.

$$y' + a(t)y = b(t)y^\alpha$$

(s  $\alpha \neq 0, 1$ ). Bernoullijeva se jednadžba rješava supstitucijom

$$v(t) = y(t)^{1-\alpha},$$

koja povlači da je  $v' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$  te izvorni oblik jednadžbe svodi na linearnu:

$$v' + (1 - \alpha) a(t) v = (1 - \alpha) b(t).$$

**Primjer 351.** Riješimo Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu

$$y' + \frac{4y}{t} = t^3 y^2$$

s početnim uvjetom  $y(2) = -1$ , za pozitivne  $t$ . Supstituiramo  $v = y^{-1}$ , dakle je  $v' = -y^{-2}y'$ , odnosno  $y = v^{-1}$  i  $y' = -y^2v' = -v^{-2}v'$ , pa dobivamo  $-v^{-2}v' + 4v^{-1}t^{-1} = t^3v^{-2}$ , odnosno

$$v' - \frac{4}{t}v = t^3.$$

Metodom varijacije konstante dobivamo

$$v(t) = (\ln t + C_1)t^4,$$

dakle je

$$y(t) = \frac{1}{(\ln t + C_1)t^4}.$$

Uvrštavanje početnog uvjeta (za  $t = 2$  je  $y = -1$ ) daje traženo partikularno rješenje

$$y(t) = \frac{1}{(\ln \frac{t}{2} + \frac{1}{16})t^4}.$$

Ono je definirano ako je  $\ln \frac{t}{2} \neq -\frac{1}{16}$ , odnosno  $t \neq T = 2 \exp(-1/16) \approx 1,88$ . Kako gledamo samo pozitivne  $t$ , imamo dva intervala za naše rješenje:  $\langle 0, T \rangle$  i  $\langle T, +\infty \rangle$ . Ono što nismo istakli u ranijim definicijama, kako bi ovo poglavlje bilo što jednostavnije za pratiti, ipak spominjemo sada: Rješenja diferencijalnih jednadžbi definiraju se ne na prirodnim domenama, nego na pojedinim intervalima (onima koji sadrže  $t_0$  ako je početni uvjet zadan u  $t_0$ ). Kako je naš  $t_0 = 2 \in \langle T, +\infty \rangle$  zaključujemo: Funkcija  $y(t) = \frac{1}{(\ln \frac{t}{2} + \frac{1}{16})t^4}$  je rješenje Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe  $y' + \frac{4y}{t} = t^3y^2$  s početnim uvjetom  $y(2) = -1$  na intervalu  $\langle 2 \exp(-1/16), +\infty \rangle$ .

### 9.3.2 Linearne diferencijalne jednadžbe višeg reda

Posvetimo se sad linearnim diferencijalnim jednadžbama viših redova.

**Definicija 75.** Linearna diferencijalna jednadžba reda  $n$  je diferencijalna jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t). \quad (9.3)$$

Ako je  $b$  nulfunkcija, govorimo o homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi. U slučaju nehomogene jednadžbe, jednadžbu koja se dobije zamjenom  $b$  s nulfunkcijom zovemo pripadnom homogenom jednadžbom. Ako su sve funkcije  $a_{n-1}, \dots, a_0$  konstantne, govorimo o linearnoj diferencijalnoj jednadžbi s konstantnim koeficijentima (homogenoj ili nehomogenoj).

**Primjer 352.** *Jednadžba  $y' - y \cos t = 2$  je nehomogena linearna diferencijalna jednadžba prvog reda. Takve jednadžbe smo naučili rješavati u prethodnom odjeljku.*

*Jednadžba  $y' y'' = y$  je nelinearna diferencijalna jednadžba drugog reda.*

*Jednadžba  $y''' - 3y' = 2 \exp(t) - t$  je nehomogena linearna diferencijalna jednadžba trećeg reda s konstantnim koeficijentima.*

*Jednadžba  $y'' + t y = y' \sin t$  je homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda (s nekonstantnim koeficijentima).*

*Jednadžba  $4y'' = 5y'$  je homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima.*

Pogledajmo primjer 347. Tamo smo kao opće rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe dobili funkciju  $\theta$ , koju ako malo bolje pogledamo njegov oblik i postupak kojim smo ju dobili možemo zapisati kao zbroj općeg rješenja pripadne homogene jednadžbe i jednog partikularnog rješenja polazne jednadžbe ( $\theta(t) = 200^\circ\text{C}$ ). Također, iz zadatka 70 znamo da je skup svih rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda uvijek vektorski prostor. Lako je primijetiti da smo ekvivalentne rezultate imali i za sustave linearnih jednadžbi (teorem 36 i korolar 5). To nije slučajno. Može se naime dokazati da vrijedi:

**Teorem 48.** *Opće rješenje svake linearne diferencijalne jednadžbe uvijek je oblika*

$$y_H + y_P,$$

*gdje je  $y_P$  jedno partikularno rješenje zadane jednadžbe, a  $y_H$  je opće rješenje pripadne homogene jednadžbe.*

Nije teško pokazati da iz linearnosti deriviranja slijedi sljedeći teorem (dokaz da se stvarno radi o vektorskom prostoru prepuštamo za vježbu, dokaz o jednakosti dimenzije i reda jednadžbe je nešto teži):

**Teorem 49.** *Skup svih rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe  $n$ -tog reda je  $n$ -dimenzionalni vektorski prostor.*

To specijalno znači da postoji za prostor rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe  $n$ -tog reda uvijek postoji baza, odnosno da se svako njezino opće rješenje može zapisati kao linearna kombinacija nekih njezinih  $n$  linearno nezavisnih rješenja. Baza prostora rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe naziva se **fundamentalnim skupom rješenja**. Ako imamo nekih  $n$  funkcija, lako je provjeriti jesu li one rješenja jednadžbe, no kako provjeriti njihovu linearnu nezavisnost ako želimo vidjeti radi li se o fundamentalnom skupu rješenja? Ako je  $n = 2$  to je lagano — dva vektora su

linearno nezavisna čim nisu proporcionalni, dakle dvije funkcije su linearno nezavisne čim jednu ne možemo dobiti kao drugu pomnoženu s konstatom. Za  $n > 2$  se za provjeru linearne nezavisnosti funkcija  $y_1, \dots, y_n$  koristi **Wronskijan** (determinanta Wronskoga):

$$W(y_1, \dots, y_n)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ y_1''(t) & \dots & y_n''(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Ako  $W(y_1, \dots, y_n)$  nije nulfunkcija, onda su  $y_1, \dots, y_n$  sigurno linearno nezavisne (no ako je  $W(y_1, \dots, y_n) = 0$ , to ne mora značiti njihovu zavisnost).

**Zadatak 96.** *Pokažite da su funkcije  $\sin$ ,  $\ln$  i  $\exp$  linearno nezavisne.*

Zbog teorema 48 je generalna strategija pri rješavanju nehomogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi prvo odrediti opće rješenje pripadne homogene jednadžbe, a onda odrediti jedno partikularno rješenje zadane jednadžbe. Kad određujemo opće rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe, zbog teorema 49 potrebno je odrediti fundamentalni skup rješenja pripadne homogene jednadžbe, tj. naći  $n$  linearno nezavisnih partikularnih rješenja homogene jednadžbe, a njihova linearna kombinacija dat će opće rješenje. Za jednadžbe s nekonstantnim koeficijentima to nije jednostavno te se u nastavku ograničavamo na linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima.

### Rješavanje homogene linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Cilj nam je dakle riješiti jednadžbe oblika

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (9.4)$$

s  $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ , tj. naći jednu bazu  $\mathcal{F} = (y_1, \dots, y_n)$  prostora njenih rješenja. Tada će opće rješenje jednadžbe 9.4 biti

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n. \quad (9.5)$$

Dakle, tražimo postupak za određivanje  $\mathcal{F}$ . U tu svrhu pretpostavimo da je jedno rješenje jednadžbe 9.4 oblika  $y(t) = \exp(\lambda t)$  za neku konstantu  $\lambda$ . Deriviranjem dobijemo  $y'(t) = \lambda \exp(\lambda t)$ ,  $y''(t) = \lambda^2 \exp(\lambda t)$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n)}(t) = \lambda^n \exp(\lambda t)$ . Uvrstimo li  $y, y', \dots, y^{(n)}$  u jednadžbu 9.4 dobijemo

$$\lambda^n \exp(\lambda t) + \dots + a_2 \lambda^2 \exp(\lambda t) + a_1 \lambda \exp(\lambda t) + a_0 \exp(\lambda t) = 0.$$

Dijeljenjem s  $\exp(\lambda t) \neq 0$  dobijemo

$$\lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (9.6)$$

**Primjer 353.** *Kvantnomehanički opis krutog rotora u ravnini, koji se u kemiji koristi primjerice za opis rotacije planarne molekule, ima oblik*

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{d^2\psi}{d\theta^2} = E \psi,$$

gdje je  $I$  moment inercije sustava,  $E$  kinetička energija rotacije, a  $\theta$  (varijabla valne funkcije  $\psi$ ) opisuje orijentaciju rotora u odnosu na koordinatni sustav. Uvrstimo li  $\psi(\theta) = C \exp(ia\theta)$  u jednadžbu (uz  $a^2 = 2IE/\hbar^2$ ), vidimo da ju zadovoljava. Da bi to rješenje imalo fizički smisao (tj. da stvarno opisuje rotaciju u ravnini), ono mora biti periodično s periodom  $2\pi$ . Iz toga je lako dobiti uvjet da  $2\pi a$  mora biti višekratnik od  $2\pi$ , tj.  $a = n \in \mathbb{Z}$ . Stoga su fizikalno smisljena rješenja naše jednadžbe

$$\psi_n(\theta) = C e^{in\theta}$$

gdje je  $n \in \mathbb{Z}$  „kvantni broj”, a odgovarajući iznosi energija su  $E_n = \hbar^2 n^2 / (2I)$ .

**Definicija 76 (Karakteristična jednadžba).** *Za diferencijalnu jednadžbu 9.4 se polinomijalna jednadžba 9.6 naziva njezinom karakterističnom jednadžbom.*

Dakle, ako postoji rješenje jednadžbe 9.4 koje je oblika  $y(t) = \exp(\lambda t)$  (eksponencijalna funkcija s bazom  $a = e^\lambda$ ), onda je  $\lambda$  rješenje karakteristične jednadžbe 9.6.

Naziv karakteristična jednadžba ovdje nije slučajno isti kao za karakterističnu jednadžbu za određivanje spektra linearnog operatora. Objasniti ćemo to na primjeru homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda.

**Primjer 354.** *Pogledajmo diferencijalnu jednadžbu*

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Uvedimo novu nepoznatu funkciju  $z$  (iste nezavisne varijable  $t$ ) definiranu sa  $z = y'$  (primjerice, ako je  $y$  ovisnost puta o vremenu,  $z$  je ovisnost brzine o vremenu). Tada je  $z' = y'' = -a_1 y' - a_0 y = -a_1 z - a_0 y$ , tj. dobili smo *homogeni sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda s konstantnim koeficijentima:*

$$y' = 0 \cdot y + 1 \cdot z$$

$$z' = -a_0 y - a_1 z.$$

Kraće taj sustav možemo zapisati u matričnom obliku:

$$Y' = A \cdot Y.$$

Pritom je  $Y = (y, z)^t$ , a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Karakteristična jednadžba matrice  $A$  je

$$(-\lambda)(-a_1 - \lambda) + a_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

tj. točno karakteristična jednadžba polazne diferencijalne jednadžbe  $y'' + a_1y' + a_0y = 0$ .

Kao u primjeru, tako i općenito vrijedi:

**Teorem 50.** Svaka homogena linearna diferencijalna jednadžba reda  $n$  ekvivalentna je homogenom sustavu linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda, koji se u matričnom obliku može zapisati kao  $Y' = AY$ , gdje je  $Y = (y \ y' \ \dots \ y^{(n-1)})^t$ . Pritom je karakteristična jednadžba polazne homogene linearne diferencijalne jednadžbe reda  $n$  s konstantnim koeficijentima jednaka karakterističnoj jednadžbi matrice  $A$ , dakle su njezina rješenja svojstvene vrijednosti od  $A$ .

Više o vezi sustava linearnih diferencijalnih jednadžbi i svojstvenih vrijednosti ćemo reći kasnije, u odjeljku ???. Vratimo se sad rješavanju homogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Vidjeli smo da je prvi korak u određivanju fundamentalnog skupa rješenja jednadžbe 9.4 rješavanje pripadne karakteristične jednadžbe 9.6. Ona je polinomijalna jednadžba stupnja  $n$  te ima najviše  $n$  različitih realnih rješenja (odnosno, ima točno  $n$  kompleksnih rješenja ako im se računaju kratnosti, vidi str. 54). S obzirom na to da se pomoću Wronskijana lako može provjeriti da su eksponencijalne funkcije s različitim bazama uvijek linearno nezavisne (usp. i primjer ??), vidimo: Ako karakteristična jednadžba 9.6 ima  $n$  različitih realnih rješenja  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , onda je fundamentalni skup rješenja jednadžbe 9.4 dan s  $y_1 = \exp(\lambda_1 t), \dots, y_n = \exp(\lambda_n t)$  (eksponencijalne funkcije s bazama  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ ). No, nakon primjera ćemo vidjeti da i u ostalim slučajevima nije teško opisati konstrukciju fundamentalnog skupa iz rješenja karakteristične jednadžbe.

**Primjer 355.** Riješimo jednadžbu

$$y''' - 4y'' - 4y' + 4 = 0.$$

. Pripadna karakteristična jednadžba je

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Lijevo stranu je lako faktorizirati:  $\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^3 - 4\lambda - 4\lambda^2 + 4 = \lambda(\lambda^2 - 1) - 4(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ . Stoga su rješenja karakteristične jednadžbe (koja je stupnja 3) tri različita realna broja 4, 1 i  $-1$ , te je opće rješenje polazne jednadžbe

$$y(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^t + C_3 e^{-t}.$$

Slučaj je kad nisu sva rješenja karakteristične jednadžbe različita, ili kad ima i kompleksnih među njima, detaljno ćemo razmotriti samo za slučaj  $n = 2$ . U tom slučaju karakteristična jednadžba 9.6 je kvadratna. Ako ona nema dva različita realna rješenja  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , onda ona ili ima jedno dvostruko realno rješenje  $\lambda_1 = \lambda_2$  (kad je diskriminanta 0) ili ima dva konjugirano kompleksna rješenja (kad je diskriminanta negativna).

Pogledajmo prvo slučaj kad karakteristična jednadžba ima jedno dvostruko rješenje. Budući da je svaki vektor zavisan sam sa sobom, ne možemo uz  $y_1(t) = \exp(\lambda_1 t)$  uzeti i  $y_2(t) = \exp(\lambda_1 t)$ .<sup>1</sup> Da bismo dobili  $y_2$  nezavisan s  $y_1$ , množimo ga s  $t$ :  $y_2(t) = t \exp(\lambda_1 t)$ . Sad su  $y_1$  i  $y_2$  očito nezavisne i lako se provjeri da je i  $y_2$  rješenje jednadžbe 9.4, dakle smo dobili fundamentalni skup rješenja i opće rješenje je linearna kombinacija od  $y_1$  i  $y_2$ .

**Primjer 356.** Riješimo jednadžbu

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Njezina karakteristična jednadžba je  $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$  i ona ima jedno dvostruko rješenje  $-2$ . Stoga je  $y_1(t) = \exp(-2t)$ , a  $y_2(t) = t \exp(-2t)$ , odnosno opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe je

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}.$$

Ako pak karakteristična jednadžba (i dalje smo u slučaju  $n = 2$ ) ima dva različita konjugirano kompleksna rješenja  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , problem nije u nezavisnosti funkcija  $y_1(t) = \exp(\lambda_1 t)$  i  $y_2(t) = \exp(\lambda_2 t)$ , nego u tome što bi one bile kompleksne, a rješavajući jednadžbu 9.4 tražimo realne funkcije. Kako odvojiti realni dio tih funkcija? Uvrstimo  $y_1$  i  $y_2$  u formulu za opće rješenje i raspišemo  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ :

$$y(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t) = \exp(\alpha t)(c_1 \exp(i\beta t) + c_2 \exp(-i\beta t)) =$$

<sup>1</sup>Za  $n > 2$ , u slučaju da je  $\lambda_i$  realno rješenje kratnosti  $k$ , ono definira  $k$  funkcija u fundamentalnom skupu:  $\exp(\lambda_i t)$ ,  $t \exp(\lambda_i t)$ ,  $\dots$ ,  $t^{k-1} \exp(\lambda_i t)$ .



$$= e^{\alpha t} ((c_1 + c_2) \cos(\beta t) + i(c_1 - c_2) \sin(\beta t)) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)).$$

Naime, za svaka dva (realna) broja  $C_1$  i  $C_2$  uvijek je moguće jednoznačno riješiti (u  $\mathbb{C}$ ) sustav  $c_1 + c_2 = C_1$ ,  $ic_1 - ic_2 = C_2$  (determinanta matrice koeficijenata tog sustava je  $-2i \neq 0$  pa se radi o Cramerovom sustavu). Stoga je traženo realno opće rješenje jednadžbe 9.4 za slučaj  $n = 2$  dano s

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$$

za slučaj kad karakteristična jednadžba nema realnih rješenja.<sup>2</sup>

**Primjer 357.** *Riješimo jednadžbu*

$$3y'' + 2y' + y = 0.$$

*Pripadna karakteristična jednadžba je  $3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ , dakle je*

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} i,$$

*odnosno imamo  $\alpha = -\frac{1}{3}$  i  $\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$  te je opće rješenje naše jednadžbe*

$$y(t) = e^{-t/3} \left( C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}t\right) \right).$$

### Harmonijski oscilator

Linearne diferencijalne jednadžbe modeli su mnogih fizikalnih pojava, među kojima se posebice ističe harmonijski oscilator. Harmonijski oscilator je fizički sustav koji se sastoji od objekta koji periodički titra oko ravnotežnog položaja. Ekvivalentno, radi se o objektu koji oscilira oko ravnotežnog položaja pod utjecajem sile koja je po iznosu proporcionalna odmaku iz ravnotežnog položaja. Ovdje ćemo se baviti samo jednodimenzionalnim slučajem, u kojem je za opis položaja tijela dovoljna jedna koordinata  $x$  ovisna o vremenu  $t$  (inače bi model bila parcijalna diferencijalna jednadžba). Kao ravnotežni položaj uzimamo poziciju 0. Po definiciji ovdje na objekt mase  $m$  na poziciji  $x(t)$  djeluje sila  $F(t) = -kx(t)$ , gdje je  $k > 0$  konstanta (za titranje na opruzi, to je konstanta opruge, a gornji izraz je Hookeov zakon). Drugi Newtonov zakon ( $F(t) = m\ddot{x}$ ) daje nam odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

---

<sup>2</sup>Za  $n > 2$ , svaki par kompleksno konjugiranih rješenja karakteristične jednadžbe doprinosi ukupnom općem rješenju funkcijom istog oblika.

Vidimo dakle da je osnovni model harmonijskog oscilatora homogena linearna diferencijalna jednačba 2. reda s konstantnim koeficijentima. Odgovarajuća karakteristična jednačba je  $m\lambda^2 + k = 0$ , a njena rješenja su

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Vidimo da se radi o slučaju s dva konjugirano kompleksna rješenja karakteristične jednačbe, pa je ovisnost pozicije o vremenu za harmonijski oscilator dana s

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

uz oznaku  $\omega = \sqrt{k/m}$  (kutna frekvencija). Gornji oblik se može svesti na oblik  $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$ , u kom je  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  amplituda titranja, a  $\delta$  je fazni pomak ( $\tan \delta = C_2/C_1$ ). Vidimo da definicija harmonijskog oscilatora preko sile stvarno povlači periodičke oscilacije (s temeljnim periodom  $2\pi/\omega$ ).

Budući da se ovdje radi o fizikalnom problemu, uobičajeno je zadavanje početnog uvjeta

$$x(0 \text{ s}) = x_0, \quad x'(0 \text{ s}) = v_0.$$

Deriviranjem  $x(t)$  dobivamo  $x'(t) = -C_1\omega \sin(\omega t) + C_2\omega \cos(\omega t)$  pa uvrštavanje početnih uvjeta daje  $C_1 = x_0$  i  $C_2\omega = v_0$ . Stoga je partikularno rješenje za jednodimenzionalni harmonijski oscilator s početnim odmakom  $x_0$  od ravnotežnog položaja i početnom brzinom  $v_0$  dano formulom

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Dodamo li na temeljni harmonijski oscilator efekt trenja, to znači da na objekt uz silu  $-kx(t)$  djeluje i sila trenja  $-fv(t) = -f\dot{x}(t)$  (gdje je  $f > 0$  konstanta trenja). Sad drugi Newtonov zakon daje diferencijalnu jednačbu

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0.$$

Vidimo da je model harmonijskog oscilatora s trenjem i dalje homogena linearna diferencijalna jednačba 2. reda s konstantnim koeficijentima. Odgovarajuća karakteristična jednačba je

$$m\lambda^2 + f\lambda + k = 0.$$

Za razliku od „čistog” harmonijskog oscilatora, sad karakteristična jednačba ne mora uvijek imati kompleksna rješenja. Označimo njezinu diskriminantu s  $\Delta$ , tj.  $\Delta = f^2 - 4mk$ . Imamo tri slučaja:

- Za  $\Delta > 0$  (tj. za  $f > 2\sqrt{mk}$ )

$$\lambda_{1,2} = \frac{-f \pm \sqrt{\Delta}}{2m} < 0$$

(jer je  $-f - \sqrt{f^2} < -f + \sqrt{f^2 - 4mk} < -f + \sqrt{f^2} = 0$ ) pa je opće rješenje u ovom slučaju

$$x(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)$$

linearna kombinacija dvije padajuće eksponencijalne funkcije. Stoga ono ima  $t$ -os kao horizontalnu asimptotu i nema titranja.

- Za  $\Delta = 0$ , tj. za  $f = 2\sqrt{mk}$  dobivamo jedno dvostruko realno rješenje  $\lambda = -\frac{f}{2m} < 0$  pa je

$$x(t) = C_1 \exp(\lambda t) + C_2 t \exp(\lambda t).$$

Budući da padajuća eksponencijalna funkcija pada brže od ikojeg polinoma (formula 4.5), ovo rješenje također ima  $t$ -os za horizontalnu asimptotu i također nema titranja.

- Za  $\Delta < 0$ , tj. za  $f < 2\sqrt{mk}$ ,  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , uz  $\alpha = -\frac{f}{2m} < 0$  i  $\beta = \frac{\sqrt{4mk - f^2}}{2m}$  pa je

$$x(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)),$$

tj. rješenje je umnožak padajuće eksponencijalne funkcije i sinusoidalne periodičke funkcije tipa  $A \cos(\omega t + \delta)$ . Budući da je potonja ograničena, opet je  $t$ -os horizontalna asimptota, ali u ovom slučaju imamo titranje i govorimo o prigušenim oscilacijama.

Vidimo dakle da kod harmonijskog oscilatora s trenjem do oscilacija dolazi samo uz dovoljno mali koeficijent trenja ( $f < 2\sqrt{mk}$ ), a neovisno o tome uz trenje uvijek imamo efekt gušenja, odnosno s vremenom se odmak od ravnotežnog položaja smanjuje prema nuli.

Uz gore opisani model tzv. klasičnog harmonijskog oscilatora za fiziku i kemiju bitan je i kvantnoteorijski model harmonijskog oscilatora. Kvantna verzija kinetičke energije jednodimenzijskog gibanja je linearni operator

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2},$$

a potencijalne energije operator  $\hat{V} = V(x) \cdot$ , gdje je  $V(x) = \frac{k}{2}x^2$ . Ukupnu energiju sad modelira Hamiltonijan  $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ . Svi ti operatori djeluju na valne funkcije  $\psi$  (čija nezavisna varijabla je pozicija  $x$ ):

$$\hat{H}\psi = (\hat{T} + \hat{V})\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{k}{2}x^2\psi(x).$$

To po Schrödingerovoj jednadžbi mora biti jednako  $E\psi$  ( $E$  je energija, tj. svojstvena vrijednost Hamiltonijana), tj. jednadžba kvantnomehaničkog (jednodimenzionalnog) harmonijskog oscilatora je

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \left(\frac{k}{2}x^2 - E\right)\psi = 0. \quad (9.7)$$

I ova je diferencijalna jednadžba homogena, linearna i drugog reda, ali više nema konstantne koeficijente (koeficijent uz  $\psi$  ovisi o njezinoj varijabli  $x$ ). Stoga nju više ne možemo rješavati preko karakteristične jednadžbe.

**Napomena 31.** *Test-rješenje za jednadžbu 9.7  $\psi(x) = \exp(-ax^2)$ . Ako tu funkciju dvaput deriviramo i uvrstimo u jednadžbu 9.7, dobivamo*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(4a^2x^2 - 2a) + \left(\frac{k}{2}x^2 - E\right)\psi = 0,$$

odnosno

$$x^2 \left( \frac{k}{2} - \frac{2\hbar^2 a^2}{m} \right) = E - \frac{\hbar a}{m} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2\hbar} \sqrt{km}.$$

Budući da  $|\psi^2|$  po Bornovoj interpretaciji mora biti funkcija gustoće vjerojatnosti za opažanje čestice na poziciji  $x$ , nepravi integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi^2(x)| dx$  mora konvergirati, dakle funkcija  $|\psi^2(x)| = \exp(-2a x^2)$  mora imati  $x$ -os kao (obostranu) horizontalnu asimptotu, dakle otpada mogućnost  $a < 0$  i ostaje  $a = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{km}$ . Stoga je jedno rješenje Schrödingerove jednadžbe za harmonijski oscilator valna funkcija

$$\psi_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\hbar} \sqrt{km} x^2\right).$$

Uvrštavanje tog rješenja natrag u jednadžbu 9.7 povlači  $E_0 = \frac{\hbar}{2m} \sqrt{km}$ . Dakle, za svojstvenu vrijednost  $E_0 = \frac{\hbar}{2m} \sqrt{km}$  od  $\hat{H}$  jedan pripadni svojstveni vektor je  $\psi_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\hbar} \sqrt{km} x^2\right)$ . Ovo je samo jedno od beskonačno mnogo rješenja ( $E_\nu, \psi_\nu, \nu = 0, 1, 2, \dots$ ) (ovo je rješenje s najnižom mogućom energijom  $E_0$ , koja se zove energijom nulte točke).

Vratimo se na klasični harmonijski oscilator, sa ili bez trenja. U slučaju da na tijelo koje oscilira djeluje još neka vanjska sila koja u svakom trenutku  $t$  ima iznos  $f(t)$ , drugi Newtonov zakon daje nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$m \ddot{x} + f \dot{x} + kx = f(t). \quad (9.8)$$

U tom je slučaju (po teoremu 48) pozicija opisana formulom

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t),$$

gdje je  $x_H$  opće rješenje za harmonijski oscilator bez vanjske sile (bez ili sa trenjem), tj. jedno od gore opisanih rješenja, a  $x_P$  je partikularno rješenje jednadžbe  $m \ddot{x} + f \dot{x} + kx = f(t)$ . Slično je situacija i u sljedećem primjeru.

**Primjer 358.** *Promotrimo strujni krug (jednostavnu strujnu petlju) koje se sastoji od izvora napona  $E$ , otpornika otpora  $R$ , kondenzatora kapaciteta  $C$ , zavojnice konstantne induktivnosti  $L$  i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku ( $I(0\text{ s}) = 0\text{ A}$ ).*

*Po definiciji je  $I(t) = \frac{dQ}{dt}$ . Nadalje, prema Ohmovom zakonu, pad napona na otporniku je  $U = RI = R \frac{dQ}{dt}$ . Pad napona na zavojnici pak iznosi  $L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2Q}{dt^2}$ , a na kondenzatoru  $Q/C$ . Prema drugom Kirchhoffovom zakonu stoga mora vrijediti*

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E.$$

*Ukoliko su induktivnost, otpor i kapacitet konstantni, vidimo da smo dobili nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima, analognu općem modelu harmonijskog oscilatora 9.8. Vidimo da ovdje ulogu pozicije igra naboj, ulogu mase induktivnost, ulogu koeficijenta trenja otpor, a ulogu koeficijenta opruge recipročni kapacitet. Za razliku od harmonijskog oscilatora, ovdje će napon  $E$  (bio on konstantan ili ovisan o vremenu, sigurno nema smisla da je konstantno 0) uzrokovati da sigurno imamo nehomogenu jednadžbu.*

Vidimo dakle da je još potrebno opisati kako se za danu nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima nalazi jedno njezino partikularno rješenje.

### Određivanje partikularnog rješenja

Za određivanje partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe 9.3 postoje dvije metode. Za obje se pretpostavlja da je prvo riješena pripadna homologna jednadžba, tj. da je određeno njezino opće rješenje  $y_H(t)$ .

Prva metoda je **metoda neodređenih koeficijenata**. U njoj se ovisno o nehomogenom članu  $b(t)$  pretpostavi određeni oblik  $y_P$ , koji će sadržavati jednu ili više neodređenih konstanti, zatim ga se uvrsti u jednadžbu 9.3 i odrede te konstante. Ova metoda je primjenjiva ako je  $b(t)$  jedan od sljedećih triju tipova funkcija ili pak umnožak dvije ili tri funkcije koje su različitih od ta tri tipa:

- polinoma (ne zaboravimo da je i konstantna funkcija je polinom stupnja 0) i/ili
- eksponencijalne funkcije  $\exp(\alpha t)$  (tj. eksponencijalne funkcije s bazom  $a = e^\alpha$ ) i/ili
- linearne kombinacije sinusa i kosinusa istog temeljnog perioda (tj. oblika  $c \cos(\beta t) + d \sin(\beta t)$ , pri čemu  $c$  ili  $d$  može biti 0).

Tada se za  $y_P$  pretpostavlja isti oblik kakav ima  $b(t)$ , s tim da se svi konkretni koeficijenti polinoma, te  $c$  i  $d$  zamijene neodređenim koeficijentima. Taj oblik uvrštavamo u polaznu jednadžbu i određujemo te koeficijente.

**Primjer 359.** *Ako je*

$$b(t) = 6 \cdot 3^t \cdot \cos(2t)$$

(polinom stupnja 0 pomnožen s eksponencijalnom funkcijom s bazom 3 i linearnom kombinacijom  $0 \cdot \sin(2t) + 1 \cdot \cos(2t)$ ) pretpostavlja se

$$y_P(t) = A \cdot 3^t \cdot (B \cos(2t) + C \sin(2t)),$$

a ako je

$$b(t) = t^2 e^{-t}$$

(polinom 2. stupnja pomnožen s eksponencijalnom funkcijom s bazom  $e^{-1}$ ) pretpostavlja se

$$y_P(t) = (At^2 + Bt + C)e^{-t}.$$

Može se dogoditi da se iz gornje pretpostavke ne mogu odrediti neodređeni koeficijenti. To će se dogoditi ako je pretpostavljeni oblik  $y_P$  već uključen u  $y_H$ . U takvom slučaju potrebno je prvotno pretpostavljeni  $y_P$  pomnožiti s najmanjom potencijom od  $t$  takvom da se taj oblik ne pojavljuje kao komponenta u  $y_H$ .

**Primjer 360.** *Riješimo*

$$y'' - 6y' + 9y = \exp(3t).$$

Pripadna homogena jednadžba je  $y'' - 6y' + 9y = 0$ , odgovarajuća karakteristična jednadžba je  $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$  s jedinstvenim (dvostrukim) realnim rješenjem  $\lambda = 3$ , dakle je  $y_H(t) = C_1 \exp(3t) + C_2 t \exp(3t)$ .

Nehomogeni član je  $b(t) = \exp(3t)$ , dakle konstanta pomnožena s eksponencijalnom funkcijom s bazom  $e^3$ , te bi trebalo pretpostaviti  $y_P(t) = A \exp(3t)$ . No, pokušaj uvrštavanja  $y_P$  u polaznu jednadžbu neće omogućiti određivanje  $A$  jer je  $A \exp(3t)$  prva komponenta rješenja pripadne homogene jednadžbe. Isto tako pretpostavka  $y_P(t) = At \exp(3t)$  neće uroditi plodom (u ovom slučaju radi se o drugoj komponenti u  $y_H$ ). Najmanja potencija od  $t$  s kojom možemo pomnožiti  $A \exp(3t)$  bez da dobijemo komponentu u  $y_H$  je  $t^2$ , dakle korektna pretpostavka je  $y_P(t) = At^2 \exp(3t)$ . Deriviramo ga dvaput:  $y'_P(t) = At(3t + 2) \exp(3t)$ ,  $y''_P(t) = A(9t^2 + 12t + 2) \exp(3t)$ . Uvrstimo u polaznu jednadžbu:

$$A(9t^2 + 12t + 2) \exp(3t) - 6At(3t + 2) \exp(3t) + 9At^2 \exp(3t) = \exp(3t).$$

Podijelimo s  $\exp(3t)$  (koji nikad nije 0) i sredimo te ostaje  $2A = 1$ , tj.  $A = 1/2$ , dakle je opće rješenje zadane jednadžbe

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = C_1 \exp(3t) + C_2 t \exp(3t) + \frac{1}{2} t^2 \exp(3t).$$

Metoda neodređenih koeficijenata može se koristiti i ako je  $b(t) = b_1(t) + b_2(t) + \dots$  zbroj više članova gdje je svaki od  $b_i$  gore opisanog oblika. Tada se tom metodom odredi po jedan  $y_{P,i}$  za svaki  $b_i$ , a ukupni  $y_P$  je zbroj dobivenih  $y_{P,i}$ -ova.

**Primjer 361.** Za jednadžbu

$$y'' - 4y' - 12y = 8e^{6t} + 216t^2$$

pripadno homogeno rješenje je

$$y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{6t}.$$

Sad tražimo partikularno rješenje koje odgovara članu  $b_1(t) = 8e^{6t}$ , tj. ponašamo se kao da rješavamo jednadžbu  $y'' - 4y' - 12y = 8e^{6t}$ . Pretpostavka  $y_{P,1} = Ae^{6t}$  neće pomoći ( $e^{6t}$  je komponenta od  $y_H$ ) pa pretpostavljamo  $y_{P,1} = Ate^{6t}$  i dobijemo  $A = 1$ :  $y_{P,1} = te^{6t}$ .

Naposlijetku tražimo partikularno rješenje koje odgovara članu  $b_2(t) = 216t^2$ , tj. ponašamo se kao da rješavamo jednadžbu  $y'' - 4y' - 12y = 216t^2$ . Nehomogeni član je sad kvadratni polinom, dakle pretpostavljamo  $y_{P,2} = At^2 + Bt + C$  i dobijemo  $y_{P,2} = -18t^2 + 12t - 7$ .

Stoga je rješenje polazne jednadžbe

$$y = y_H(t) + y_{P,1}(t) + y_{P,2}(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{6t} + te^{6t} - 18t^2 + 12t - 7.$$

Drugačija metoda za određivanje partikularnog rješenja, koja funkcioniра i kad nehomogeni član  $b(t)$  nije gore opisanih oblika prikladnih za primjenu metode neodređenih koeficijenata, je generalizacija ranije opisane **metode varijacije konstante** za linearne diferencijalne jednađbe 1. reda. Kao i tamo, ovdje se partikularno rješenje određuje indirektno, tako da se modificira  $y_H$  pretpostavljajući da njegove konstante zapravo nisu konstante. Dok je gore opisana metoda neodređenih koeficijenata bez modifikacija primjenjiva i za linearne diferencijalne jednađbe reda većeg od 2, metodu varijacije konstante ovdje ćemo opisati samo za slučaj reda 2. Pretpostavimo dakle da smo odredili opće rješenje  $y_H(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$  jednađbi  $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$  pripadne homogene jednađbe. Sad za konstante  $C_1$  i  $C_2$  pretpostavimo da ovise o  $t$ :  $y(t) = C_1(t) y_1(t) + C_2(t) y_2(t)$ . Uvrštavanje u jednađbu  $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$  će rezultirati dugim izrazom na lijevoj strani. No, nama nije cilj odrediti sve funkcije  $C_1$  i  $C_2$  za koje je  $y(t) = C_1(t) y_1(t) + C_2(t) y_2(t)$  rješenje, nego nam je dovoljno naći jedan par takvih  $C_1$  i  $C_2$ . Stoga uvodimo uvjet

$$C_1'(t) y_1(t) + C_2'(t) y_2(t) = 0,$$

kojim se rezultat uvrštavanja  $y(t) = C_1(t) y_1(t) + C_2(t) y_2(t)$  u  $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$  skraćuje na

$$C_1'(t) y_1'(t) + C_2'(t) y_2'(t) = b(t).$$

Dakle, dobili smo  $2 \times 2$ -sustav za  $C_1'$  i  $C_2'$  iz kog možemo odrediti  $C_1'$  i  $C_2'$ , pa onda integriranjem  $C_1$  i  $C_2$ . Ovo je primjer sustava koji je moguće rješavati i supstitucijom ili eliminacijom, ali je zgodnije iskoristiti Cramerovo pravilo. Determinanta matrice koeficijenata tog sustava je točno Wronskijan našeg fundamentalnog skupa rješenja pripadne homogene jednađbe pa sigurno nije nula:

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2).$$

Po Cramerovom pravilu dobivamo da je

$$C_1'(t) = \frac{-f(t)y_2(t)}{W(y_1, y_2)}, \quad C_2'(t) = \frac{f(t)y_1(t)}{W(y_1, y_2)}.$$

Iz toga direktnim integriranjem dobivamo  $C_1(t)$  i  $C_2(t)$ .

**Primjer 362.** Zadana je jednađba

$$y'' + y = \operatorname{tg} t.$$



Za nju nije primjenjiva metoda neodređenih koeficijenata. Karakteristična jednačina je  $\lambda^2 + 1 = 0$  te je  $y_H(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ , dakle pretpostavljamo  $y(t) = C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t$ . Postavljamo sustav

$$C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t = 0,$$

$$C_1'(t) \cos t - C_2'(t) \sin t = \operatorname{tg} t.$$

Po Cramerovom pravilu imamo redom

$$D = W(y_1, y_2) = -\sin^2(t) - \cos^2(t) = -1,$$

$$C_1'(t) = \sin t,$$

$$C_2'(t) = -\frac{\sin^2 t}{\cos t},$$

pa je

$$C_1(t) = \int \sin t \, dt = -\cos t + c_1,$$

$$C_2(t) = -\int \frac{\sin^2 t}{\cos t} \, dt = \sin t - \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c_2$$

i naposljetku

$$y(t) = (-\cos t + c_1) \sin t + \left( \sin t - \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c_2 \right) \cos t.$$



**Ponovimo bitno...** Linearne diferencijalne jednačbe su one obične diferencijalne jednačbe koje se mogu svesti na oblik u kojem je linearna kombinacija nepoznate funkcije i njenih derivacija izjednačena s nekom funkcijom nezavisne varijable. Ako je ta funkcija nulfunkcija, govorimo o homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednačbi, a inače zamjenom te funkcije s nulfunkcijom dobivamo pripadnu homogenu jednačbu. Skup svih rješenja homogene linearne diferencijalne jednačbe reda  $n$  je  $n$ -dimenzionalni vektorski prostor. Njegovu bazu  $\{y_1, \dots, y_n\}$  nazivamo fundamentalnim skupom rješenja.

Koeficijenti linearne kombinacije nepoznate funkcije i njenih derivacija mogu ovisiti o nezavisnoj varijabli, a ako ne ovise, govorimo o linearnoj diferencijalnoj jednačbi s konstantnim koeficijentima. Za homogene linearne diferencijalne jednačbe s konstantnim koeficijentima fundamentalni skup rješenja određujemo preko karakteristične jednačbe, tj. polinomijalne jednačbe stupnja  $n$  (istog kao red diferencijalne jednačbe koju rješavamo) s nepoznanicom  $\lambda$ , a koja proizlazi iz uvrštavanja test-rješenja  $\exp(\lambda t)$  u

polaznu jednadžbu. Svako realno rješenje  $\lambda$  kratnosti  $k$  karakteristične jednadžbe doprinosi fundamentalnom rješenju s funkcijama  $\exp(\lambda t)$ ,  $t \exp(\lambda t)$ ,  $\dots$ ,  $t^{k-1} \exp(\lambda t)$ . Svaki (jednostruki) par konjugirano kompleksnih rješenja  $\alpha \pm \beta i$  karakteristične jednadžbe doprinosi fundamentalnom rješenju s funkcijama  $\exp(\alpha t) \cos(\beta t)$  i  $\exp(\alpha t) \sin(\beta t)$ .

Opće rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe je zbroj općeg rješenja pripadne homogene jednadžbe i jednog partikularnog rješenja (dobivenog metodom neodređenih koeficijenata ili metodom varijacije konstanti).

Harmonijski oscilator je fizikalni sustav koji se sastoji od tijela koje oscilira oko ravnotežnog položaja pod utjecajem sile koja je po iznosu proporcionalna odmakom iz ravnotežnog položaja. Jednodimenzionalni harmonijski oscilator je i u klasičnoj i u kvantnoj fizici opisan homogenom linearnom diferencijalnom jednadžbom 2. reda, s tim da je ona u klasičom slučaju s konstantnim koeficijentima, a u kvantnom ima nekonstantne koeficijente. 🐣



## 9.4 Sustavi diferencijalnih jednadžbi

Općenito, sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi sastoje se od više običnih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju vezu između više nepoznatih funkcija  $y, z, \dots$  iste nezavisne varijable  $t$  i njihovih derivacija.

**Primjer 363.** *Takozvani SIR-model širenja zarazne bolesti unutar neke populacije polazi od pretpostavke da se populacija može podijeliti u tri kategorije:  $S$  (susceptible – oni koji mogu biti zaraženi),  $I$  (infected – zaraženi) i  $R$  (removed – oni koji su imuni jer su prebolili zarazu). Pritom se radi o brojnostima ta tri dijela populacije, te su  $S$ ,  $I$  i  $R$  funkcije vremena  $t$ . Zatim se uvode pretpostavke o brzinama promjene brojnosti u te tri populacije. U najjednostavnijoj varijanti SIR-modela uzima se da, budući da inficiranje ovisi o kontaktu između neimunih i zaraženih, brzina promjene  $S$  razmjerna s  $I$  i  $S$  (i to s negativnom konstantom proporcionalnosti):*

$$\dot{S} = -\beta IS.$$

Za brzinu oporavka (brzina kojom se povećava  $R$ ) uzima se da je razmjerna s  $I$ :

$$\dot{R} = \nu I.$$

Nadalje, razumno je pretpostaviti da je  $\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$  (zašto?), dakle je

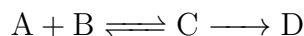
$$\dot{I} = \beta IS - \nu I.$$

Vidimo da se radi o sustavu tri obične diferencijalne jednadžbe za tri nepoznate funkcije vremena.

U kemijskoj kinetici sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi modeliraju kemijske procese, razmatrajući ih kao slijedova više tzv. elementarnih procesa. Ukupna kemijska promjena tu se gleda kao rezultat osnovnih koraka na molekulskoj razini (elementarni procesi), za koje je (za razliku od jednadžbi kemijskih reakcija) moguće iz jednadžbe postaviti zakon brzine:

| Elementarni proces            | Zakon brzine     |
|-------------------------------|------------------|
| $A \longrightarrow P$         | $v = k[A]$       |
| $2 A \longrightarrow P$       | $v = k[A]^2$     |
| $A + B \longrightarrow P$     | $v = k[A][B]$    |
| $2 A + B \longrightarrow P$   | $v = k[A]^2[B]$  |
| $A + B + C \longrightarrow P$ | $v = k[A][B][C]$ |

**Primjer 364.** *Mehanizam predravnoteže je mehanizam*



Radi se o tri elementarna procesa:  $A + B \longrightarrow C$ ,  $C \longrightarrow A + B$  i  $C \longrightarrow D$ , za koje koeficijente brzina označimo redom s  $k_1$ ,  $k_{-1}$  i  $k_2$ . Zakoni brzina su onda, prema gornjoj tablici, redom

$$v_1 = k_1[A][B],$$

$$v_{-1} = k_{-1}[C],$$

$$v_2 = k_2[C].$$

Ukupna brzina cijelog mehanizma je, kao i uvijek, recipročna vrijednost stehiometrijskog koeficijenta bilo kojeg sudionika pomnožena s derivacijom njegove koncentracije. Primjerice, ako želimo izraziti brzinu mehanizma preko reaktanta A, brzina je  $v = -\frac{d[A]}{dt}$ . U prvom od procesa se A troši, u drugom („minus prvom”) nastaje, a u zadnjem A ne sudjeluje. Dakle, brzina s obzirom na A je  $v_1 - v_2$ , odnosno

$$-\frac{d[A]}{dt} = k_1[A][B] - k_{-1}[C].$$

Analogno dobivamo i preostale jednadžbe sustava koji modelira ovaj mehanizam:

$$-\frac{d[B]}{dt} = k_1[A][B] - k_{-1}[C],$$

$$\frac{d[C]}{dt} = k_1[A][B] - k_{-1}[C] - k_2[C],$$

$$\frac{d[D]}{dt} = k_2[C].$$

Taj sustav nije moguće riješiti egzaktno, no često se pojednostavljuje uzimajući tzv. pretpostavku ustaljenog stanja (nakon kratkog početka,  $[C]$  je konstantan, tj. derivacija po  $t$  mu je 0). Uz tu pretpostavku dobijemo  $[C] = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2}[A][B]$ , što uvršteno u drugu jednadžbu daje

$$\frac{d[D]}{dt} = \frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [A][B].$$

Već smo (vidi str. 365) komentirali da je svaka homogena linearna diferencijalna jednadžba reda  $n$  ekvivalentna sustavu od  $n$  homogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Vrijedi i obrnuto, svaki sustav homogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda može se supstitucijom svesti na jednu homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu višeg reda.

**Primjer 365.** Harmonijski oscilator mogli smo opisati i kao sustav diferencijalnih jednadžbi za poziciju i brzinu:

$$\dot{x}(t) = v(t),$$

$$m\dot{v}(t) = -kx(t).$$

Supstitucijom prve u drugu jednadžbu dobivamo jednu diferencijalnu jednadžbu za poziciju ( $mx'' + kx = 0$ ).

Općenito, **sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda** je sustav od  $n$  diferencijalnih jednadžbi s  $n$  nepoznatih funkcija  $y_1, \dots, y_n$  iste nezavisne varijable  $t$  koji je oblika

$$Y' = A \cdot Y + B,$$

gdje je

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, A = (a_{ij}(t))_{i,j}.$$

Kažemo da se radi o sustavu s konstantnim koeficijentima ako su sve funkcije  $a_{ij}$  konstantne, tj. ako je  $A \in M_n$ , a sustav je homogen ako je  $B = 0_{n,1}$  nulmatrica.

**Primjer 366.** Sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda s konstantnim koeficijentima je primjerice

$$y' = 2y - z + e^t,$$

$$z' = -y + 3z - t.$$

Ovdje je dakle

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e^t \\ -t \end{pmatrix}.$$

Deriviranje prve jednadžbe daje

$$y'' = 2y' - z' + e^t.$$

Uvrstimo li tu na desnu stranu  $z'$  iz polazne druge jednadžbe i  $z$  izražen iz polazne prve dobijemo

$$y'' = 5y' + 6y + t - 2e^t.$$

Odredimo li njeno rješenje  $y$ , funkciju  $z$  možemo dobiti iz druge diferencijalne jednadžbe polaznog sustava.

**Primjer 367.** *Mehanizam povrativih (reverzibilnih) reakcija je mehanizam oblika  $A \rightleftharpoons B$ , tj. mehanizam koji se sastoji od dva elementarna procesa  $A \longrightarrow B$  i  $B \longrightarrow A$ . Odgovarajući sustav diferencijalnih jednadžbi je dan s*

$$\begin{aligned} v_1 &= k_1[A], \\ v_{-1} &= k_{-1}[B] \end{aligned}.$$

Gledajući ukupnu brzinu dobivamo

$$-\frac{d[A]}{dt} = \frac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_{-1}[B],$$

tj. homogeni sustav dviju linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda s konstantnim koeficijentima.

Ako u početku nije bilo produkta B, tj.  $[B]_0 = 0$ , onda je  $[B] = [A]_0 - [A]$  pa imamo

$$-\frac{d[A]}{dt} = (k_1 + k_{-1})[A] - k_{-1}[A]_0.$$

To je linearna jednadžba prvog reda te dobivamo rješenje

$$[A] = \frac{[A]_0}{k_1 + k_{-1}} (k_{-1} + k_1 \exp(-(k_1 + k_{-1})t))$$

i iz njega

$$[B] = \frac{k_1[A]_0}{k_1 + k_{-1}} (1 - \exp(-(k_1 + k_{-1})t)).$$

Budući da se homogeni sustav  $n$  linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda može supstitucijom svesti na jednu homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu reda  $n$ , iz teorema 49 slijedi da vrijedi:

**Teorem 51.** *Skup svih rješenja  $Y$  homogenog sustava  $Y' = AY$  linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda je  $n$ -dimenzionalni vektorski prostor.*

Dakle, takvi sustavi se rješavanju nalaženjem baze prostora rješenja, a opće rješenje je linearna kombinacija vektora te baze. Za nehomogene sustave vrijedi kao i ranije za pojedinačne jednadžbe (teorem ??):

**Teorem 52.** *Opće rješenje nehomogenog sustava  $Y' = AY + B$  linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda je zbroj općeg rješenja pripadnog homogenog sustava  $Y' = AY$  i jednog partikularnog rješenja.*

Osim supstitucijom, homogeni sustavi linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda s konstantnim koeficijentima mogu se rješavati pomoću svojstvenih vrijednosti matrice  $A$ , dakle preko karakteristične jednadžbe koja je ujedno karakteristična jednadžba homogene linearne diferencijalne jednadžbe reda  $n$  s konstantnim koeficijentima koja po već opisanom principu odgovara tom sustavu. Pretpostavimo da je rješenje sustava  $Y' = AY$  oblika

$$(y_1, \dots, y_n) = e^{\lambda t}(y_{1,0}, \dots, y_{n,0}),$$

gdje su  $y_{i,0}$  i  $\lambda$  konstante. Tada je  $(y'_1, \dots, y'_n) = \lambda(y_1, \dots, y_n)$  pa iz  $Y' = AY$  dobivamo da  $\lambda$  i  $Y_0$  moraju biti takvi da vrijedi

$$AY_0 = \lambda Y_0,$$

odnosno  $\lambda$  mora biti svojstvena vrijednost matrice  $A$  i  $Y_0$  pripadni svojstveni vektor. Za skup od  $n$  linearno nezavisnih svojstvenih vektora  $Y_{0,1}, \dots, Y_{0,n}$  opće rješenje sustava  $Y' = AY$  je

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 t} Y_{0,1} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} Y_{0,n}.$$

**Primjer 368.** *Zadan je sustav*

$$y' = 3y + 2z,$$

$$z' = 4y + z.$$

*Pripadna matrica  $A$  je*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

čije svojstvene vrijednosti su  $\lambda_1 = 5$  i  $\lambda_2 = -1$ .

Svojstvene vektore za  $\lambda_1$  dobivamo rješavanjem sustava  $(A - 5I)X = 0$ :  $(x_1, x_2) = (t, t) = t(1, 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Odgovarajući svojstveni vektor je stoga npr.  $Y_{0,1} = (1, 1)^t$ . Slično, svojstvene vektore za  $\lambda_2$  dobivamo iz sustava  $(A + I)X = 0$ :  $(x_1, x_2) = (t, -2t) = t(1, -2)$ ,  $Y_{0,2} = (1, -2)^t$ .

Rješenje polaznog sustava diferencijalnih jednadžbi je

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 t} Y_{0,1} + C_2 e^{\lambda_2 t} Y_{0,2} = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

odnosno  $y(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}$ ,  $z(t) = C_1 e^{5t} - 2C_2 e^{-t}$ .

**Primjer 369.** Promotrimo mehanizam  $A \longrightarrow B \rightleftharpoons C$ , uz pretpostavku da su početne koncentracije od B i C jednake 0. Traži se vremenska ovisnost produkta C.

Odgovarajući sustav diferencijalnih jednadžbi je

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= -k_1[A], \\ \frac{d[B]}{dt} &= k_1[A] - k_2[B] + k_{-2}[C], \\ \frac{d[C]}{dt} &= k_2[B] - k_{-2}[C] \end{aligned}$$

tj. homogeni sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda s konstantnim koeficijentima kojemu je matrica

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & k_{-2} \\ 0 & k_2 & -k_{-2} \end{pmatrix}.$$

Njen karakteristični polinom je

$$(-k_1 - \lambda)((-k_2 - \lambda)(-k_{-2} - \lambda) - k_2 k_{-2}) = -\lambda(\lambda + k_1)((\lambda + k_2 + k_{-2}))$$

pa su svojstvene vrijednosti od A redom 0,  $-k_1$  i  $-k_2 - k_{-2}$ .

Nađimo svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost 0:

$$\begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & k_{-2} \\ 0 & k_2 & -k_{-2} \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_{-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tj.  $(x_1, x_2, x_3) = (0, k_{-2}t, k_2t) = t(0, k_{-2}, k_2)$ . Dakle, pripadni svojstveni vektor je  $Y_{0,1} = (0, k_{-2}, k_2)^t$ . Analogno dobijemo  $Y_{0,2} = (k_1 - k_2 - k_{-2}, -k_1 + k_{-2}, k_2)^t$  i  $Y_{0,3} = (0, 1, -1)^t$ .

*Ukupno rješenje sustava je stoga*

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ k_{-2} \\ k_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-k_1 t} \begin{pmatrix} k_1 - k_2 - k_{-2} \\ -k_1 + k_{-2} \\ k_2 \end{pmatrix} + C_3 e^{-(k_2 + k_{-2})t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

*Iz početnih uvjeta dobivamo:*

$$C_1 = \frac{[A]_0}{k_2 + k_{-2}}, C_2 = \frac{[A]_0}{k_1 - k_2 - k_{-2}}, C_3 = \frac{[A]_0 k_1 k_2}{(k_1 - k_2 - k_{-2})(k_2 + k_{-2})}.$$

*Stoga je*

$$[C](t) = [A]_0 k_2 \left( \frac{1}{k_2 + k_{-2}} + \frac{e^{-k_1 t}}{k_1 - k_2 - k_{-2}} - \frac{k_1 e^{-(k_2 + k_{-2})t}}{(k_1 - k_2 - k_{-2})(k_2 + k_{-2})} \right).$$



**Ponovimo bitno...** Svaka linearna diferencijalna jednadžba reda  $n$  s nepoznatom funkcijom  $y$  nezavisne varijable  $t$  je ekvivalentna sustavu linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda s nepoznatim funkcijama  $y, y', \dots, y^{n-1}$  i obrnuto, svaki sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda s nepoznatim funkcijama  $y_1, \dots, y_n$  iste varijable  $t$  ekvivalentan je jednoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi reda  $n$  s nepoznatom funkcijom  $t$ . Stoga isti teoremi o skupovima rješenja vrijede za sustave linearnih diferencijalnih jednadžbi kao i za linearne diferencijalne jednadžbe. Ako je sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda zapisan u matričnom obliku  $Y' = AY + B$ , ukoliko je  $B = 0$  kažemo da je homogen, a ako je  $A$  konstantna matrica govorimo o sustavu s konstantnim koeficijentima. Karakteristična jednadžba matrice  $A$  je točno karakteristična jednadžba odgovarajuće linearne diferencijalne jednadžbe reda  $n$ .







# Poglavlje 10

## Funkcije više varijabli

### 10.1 Skalarne funkcije više varijabli

Svaki kemičar zasigurno zna jednadžbu stanja idealnog plina:

$$pV = nRT.$$

Dosad smo ju mogli promatrati samo tako da smo po dvije veličine uzeli kao nezavisnu i zavisnu varijablu, a ostale uzeli kao konstantne (npr. gledali smo tlak  $p$  kao funkciju volumena  $V$  pri konstantnoj temperaturi  $T$  i množini  $n$ ). No, u stvarnosti u toj jednadžbi imamo četiri varijable  $p$ ,  $V$ ,  $n$  i  $T$  (koje su skalarne veličine, dakle se uz fiksirani odabir jedinica mogu poistovjetiti s realnim brojevima), a iz jednadžbe bilo koju od njih možemo izraziti preko ostalih, tj. bilo koja od njih je zavisna varijabla jednoznačno određena iznosima preostalih triju nezavisnih varijabli. Možemo primjerice kao zavisnu varijablu uzeti tlak  $p$  pa formula poprima oblik

$$p = p(V, T, n) = \frac{nRT}{V}. \quad (10.1)$$

Matematički ekvivalent te formule je

$$f(x, y, z) = \frac{8,3145 y z}{x}, \quad (10.2)$$

gdje je  $x = V/\text{m}^3$ ,  $y = T/\text{K}$ ,  $z = n/\text{mol}$  (i  $f(x, y, z) = p/\text{Pa}$ ). Kad kao ovdje jedna zavisna skalarna varijabla ovisi o više od jedne nezavisne skalarne varijable govorimo o skalarnim funkcijama više varijabli:

**Definicija 77** (Skalarne funkcije više varijabli). *Skalarna (ili realna) funkcija od  $n$  varijabli je funkcija koja uređenim  $n$ -torkama brojeva pridružuje realne brojeve, tj. funkcija čija domena je podskup od  $\mathbb{R}^n$ , a kodomena je podskup od  $\mathbb{R}$ .*

**Primjer 370.** Formulom  $f(x, y) = 2x - 5y^2 \ln x$  zadana je skalarna funkcija s dvije varijable. Njena prirodna domena je skup svih uređenih parova brojeva  $(x, y)$  za koje je  $x > 0$ . Njena vrijednost za  $x = e$  i  $y = 1$  iznosi  $f(e, 1) = 2e - 5 \ln e = 2e - 5$ , a za  $x = 1$  i  $y = e$  iznosi  $f(1, e) = 2 - 5e^2 \ln 1 = 2$ .

Kao i prije (poglavlje 2), prirodna domena matematičkog pravila može biti veća od stvarne domene funkcije. Primjerice, u formulu 10.2 možemo uvrstiti sve brojeve  $x, y$  i  $z$  osim  $x = 0$  pa je prirodna domena od  $f$  skup  $\mathbb{R}^3$  bez  $(y, z)$ -ravnine ( $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}$ ), no ako to pravilo gledamo kao matematizaciju jednadžbe stanja idealnog plina, domena će biti samo  $(0, \infty)^3 \subset D_f$  jer ne želimo uvrštavati 0 ni negativne brojeve ni za koju od promatranih veličina.

**Primjer 371.** Skalarna funkcija s 4 varijable zadana pravilom  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 x_3 - \exp(x_4)$  za prirodnu domenu ima cijeli  $\mathbb{R}^4$ .

Skalarna funkcija s 2 varijable zadana pravilom  $g(x, y) = \frac{\pi}{x^2 + y^2}$  za prirodnu domenu ima skup  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , tj. definirana je na cijeloj  $(x, y)$ -ravnini osim u ishodištu.

Skalarna funkcija s 3 varijable zadana pravilom  $h(x, y, z) = \frac{1}{xyz}$  za prirodnu domenu ima skup  $\mathbb{R}^3$  bez koordinatnih ravnina, tj. skup  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : xyz = 0\}$ .

**Napomena 32.** S obzirom na to da se u ovom poglavlju nećemo baviti pitanjima bijektivnosti, za skalarne funkcije ćemo u pravilu kao kodomenu uzimati jednostavno  $\mathbb{R}$ .

Također, kad god se u ovom poglavlju pozivamo na koordinatni sustav, podrazumijevamo da se radi o Kartezijevom koordinatnom sustavu.

U poglavlju 2 važan „alat“ za razumijevanje funkcija bili su njihovi grafovi. To ovdje neće biti slučaj, ali ne to ne znači da nemamo nikakvih alata za vizualiziranje „ponašanja“ funkcija više varijabli.

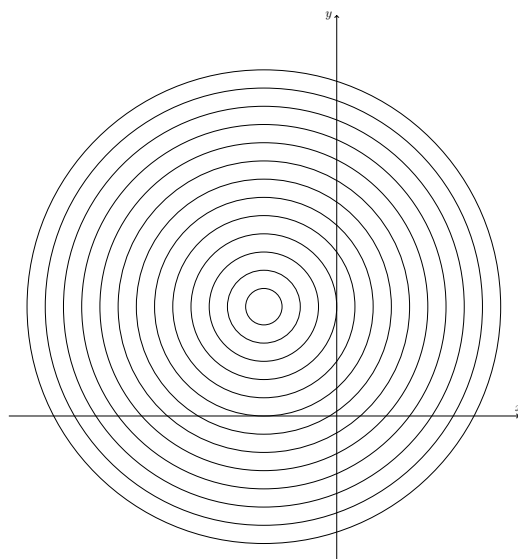
Podsjetimo se kako glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem  $(-2, 3)$  u ravnini:

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

Vidimo da se radi o jednadžbi u kojoj je jedna skalarna funkcija dviju varijabli izjednačena s konkretnom vrijednosću zavisne varijable:

$$f(x, y) = a$$

uz  $f(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 3)^2$  i  $a = 25$ . Uočimo i da je (prirodna) domena ove funkcije  $\mathbb{R}^2$ , tj. čitava koordinatna ravnina. Ako bismo varirali vrijednost  $a$ , ali zadržali funkciju  $f$ , dobili bismo (sve dok je  $a > 0$ ) kružnice različitih

Slika 10.1: Nivo-krivulje funkcije  $f(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 3)^2$ 

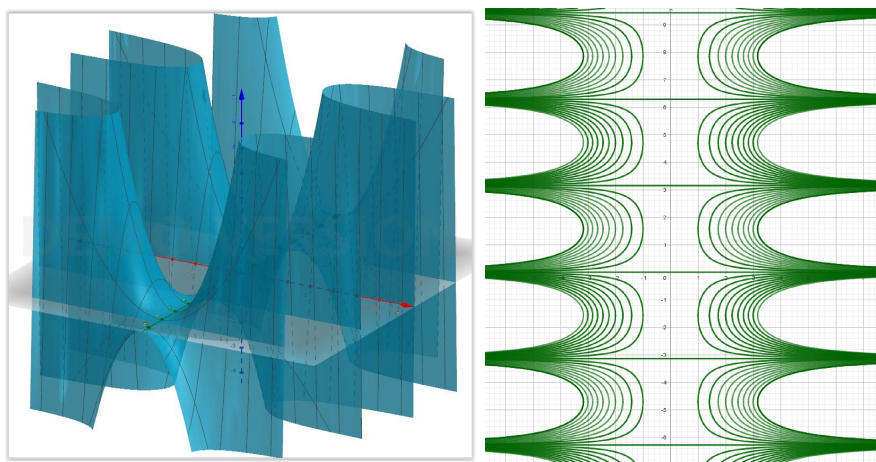
polumjera, ali sve s istim središtem  $(-2, 3)$  (slika 10.1). Za  $a = 0$  dobili bismo samo točku (ishodište), a za  $a < 0$  ništa (prazan skup) jer naša funkcija  $f$  ne može postići negativne vrijednosti. Ovakvi prikazi skalarnih funkcija dviju varijabli kao niza krivulja u ravnini, točnije u dijelu ravnine koji predstavlja domenu razmatrane skalarne funkcije, nazivaju se **nivo-krivulje** (ili implicitno zadane krivulje) u ravnini.

**Definicija 78** (Nivo-krivulja (implicitno zadana krivulja) u ravnini). *Neka je  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  skalarna funkcija dviju varijabli ( $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ ). Sve krivulje u koordinatnoj ravnini s jednadžbom oblika  $f(x, y) = a$  nazivaju se nivo-krivuljama funkcije  $f$  (odnosno, to su funkcijom  $f$  implicitno zadane krivulje).*

**Primjer 372.** *Ako je  $h$  nadmorska visina točke s geografskim koordinatama  $\lambda$  i  $\varphi$ ,  $h$  je skalarna funkcija od  $(\lambda, \varphi)$ , a odgovarajuće nivo-krivulje su izohipse.*

Svaka nivo-krivulja funkcije  $f$  leži unutar njezine domene  $D_f$ . Naime, ako imamo točku  $(x_0, y_0) \notin D_f$ , ta točka se ne može uvrstiti u  $f$  pa sigurno nije  $f(x_0, y_0) = a$  ni za koji  $a$ .

**Napomena 33.** *Kako smo već rekli u odjeljku 3.10, jednadžbom  $f(x, y) = a$  je implicitno zadana funkcija jedne varijable  $y$ . To znači da se za svaku točku  $(x_0, y_0)$  na toj nivo-krivulji, osim ako je u toj točki tangenta na krivulju paralelna s  $y$ -osi, dio te krivulje oko te točke može shvatiti kao graf funkcije  $g$  jedne varijable  $x$  (čija je domena neki interval oko  $x_0$ ).*

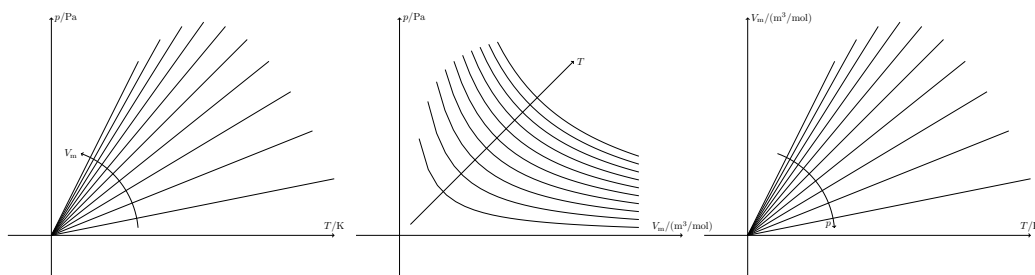


Slika 10.2: Graf funkcije zadane s  $f(x, y) = x^2 \sin y$  (slike izrađene programom Geogebra)

Nivo-krivulje dakle nisu grafovi skalarnih funkcija dviju varijabli, nego podskupovi njihovih domena. Podsjetimo se: Graf funkcije  $f$  je skup svih uređenih parova oblika  $(X, f(X))$ , gdje je  $X$  element domene od  $f$ . Dakle, ako funkcija ima  $n$  varijabli, graf funkcije se sastoji od uređenih  $(n+1)$ -torki brojeva oblika  $(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$ , pri čemu su  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  u domeni od  $f$ . Za realne funkcije jedne varijable graf se sastojao od uređenih parova brojeva pa se mogao crtati u koordinatnoj ravnini. Pritom se domena interpretirala kao podskup osi apscisa i ako je taj podskup imao duljinu veću od 0, graf je bio krivulja. Graf skalarne funkcije dviju varijabli se sastoji od uređenih trojki brojeva u kojima su prva dva člana koordinate elementa domene, a treći je tom elementu pridružena vrijednost funkcije. Stoga se graf skalarne funkcije dviju varijabli može prikazati u (3D-)prostornom koordinatnom sustavu u kojemu točke  $(x, y)$ -ravnina interpretiramo kao elemente domene (parove nezavisnih varijabli), a na aplikati očitavamo pridružene iznose zavisne varijable. Ako domena skalarne funkcije dviju varijabli ima površinu veću od nule, graf će biti ploha u prostoru<sup>1</sup> (slika 10.2 lijevo). Za usporedbu, na slici 10.2 prikazane su i nivo-krivulje iste funkcije.

Kako vidimo, iako grafovi skalarnih funkcija dviju varijabli mogu izgledati atraktivno, teško ih je nacrtati, a i ako su nacrtani, iz njih je bitno teže iščitati informacije o funkciji nego što je to bilo u slučaju realnih funkcija jedne varijable. Nadalje, ako skalarna funkcija ima više od dvije varijable, točke njezina grafa imaju više od 3 koordinate pa se graf ne može crtati jer

<sup>1</sup>Preciznu definiciju ploha dat ćemo u odjeljku 10.1.2.



Slika 10.3: Izohore, izoterme i izobare idealnog plina (strelicama su označeni smjerovi porasta fiksiranih varijabli)

se nalazi u prostoru dimenzije veće od 3. Znači li to da za skalarne funkcije više varijabli moramo odustati od vizualizacije? Ne! Grafove ćemo doduše koristiti samo za funkcije dviju varijabli i oni će nam biti dovoljni da uočimo neke specifičnosti vezane za funkcije više varijabli, ali zato uvijek možemo crtati analoge izohora, izoterma i izobara.

**Primjer 373.** *Jednažbu stanja idealnog plina možemo zapisati i u obliku*

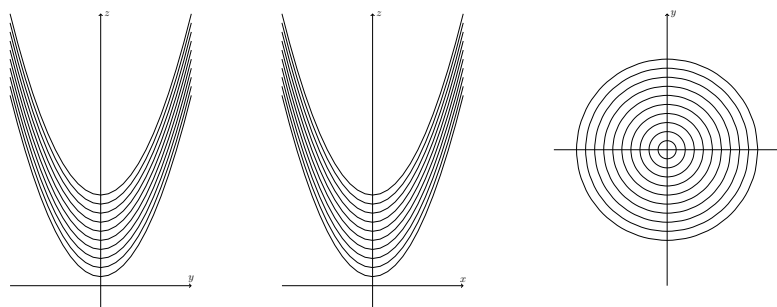
$$pV_m = RT,$$

gdje je  $V_m = \frac{V}{n}$  molarni volumen. U toj jednažbi imamo tri varijable: molarni volumen, temperaturu i tlak. Ako po jednu uzmemo za konstantu i ovisno o njejoj odabranoj vrijednosti crtamo nizove grafova koji povezuju preostale dvije varijable, dobit ćemo izohore, izoterme i izobare.

Ako gledamo konstantne molarne volumene  $V_m$ , jednažbe izohora su  $p/T = R/V_m = \text{const.}$ . Od preostale dvije varijable jednu odaberemo kao nezavisnu, recimo temperaturu, a drugu (tlak) kao zavisnu te vidimo da su izohore grafovi realnih funkcija jedne varijable kojima je formula oblika  $p_{V_m}(T) = \frac{R}{V_m} \cdot T$  s različitim konkretnim iznosima  $V_m$  (slika 10.3 lijevo).

Ako gledamo konstantne temperature  $T$ , jednažbe izoterma su  $pV_m = RT = \text{const.}$ . Od preostale dvije varijable jednu odaberemo kao nezavisnu, recimo molarni volumen, a drugu (tlak) kao zavisnu te vidimo da su izoterme grafovi realnih funkcija jedne varijable kojima je formula oblika  $p_T(V_m) = RT \cdot \frac{1}{V_m}$  s različitim konkretnim iznosima  $T$  (slika 10.3 sredina).

Ako gledamo konstantne tlakove  $p$ , jednažbe izobari su  $V_m/T = R/p = \text{const.}$ . Od preostale dvije varijable jednu odaberemo kao nezavisnu, recimo temperaturu, a drugu (molarni volumen) kao zavisnu te vidimo da su izoterme grafovi realnih funkcija jedne varijable kojima je formula oblika  $V_m(T) = \frac{R}{p} \cdot T$  s različitim konkretnim iznosima  $p$  (slika 10.3 desno). Uočimo da su

Slika 10.4: Izo- $x$ -ice, izo- $y$ -ice i izo- $z$ -ice za  $f(x, y) = x^2 + y^2$ 

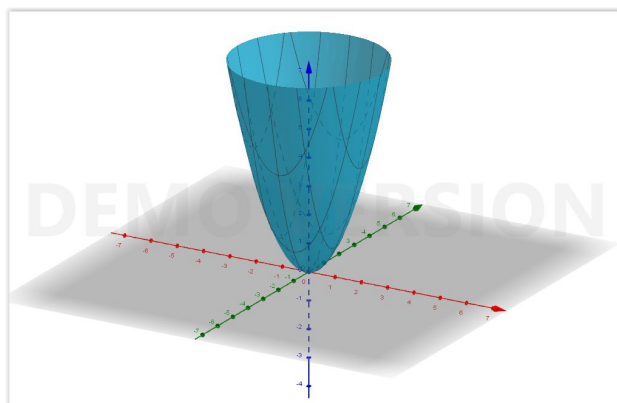
ove izobare ujedno i nivo-krivulje skalarne funkcije dviju varijabli  $p(T, V_m) = R \frac{T}{V_m}$ .

Kao u prethodnom primjeru možemo dakle umjesto grafa skalarne funkcije  $f$  koja ima  $n$  varijabli  $x_1, \dots, x_n$  crtati  $n$  nizova grafova realnih funkcija po jedne varijable  $x_i$  koje dobijemo tako da u formuli funkcije  $f$  sve varijable osim  $x_i$  smatramo konstantnim (te crtamo grafove za nekoliko odabira iznosa tih „konstanti”). Za slučaj funkcije dviju varijabli  $x$  i  $y$  odgovarajuće prikazemo, u analogiji za izohore i izoterme, nazivati izo- $x$ -icama i izo- $y$ -icama (a nivo-krivulje su u tom slučaju izo- $z$ -ice). Uočimo da su u tom slučaju izo- $x$ -ice pogledi duž  $x$ -osi na presjeke grafa funkcije s ravninama  $x = D$  paralelnim  $(y, z)$ -ravnini, izo- $y$ -ice su pogledi duž  $y$ -osi na presjeke grafa funkcije s ravninama  $y = D$  paralelnim  $(x, z)$ -ravnini, a izo- $z$ -ice su pogledi duž  $z$ -osi na presjeke grafa funkcije s ravninama  $z = D$  paralelnim  $(x, y)$ -ravnini.

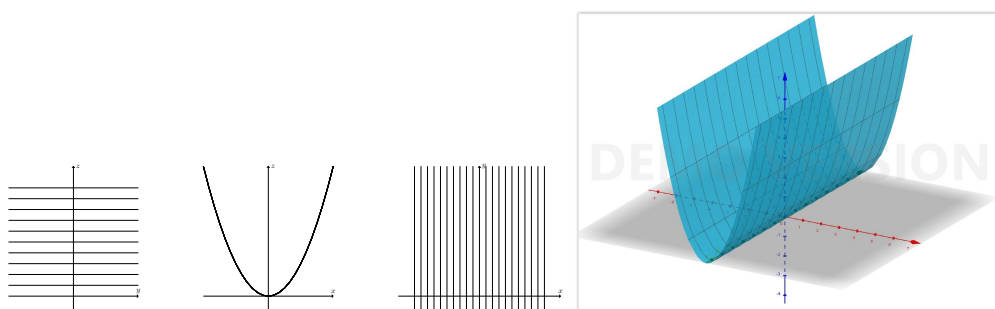
Posebno su ilustrativni i za nastavak gradiva korisni grafovi te izo- $x$ -ice, izo- $y$ -ice i izo- $z$ -ice za sljedećih četiriju skalarnih funkcija dviju varijabli:

1.  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .
2.  $g(x, y) = x^2$ .
3.  $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ .
4.  $i(x, y) = x^2 - y^2$ .

Za funkciju  $f$ , izo- $x$ -ice su grafovi funkcija  $f_x(y) = x^2 + y^2$  s konstantnim  $x$ . Te su funkcije od  $y$  tipa  $y^2$  plus nenegativna konstanta. Stoga su izo- $x$ -ice funkcije  $f$  parabola  $z = y^2$  i njene prema gore translatirane pozicije u  $(y, z)$ -koordinatnom sustavu (slika 10.4 lijevo). Zbog simetričnosti funkcije  $f$  s obzirom na zamjenu  $x$  i  $y$ , zaključujemo da su izo- $y$ -ice od  $f$  parabola  $z = x^2$  i njene prema gore translatirane pozicije u  $(x, z)$ -koordinatnom sustavu (slika



Slika 10.5: Graf funkcije  $f(x, y) = x^2 + y^2$  (slika izrađena programom Geogebra)

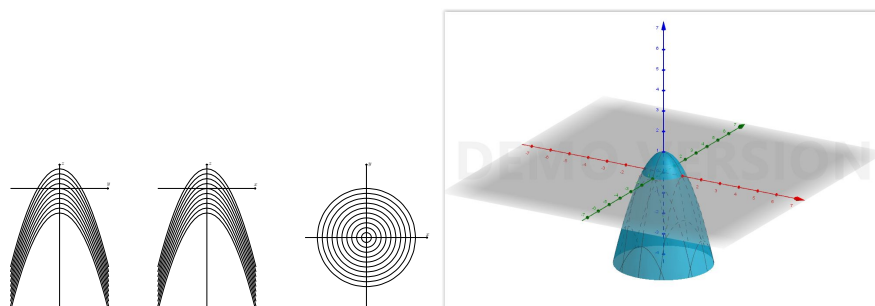


Slika 10.6: Izo- $x$ -ice, izo- $y$ -ice i izo- $z$ -ice te graf za  $g(x, y) = x^2$  (graf je izrađen programom Geogebra)

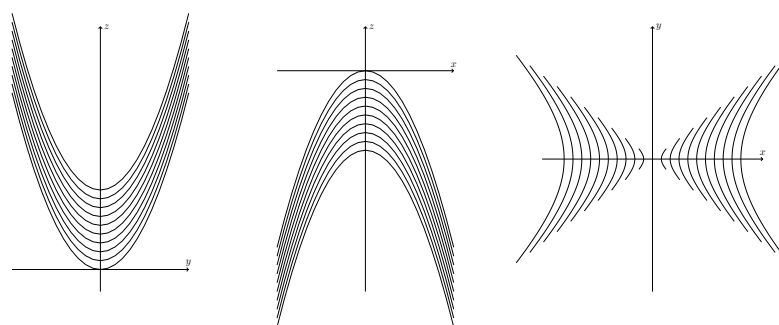
10.4 sredina). Izo- $z$ -ice, tj. nivo-krivulje, imaju jednadžbe  $x^2 + y^2 = z$  s konstantnim  $z$ , dakle se radi o kružnicama sa središtem u ishodištu  $(x, y)$ -koordinatnog sustava i (za  $z \geq 0$ ) polumjerima  $\sqrt{z}$  (slika 10.4 desno). Vidimo dakle da su presjeci grafa funkcije  $f$  s ravninama paralelnim  $(y, z)$ -ravniini odnosno  $(x, z)$ -ravniini prema gore otvorene parabole parabole, a odozgor gledano horizontalni presjeci izgledaju kao kružnice. Zaključujemo da je graf funkcije  $f$  rotacijski paraboloid kojemu je os pozitivni dio  $z$ -osi (slika 10.5).

Za funkciju  $g$ , izo- $x$ -ice su grafovi funkcija  $g_x(y) = x^2$  s konstantnim  $x$ , tj. konstantnih pozitivnih funkcija, dakle su to horizontalni pravci u gornjoj poluravnini  $(y, z)$ -koordinatnog sustava. Izo- $y$ -ice su  $g_y(x) = x^2$  (s konstantnim  $y$ ), dakle su one sve jedna te ista parabola  $z = x^2$  u  $(x, z)$ -koordinatnom sustavu. Izo- $z$ -ice, tj. nivo-krivulje, imaju jednadžbe  $x^2 = z$  s konstantnim





Slika 10.7: Izo- $x$ -ice, izo- $y$ -ice i izo- $z$ -ice te graf za  $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  (graf je izrađen programom Geogebra)

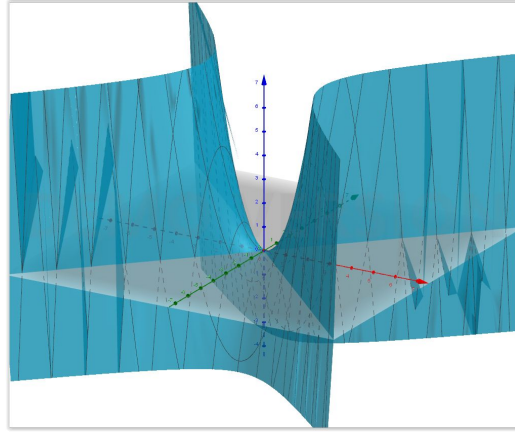


Slika 10.8: Izo- $x$ -ice, izo- $y$ -ice i izo- $z$ -ice za  $i(x, y) = x^2 - y^2$

$z \geq 0$ , što je ekvivalentno s  $|x| = \text{konstanta}$ , dakle su to parovi vertikalnih pravaca simetričnih s obzirom na  $y$ -os u  $(x, y)$ -koordinatnog sustava (prve tri ilustracije u na slici 10.6). Zaključujemo da je graf funkcije  $g$  parabolični otvoreni cilindar koji „leži na”  $y$ -osi (slika 10.6 desno).

Budući da je  $h(x, y) = 1 - f(x, y)$ , lako je zaključiti da su izo- $x$ -ice, izo- $y$ -ice i izo- $z$ -ice za funkciju  $h$  dane prvim trima slikama 10.7, a da je graf funkcije  $h$  prikazan slikom 10.7 desno.

Najzanimljivije osobine ima funkcija  $i$ . Njezine izo- $x$ -ice izgledaju kao izo- $x$ -ice funkcije  $f$ , a izo- $y$ -ice izgledaju kao izo- $y$ -ice funkcije  $h$  (spuštene za 1). Izo- $z$ -ice imaju jednažbe  $x^2 - y^2 = z$  s konstantnim  $z$  te se radi o istostranim hiperbolama u  $(x, y)$ -ravnini (slika 10.8). Dakle, ishodište je na grafu ove funkcije (slika 10.9) i ta točka iz smjera  $x$ -osi izgleda kao točka maksimuma, a iz smjera  $y$ -osi kao točka minimuma. Takve situacije su jedan od razloga zašto je teorija funkcija više varijabli drugačija i kompliciranija nego za funkcije jedne varijable.



Slika 10.9: Graf funkcije  $z(x, y) = x^2 - y^2$  (slika izrađena programom Geogebra)

### 10.1.1 Parcijalne derivacije

Podsjetimo se definicije derivacije realne funkcije  $f$  jedne varijable u točki  $c$ :

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Uz oznaku  $\Delta x = x - c$  i diferencijalnu simboliku ta definicija poprima oblik

$$\frac{df}{dx}(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Skalarne funkcije više varijabli se s jednakim pravom mogu derivirati po bilo kojoj od svojih varijabli, ali ne po njih više od jedne istovremeno. Tako dobivene derivacije nazivamo parcijalnim derivacijama. Kao što prva derivacija realne funkcije jedne varijable aproksimira relativnu promjenu vrijednosti funkcije (u odnosu na određenu točku domene), tako i parcijalne derivacije prvog reda aproksimiraju relativnu promjenu vrijednosti skalarne funkcije više varijabli pri maloj promjeni *samo jedne* od njenih nezavisnih varijabli, dok se druge drže konstantnim. Preciznije:

**Definicija 79 (Parcijalne derivacije prvog reda).** Neka je  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  skalarne funkcija s  $n$  varijabli  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Parcijalna derivacija (prvog reda) od  $f$  po varijabli  $x_i$  u točki  $X \in D_f$  je, ako postoji, limes

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(X + \Delta x e_i) - f(X)}{\Delta x},$$

gdje je  $s e_i$  označen  $i$ -ti vektor kanonske baze od  $\mathbb{R}^n$ , a zbrajanje  $X + \Delta x e_i$  je zbrajanje u vektorskom prostoru  $\mathbb{R}^n$ .<sup>2</sup>

Raspišimo prethodnu definiciju za slučaj funkcije  $f$  s dvije varijable  $x$  i  $y$  njene parcijalne derivacije prvog reda po  $x$  i  $y$  u točki  $X = (x_0, y_0)$  su definirane limesima

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

**Primjer 374.** Neka je  $f$  skalarna funkcija triju varijabli  $x, y$  i  $z$ . Neka je  $X = (x_0, y_0, z_0)$  jedna točka njezine domene. Parcijalna derivacija prvog reda od  $f$  po varijabli  $y$  u točki  $X$  je, ako postoji,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}.$$

Manje formalno možemo reći: Parcijalna derivacija prvog reda funkcije po nekoj varijabli dobije se tako da funkciju jednom deriviramo kao da joj je to jedina varijabla, odnosno za vrijeme deriviranja ostale varijable tretiramo kao konstante. No, deriviranjem ne možemo izgubiti varijable!

**Primjer 375.** Neka je  $f(x, y) = x + \exp(y)$ . Za svaku točku  $X = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X) = \exp(y),$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$  i  $\frac{\partial f}{\partial y}$  su i dalje skalarne funkcije dviju varijabli  $x$  i  $y$  (pri čemu je  $\frac{\partial f}{\partial x}$  konstantna s obzirom na obje varijable, a  $\frac{\partial f}{\partial y}$  je konstantna s obzirom na  $x$ ).

U ovom poglavlju nećemo posebno razmatrati situacije kad neka funkcija u nekoj točki domene ne posjeduje neku od parcijalnih derivacija (eventualne takve situacije je u formulama lako prepoznati ako znamo općenita svojstva deriviranja), te ćemo pretpostavljati da su sve funkcije, poput one iz prethodnog primjera, derivabilne na svojim domenama.<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Dakle,  $X + \Delta x e_i$  je  $n$ -torka koja ima sve koordinate iste kao  $X$  osim  $i$ -te koja je povećana za  $\Delta x$ .

<sup>3</sup>Dok su izrazi za skalarne funkcije građeni isključivo iz elementarnih funkcija i apsolutne vrijednosti, jedine iznimke od derivabilnosti mogu biti u nultočkama apsolutne vrijednosti i funkcija korijena i točkama za koje izrazi uvršteni u arkus-sinus ili arkus-kosinus daju  $\pm 1$ .

Iz prethodnog je vidljivo da funkcija ima onoliko parcijalnih derivacija prvog reda koliko ima nezavisnih varijabli. Uobičajeno je umjesto  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$  pisati jednostavno  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ , no treba biti svjestan da ta oznaka označava funkciju koja točkama  $X \in \Omega$  pridružuje brojeve (usporedite:  $f'(c)$  je broj, a  $f'$  je funkcija).

**Primjer 376.** *Uzmimo skalarnu funkciju triju varijabli definiranu formulom*

$$f(x, y, z) = \frac{x + yz^2}{e^x}.$$

*Njene tri parcijalne derivacije prvog reda su:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx}(xe^{-x} + yz^2e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} - yz^2e^{-x} = \frac{1 - x - yz^2}{e^x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dy}(xe^{-x} + z^2e^{-x}y) = 0 + z^2e^{-x} = \frac{z^2}{e^x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d}{dz}(xe^{-x} + ye^{-x}z^2) = 0 + 2ye^{-x}z = \frac{2yz}{e^x}.$$

**Napomena 34.**  $\frac{\partial}{\partial \heartsuit}$  je linearan operator na prostoru funkcija kojima je  $\heartsuit$  jedna od varijabli i za koje derivacija po  $\heartsuit$  postoji.

Budući da parcijalne derivacije aproksimiraju relativnu promjenu funkcije kad joj se jedna varijabla malo promijeni, a da mnoge termodinamičke veličine nisu mjerljive na tzv. apsolutnoj ljestvici, nego su mjerljive samo njihove relativne promjene, parcijalne derivacije su česte kao definicije raznih veličina u (kemijskoj) termodinamici.

**Primjer 377.** *Ako je  $Y$  neko ekstenzivno svojstvo termodinamičkog sustava,<sup>4</sup> pripadni reakcijski gradijent se definira kao  $\Delta_r Y = \frac{\partial Y}{\partial \xi}$ . Tu je  $\xi$  doseg reakcije, definiran s  $\frac{d\xi}{dn_J} = \frac{1}{\nu_J}$ , gdje je  $J$  bilo koji sastojak sustava. Posebno često se koristi reakcijski gradijent Gibbsove energije  $G$ , zvan reakcijska Gibbsova energija:*

$$\Delta_r G = \frac{\partial G}{\partial \xi}.$$

Ponekad, posebice u termodinamičkom kontekstu u kojem se često mijenjanju odabiri zavisne i nezavisnih varijabli i nije uobičajeno pri zadavanju funkcijama u zgradama nabrojati njihove nezavisne varijable, koristi se proširena notacija za parcijalne derivacije:

$$\left( \frac{\partial Y}{\partial \heartsuit} \right)_{x, y, \dots}$$

<sup>4</sup>Ekstenzivna su ona svojstva čiji su iznosi razmjerni veličini sustava, primjerice volumen  $V$  ili unutrašnja energija  $U$ .

je oznaka za parcijalnu derivaciju skalarne funkcije (zavisne varijable)  $Y$  po njezinoj varijabli  $\heartsuit$  dok su njezine ostale nezavisne varijable  $x, y, \dots$  pri deriviranju konstantne.

**Primjer 378.** *U izohornim okolnostima (konstantan  $V$ ) parcijalna derivacija prvog reda unutrašnje energije  $U$  po temperaturi  $T$  naziva se izohornim toplinskim kapacitetom:*

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V, p, n_1, n_2, \dots, n_k}.$$

Vidimo da su  $U$  i  $C_V$  skalarne funkcije nezavisnih varijabli  $T$  (po njoj smo derivirali) te volumena sustava  $V$ , tlaka sustava  $p$ , te množina  $n_1, \dots, n_k$  sastojaka sustava (pri čemu su one pri deriviranju bile konstantne).

Za skalarne funkcije  $f$  dviju varijabli,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  je koeficijent smjera tangente na izo- $y$ -icu koja odgovara vrijednosti  $y = y_0$ , a u točki s apscisom  $x_0$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  je koeficijent smjera tangente na izo- $x$ -icu koja odgovara vrijednosti  $x = x_0$ , a u točki s apscisom  $y_0$ .

**Primjer 379.** *Ako je  $f(x, y) = y + \sin x$ , onda je  $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x$ . Stoga je  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \cos 0 = 1$  koeficijent smjera tangente na izo- $y$ -icu  $z = \sin x + 0$  u njeznoj točki s apscisom  $x = 0$ .*

**Primjer 380.** *Za funkciju iz primjera 376 je  $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 1, 2) = 4 > 0$  pa možemo zaključiti da  $f$  raste u blizini točke  $(0, 1, 2)$  ako se  $z$  malo poveća, a  $x$  ostaje 0 i  $y$  ostaje 1.*

Pravila za računanje parcijalnih derivacija su ista kao za funkcije jedne varijable (linearnost kao i pravila za deriviranje produkta i kvocijenta funkcija), s jednom važnom iznimkom: lančano pravilo (pravilo za deriviranje kompozicije funkcije). Znamo da za funkcije jedne varijable vrijedi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

i to su mnogi zasigurno doživjeli kao „kraćenje diferencijala”  $dy$ . No, u slučaju funkcija više varijabli ne možemo postupati tako. Lančano pravilo za funkcije više varijabli objasniti ćemo u odjeljku 10.4.2. Sad pak ističemo jednu formulu iz koje se vidi da se parcijalni diferencijali ne smiju „kratiti”, a koja vrijedi za svake tri međuzavisne varijable  $x, y$  i  $z$ :

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Ta je formula poznata pod nazivno **Eulerovo cikličko pravilo**. Kad bismo mogli „kratiti” parcijalne diferencijale, na lijevoj strani bismo dobili 1, a ne  $-1$ .

**Primjer 381.** U izotermnim odnosno izoentropijskim okolnostima sljedećim je formulama definirana izotermna odnosno adijabatska kompresibilnost (stlačivost):

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T,$$

$$\kappa_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S.$$

Opće definicije izohornog i izobarnog toplinskog kapaciteta su:

$$C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V,$$

$$C_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p.$$

Pokazat ćemo da vrijedi

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}.$$

Po definiciji toplinskih kapaciteta imamo

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p}{\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V}.$$

Korištenjem Eulerovog cikličkog pravila u brojniku i u nazivniku dobije se da je prethodni kvocijent dalje jednak

$$\frac{-\left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_S}{-\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_S} = \frac{\left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_T \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T}{\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_S \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_S} = \frac{\left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T}{\left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}.$$

U zadnjem redu smo za dobivanje prve jednakosti koristili formulu  $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}$ , koja se može dokazati i za funkcije više varijabli, za dobivanje druge smo lančano pravilo za funkcije jedne varijable u brojniku i nazivniku (jer se u brojniku situacija svela na derivacije za koje se iste varijable drže konstantim, a tako i u nazivniku), a za dobivanje zadnje smo razlomak proširili faktorom  $-\frac{1}{V}$ .

Osim parcijalnih derivacija prvog reda, moguće je promatrati i parcijalne derivacije viših redova. Pritom, budući da je svaka parcijalna derivacija prvog reda skalarne funkcije također skalarne funkcija istih varijabli (njih  $n$ ), imamo po  $n$  parcijalnih derivacija drugog reda koje se računaju iz svake od parcijalnih derivacija prvog reda, dakle ukupno  $n^2$  parcijalnih derivacija drugog reda. Primjerice, ako je polazna funkcija  $f$  ovisila o dvije varijable  $x$  i  $y$ , njene dvije parcijalne derivacije  $\frac{\partial f}{\partial x}$  i  $\frac{\partial f}{\partial y}$  možemo ponovno derivirati po  $x$  i po  $y$  čime dobivamo četiri parcijalne derivacije drugog reda. To su  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  (funkciju  $f$  deriviramo po  $x$  i zatim njenu parcijalnu derivaciju  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ponovno po  $x$ ),  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  (funkciju  $f$  deriviramo po  $x$  i zatim njenu parcijalnu derivaciju  $\frac{\partial f}{\partial x}$  po  $y$ ),  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  (funkciju  $f$  deriviramo po  $y$  i zatim njenu parcijalnu derivaciju  $\frac{\partial f}{\partial y}$  po  $x$ ),  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  (funkciju  $f$  deriviramo po  $y$  i zatim njenu parcijalnu derivaciju  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ponovno po  $y$ ). Općenito definiramo:

**Definicija 80** (Parcijalne derivacije drugog reda). *Neka je  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  skalarne funkcija s  $n$  varijabli koja posjeduje<sup>5</sup> parcijalnu derivaciju prvog reda  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  po varijabli  $x_i$ . Parcijalna derivacija drugog reda od  $f$  po varijabli  $x_i$  pa po  $x_j$  u točki  $X \in D_f$  je, ako postoji,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (X).$$

Iz definicije je vidljivo i zašto redoslijed deriviranja kod parcijalnih derivacija drugog reda pišemo zdesna ulijevo: oznaka  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  je kratica za  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$ . Time se ističe da je  $\frac{\partial}{\partial y}$  (deriviranje po varijabli  $y$ ) linearan operator.

**Primjer 382.** *Odredimo parcijalne derivacije drugog reda za funkciju iz primjera 376. Kako se radi o funkciji tri varijable, dobit ćemo devet parcijalnih derivacija drugog reda:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{-2 + x + yz^2}{e^x}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -\frac{z^2}{e^x}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= -\frac{2yz}{e^x}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{z^2}{e^x}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} &= \frac{2z}{e^x}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= -\frac{2yz}{e^x}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= \frac{2z}{e^x}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{2y}{e^x}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Kad kažemo da funkcija posjeduje parcijalnu derivaciju mislimo: na odgovarajućem dijelu domene, u pravilu na cijeloj domeni, postoji limes iz definicije.

U prethodnom primjeru može se primijetiti da vrijedi  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$  i  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ . To nije slučajno — u većini „normalnih” slučajeva kod određivanja parcijalnih derivacija drugog reda nije potrebno paziti na redoslijed jer vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Preciznije, vrijedi

**Teorem 53 (Schwarz).** *Ako u točki  $X \in D_f$  postoje i neprekidne<sup>6</sup> su parcijalne derivacije  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  i  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ , onda su one jednake (u točki  $X$ ).*

Posljedično u većini slučajeva za funkciju od  $n$  varijabli nije potrebno računati  $n^2$  već samo  $\frac{n(n+1)}{2}$  parcijalnu derivaciju drugog reda (usporedite primjer 382 u kojem vidimo da je od  $n^2 = 9$  parcijalnih derivacija drugog reda samo njih  $\frac{n(n+1)}{2} = 6$  različito).

Radi preglednog zapisa, a s obzirom na kasnije korištenje za određivanje lokalnih ekstrema skalarnih funkcija, ovdje uvodimo zapis parcijalnih derivacija drugog reda u matricu poznatu kao Hesseova matrica.

**Definicija 81 (Hesseova matrica).** *Za skalarnu funkciju  $f$  od  $n$  varijabli koja posjeduje sve parcijalne derivacije drugog reda (u točki  $X$  iz svoje domene) njena Hesseova matrica (u toj točki) je matrica  $H = H_f(X)$  koja na poziciji  $(i, j)$  ima iznos  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(X)$ .*

Zbog Schwarzovog teorema, za funkcije s neprekidnim parcijalnim derivacijama drugog reda (a to su gotovo sve koje se mogu susresti u primjenama) Hesseova matrica je simetrična.

**Primjer 383.** *Hesseova matrica funkcije  $f$  iz primjera 382 i 382 u svakoj točki  $(x, y, z)$  je matrica*

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \exp(-x) \begin{pmatrix} -2 + x + yz^2 & -z^2 & -2yz \\ -z^2 & 0 & 2z \\ -2yz & 2z & 2y \end{pmatrix}.$$



**Ponovimo bitno...** Skalarne funkcije više varijabli su funkcije kojima je domena podskup od  $\mathbb{R}^n$ , a kodomena podskup od  $\mathbb{R}$ . Graf skalarne

<sup>6</sup>Pojam neprekidnosti nećemo definirati za funkcije više varijabli. Smisao je i dalje kao prije: funkcija je neprekidna ako male promjene njenih varijabli mogu izazvati samo male promjene vrijednosti funkcije. Funkcije koje su opisane formulom koja je oblika elementarne funkcije su neprekidne na svojoj domeni.



funkcije  $n$  varijabli se nalazi u  $\mathbb{R}^n$  te se može vizualizirati samo za funkcije dviju varijabli.

Parcijalna derivacija (prvog reda) takve funkcije po nekoj od njezinih varijabli je derivacija te funkcije po toj varijabli ako pri deriviranju ostale varijable smatramo konstantama. Parcijalne derivacije drugog reda su parcijalne derivacije parcijalnih derivacija prvog reda i mogu se uredno ispisati u Hesseovu matricu (retci odgovaraju varijablama po kojima se derivira u drugom koraku, a stupci varijablama po kojima se derivira u prvom koraku). Skalarna funkcija s  $n$  varijabli ima  $n$  parcijalnih derivacija prvog reda i  $n^2$  parcijalnih derivacija drugog reda, pri čemu za većinu funkcija vrijedi da pri dvostrukom deriviranju nije bitan redoslijed varijabli u deriviranju, tj. za većinu funkcija je Hesseova matrica simetrična. 🐣🐣🐣

### 10.1.2 Gradijent, krivulje u ravnini i plohe u prostoru

Pogledajmo skalarnu funkciju dviju varijabli zadanu formulom

$$f(x, y) = y \ln x.$$

Njezine parcijalne derivacije prvog reda su

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln x.$$

Dakle, za svaki uređeni par  $X = (x, y)$  u domeni od  $f$  dobili smo pripadni uređeni par parcijalnih derivacija:

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{y}{x}, \ln x \right).$$

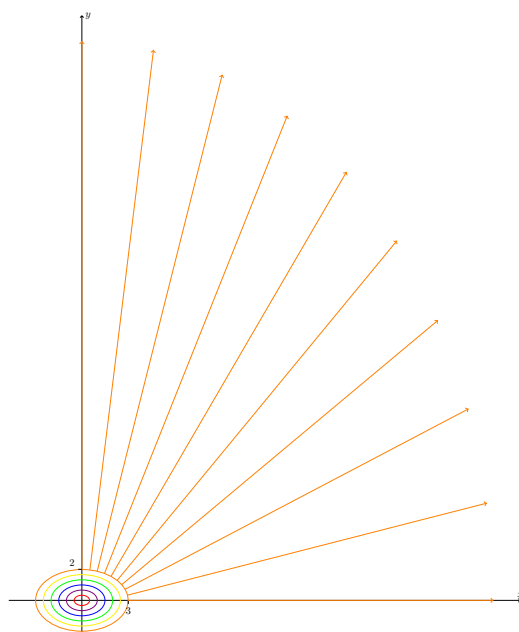
Taj par nazivamo gradijentom od  $f$  u točki  $X$  i označavamo s  $\nabla f(X)$ :

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{y}{x}, \ln x \right).$$

Primjerice, gradijent od  $f$  u  $(1, 1)$  je  $\nabla f(1, 1) = (1, 0)$ , a  $\nabla f(e, e^2) = (e, 1)$ .

**Definicija 82 (Gradijent).** *Gradijent skalarne funkcije  $f$  u nekoj točki  $X = (x_1, \dots, x_n)$  njene domene je vektor  $\nabla f(X)$  prvih parcijalnih derivacija od  $f$  izračunatih u toj točki:*

$$\nabla f(X) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \dots \right).$$



Slika 10.10: Nivo-krivulje funkcije  $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$  i gradijent duž dijela jedne od njih

Gradijent je za funkcije dviju i triju varijabli moguće i vizualizirati: Ako elemente domene  $X$  interpretiramo kao točke u koordinatnoj ravnini odnosno prostoru, gradijent funkcije u pojedinoj točki se vizualizira kao geometrijski vektor  $\nabla f(X)$  s početkom u  $X$ .

**Primjer 384.** Neke nivo-krivulje funkcije  $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$  prikazane su na slici 10.10. Nivo-krivulja koja odgovara vrijednosti  $z = 1$  je elipsa jednadžbe  $4x^2 + 9y^2 = 1$  (narančasto na slici 10.10). Ako za točke na toj elipsi izračunamo pripadne gradijente  $\nabla f(x, y) = (8x, 18y)$  i ucrtamo ih, dobit ćemo vektore kao na slici 10.10. Primjerice, točki  $(\frac{3}{2}, \sqrt{3})$  pridružen je gradijent  $[12, 18\sqrt{3}]$ .

Uočimo posebno da je u svim istaknutim točkama prethodnog primjera gradijent od  $f$  u pojedinoj točki  $X \in D_f$  nivo-krivulje od  $f$  okomit na tangentu na nivo-krivulju u toj točki. To nije slučajno. Ako je krivulja u ravnini zadana jednadžbom  $f(x, y) = a$ , onda je u svakoj točki  $X = (x, y)$  te krivulje (dakle, točki domene od  $f$  u kojoj  $f$  postiže vrijednost  $a$ )  $\nabla f(X)$  vektor okomit na tangentu u toj točki. Budući da je  $\nabla f(X) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right]$ , vidimo da

je koeficijent smjera tangente u točki  $X$  na krivulju  $f(x, y) = a$  jednak

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(X)}{\frac{\partial f}{\partial y}(X)}.$$

To je upravo ono što smo u odjeljku 3.10 dobili tzv. implicitnim deriviranjem. Posebno, vidimo da će u točki  $X$  imati tangentu<sup>7</sup> točno ako  $\nabla f(X)$  nije nulvektor, dakle jednadžbom  $f(x, y) = a$  je zadana „lijepa, zaobljena“ krivulja, točnije krivulja koja u svakoj točki posjeduje tangentu, točno ako je  $\nabla f(X) \neq [0, 0]$  za sve parove  $(x, y)$  koji zadovoljavaju  $f(x, y) = a$ .

Proširimo sad to razmišljanje o nivo-krivuljama i gradijentima duž njih s funkcija dviju varijabli na funkcije triju varijabli. Imat ćemo jednadžbe oblika  $f(x, y, z) = a$  koje predstavljaju podskupove domene funkcije triju varijabli  $f$  (onaj dio domene na kojem ta funkcija postiže vrijednost  $a$ ), a takav podskup će biti „lijep“ ako ni u kojoj točki tog nivo-skupa gradijent od  $f$  nije nulvektor. Takvi nivo-skupovi zovu se plohe:

**Definicija 83 (Ploha).** Skup  $\mathcal{P}$  svih točaka  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  koje zadovoljavaju jednadžbu oblika

$$f(x, y, z) = a,$$

gdje je  $a \in \mathbb{R}$  konstanta i  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  skalarna funkcija triju varijabli takva da je  $\nabla f(x, y, z) \neq [0, 0, 0]$  za svaku točku  $(x, y, z) \in \mathcal{P}$  zove se ploha (u prostoru).

**Primjer 385.** Znamo da je s  $2x - y + 5z = 3$  zadana ravnina u prostoru. Očito se radi o jednadžbi oblika  $f(x, y, z) = a$  uz  $f(x, y, z) = 2x - y + 5z$  i  $a = 3$ . U svakoj točki (ne samo onoj koja zadovoljava tu jednadžbu) je  $\nabla f(x, y, z) = [2, -1, 5] \neq [0, 0, 0]$ , dakle je ova ravnina primjer plohe. Analogno se dokazuje da je i svaka druga ravnina ploha u prostoru.

U nastavku i za koordinate geometrijskih vektora (koje su u ovom poglavlju uvijek dane s obzirom na standardnu ortonormiranu bazu) koristimo, kao za točke i apstraktnije vektore, okrugle zagrade.

**Primjer 386.** Promotrimo jednadžbu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Uzmimo  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Tada je  $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z)$ . Jedini slučaj kad bi taj vektor bio nulvektor je ako ga računamo u ishodištu. No, ishodište očigledno ne zadovoljava jednadžbu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , pa vidimo da je  $\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  za sve točke koje zadovoljavaju  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , tj. ta

---

<sup>7</sup>Ako je  $\frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0$ , tangenta je horizontalna, ako je  $\frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0$  tangenta je vertikalna, ali ako je  $\frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0$  tangente nema.

jednadžba predstavlja plohu u prostoru (jediničnu sferu). Analogno se vidi da je i svaka druga sfera  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$  s pozitivnim polumjerom  $r$  ploha.

Rekli smo da su grafovi skalarnih funkcija dviju varijabli plohe u prostoru. Provjerimo sad je li to u skladu s gornjom definicijom. Neka je  $f$  skalarna funkcija dviju varijabli  $x$  i  $y$ . Definirajmo funkciju  $\tilde{f}$  jednadžbom  $\tilde{f}(x, y, z) = f(x, y) - z$ . Nivo-skup koji odgovara vrijednosti 0 za  $\tilde{f}$  je skup jednadžbe  $f(x, y) - z = 0$ , dakle to je točno graf od  $f$ . Gradijent od  $\tilde{f}$  je

$$\nabla \tilde{f} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right).$$

Budući je treća koordinata tog gradijenta uvijek  $-1$ , slijedi da on ni za koji odabir  $x$  i  $y$  ne može biti nulvektor, čak ni kad bi gradijent od  $f$  bio nulvektor. Stoga za svaku skalarnu funkciju  $f$  dviju varijabli vrijedi da je njen graf ploha u prostoru.

Primijetimo da je u primjeru 384 vidljivo, a vrijedi i općenito: U svakoj točki  $X = (x_0, y_0)$  krivulje zadane s  $f(x, y) = a$  orijentacija vektora  $\nabla f(X)$  pokazuje smjer (unutar domene) najbržeg porasta vrijednosti  $f$ . Kao i u slučaju dviju varijabli i nivo-krivulja, vrijedi i za slučaj triju varijabli i ploha: Smjer i orijentacija gradijenta  $\nabla f(X)$  u točki  $X = (x_0, y_0, z_0)$  plohe jednadžbe  $f(x, y, z) = a$  pokazuje smjer pomakom u kojem dolazi do najvećeg porasta vrijednosti funkcije  $f$ .

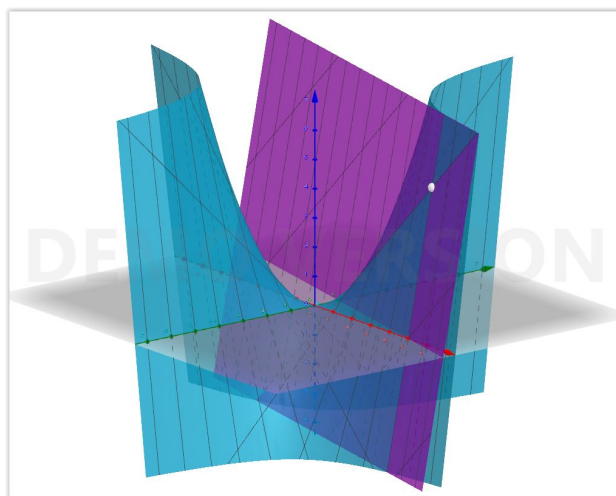
**Primjer 387.** *Ako je  $\theta$  funkcija koja opisuje trenutnu temperaturu u pojedinoj točki  $X$  Zemljine atmosfere, onda vektor  $\nabla \theta(X)$  pokazuje u kojem smjeru se objekt na poziciji  $X$  treba pomaknuti tako da mu bude što toplije.*

U slučaju ploha nema smisla govoriti o tangentama na njih, već o tangencijalnim ravninama (koje sadrže sve tangente u promatranoj točki plohe). Kao što smo za krivulju  $f(x, y) = a$  zahtijevali da  $\nabla f(X)$  ne bude nulvektor ni u kojoj njezinoj točki  $X$  zato da bi u svakoj točki imala tangentu, tako i zahtjev da  $\nabla f(X)$  ne bude nulvektor ni u kojoj točki plohe zadane s  $f(x, y, z) = a$  služi tome da u svakoj točki te plohe postoji tangencijalna ravnina:

**Definicija 84 (Tangencijalna ravnina).** *Tangencijalna ravnina na plohu jednadžbe  $f(x, y, z) = a$  u nekoj njezinoj točki  $X = (x_0, y_0, z_0)$  je ravnina kroz tu točku kojoj je  $\nabla f(X)$  vektor normale.*

Prema odjeljku 6.2.2 zaključujemo: **Jednadžba tangencijalne ravnine** na plohu  $f(x, y, z) = a$  u točki  $X = (x_0, y_0, z_0)$  te plohe je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(X) \cdot (z - z_0) = 0.$$



Slika 10.11: Graf funkcije  $f(x, y) = xy$  (slika izrađena programom Geogebra)

**Primjer 388.** Odredimo jednadžbu tangencijalne ravnine na jediničnu sferu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  u točki  $(1, 0, 0)$ :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z),$$

$$\nabla f(1, 0, 0) = (2, 0, 0),$$

pa je jednadžba tražene tangencijalne ravnine dana s  $2(x - 1) + 0(y - 0) + 0(z - 0) = 0$ , tj.  $x = 1$ .

**Primjer 389.** Na slici 10.11 plavo je prikazana ploha koja je graf funkcije  $f(x, y) = xy$ . Bijelo je istaknuta jedna točka te plohe,  $T(5, 1, 5)$  (za  $x = 5$  i  $y = 1$  je  $z = f(x, y) = 5$ ). Ljubičasto je prikazana tangencijalna ravnina u toj točki. Njezina jednadžba je  $z = x + 5y - 3$ . Naime, gradijent od  $f$  u ovom slučaju daje (kako smo vidjeli dokazujući da su grafovi funkcija dviju varijabli plohe) prve dvije koordinate vektora normale, a treća je uvijek  $-1$ :

$$\vec{n} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) = (1, 5, -1).$$

Stoga ta tangencijalna ravnina ima jednadžbu  $(x - 5) + 5(y - 1) - (z - 5) = 0$ , odnosno  $x + 5y - z = 5$ .

Još jednom ističemo: Kao što su implicitno zadane krivulje u ravnini nivo-skupovi (tj. podskupovi domene) za funkcije dviju varijabli, a ne njihovi

grafovi, tako su i plohe nivo-skupovi, a ne grafovi, funkcija *triju* varijabli i nalaze se unutar njihovih domena. Kao što su neke krivulje u ravnini grafovi realnih funkcija jedne varijable, tako su i neke plohe u prostoru grafovi skalarnih funkcija dviju varijabli.



**Ponovimo bitno...** Gradijent  $\nabla f(X)$  skalarne funkcije  $f$  više varijabli u nekoj točki  $X$  njene domene je uređena  $n$ -torka njezinih parcijalnih derivacija prvog reda izračunatih u toj točki. Za skalarne funkcije dviju varijabli  $\nabla f(X)$  je vektor okomit na tangentu u točki  $X$  odgovarajuće nivo-krivulje od  $f$  (krivulje jednadžbe  $f(x, y) = f(X)$ ) i zato zahtijevamo da taj gradijent ni u kojoj točki nivo-krivulje ne smije biti nulvektor. Ploha u prostoru je nivo-skup skalarne funkcije triju varijabli uz uvjet da ni u kojoj točki plohe gradijent te funkcije nije nulvektor. Tangencijalna ravnina na plohu jednadžbe  $f(x, y, z) = a$  je ravnina kroz točku  $X$  plohe kojoj je vektor normale jednak  $\nabla f(X)$ . 

## 10.2 Ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Pogledajmo ponovno grafove skalarnih funkcija dviju varijabli na slikama 10.5 i 10.7. Na njima su uočljive točke minimuma odnosno maksimuma, a vidljivo je i da su u tim točkama tangencijalne ravnine na grafove horizontalne, što prema prethodnom odjeljku znači da je u tim točkama gradijent funkcije čiji su to grafovi nulvektor.

**Definicija 85 (Lokalni i globalni ekstremi skalarnih funkcija).** Za skalarnu funkciju  $n$  varijabli  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  točku  $X_0 \in D_f$  zovemo

- točkom lokalnog minimuma funkcije  $f$  ako za sve  $X \in D_f$  iz neke okoline<sup>8</sup> od  $X_0$  vrijedi  $f(X) \geq f(X_0)$ ;
- točkom lokalnog maksimuma funkcije  $f$  ako za sve  $X \in D_f$  iz neke okoline od  $X_0$  vrijedi  $f(X) \leq f(X_0)$ ;
- točkom globalnog minimuma funkcije  $f$  ako za sve  $X \in D_f$  vrijedi  $f(X) \geq f(X_0)$ ;

<sup>8</sup>Okolinu točke  $X \in \mathbb{R}^n$  čini svaki otvoren skup koji sadrži  $X$ . Otvoreni skupovi su malo napredniji matematički pojam, no možemo ih zamišljati kao skupove koji ne sadrže svoje rubove. Npr. u ravnini  $\mathbb{R}^2$  primjer otvorenog skupa je nutrina bilo kojeg kruga, poligona, ...

- točkom globalnog maksimuma funkcije  $f$  ako za sve  $X \in D_f$  vrijedi  $f(X) \leq f(X_0)$ .

Iznos  $f(X_0)$  se u svakom od tih slučajeva zove lokalnim odnosno globalnim minimumom odnosno maksimumom funkcije  $f$ .

Za funkcija dviju varijabli, lokalni ekstremi su aplikate „dna udolina” odnosno „vrhova bregova” na plohi koja je graf funkcije, dok su globalni ekstremi aplikate najviše odnosno najniže točke na čitavoj plohi. Pritom vrijedi kao i za funkcije jedne varijable: Jedinstvenost lokalnog ekstrema ne mora značiti da je on globalni ekstrem (vidi npr. sliku 10.12 i primjer 390).

Metode određivanja globalnih ekstrema skalarnih funkcija više varijabli su komplicirane i nećemo ih ovdje opisivati. S druge strane, postupak određivanja lokalnih ekstrema za funkcije koje posjeduju sve parcijalne derivacije prvog i drugog reda je relativno jednostavan i analogan postupku za funkcije jedne varijable.

### 10.2.1 Lokalni ekstremi skalarnih funkcija

Kao i kod realnih funkcija jedne varijable, prvo se (pomoću derivacija prvog reda) odrede „kandidati” za točke lokalnog ekstrema, a zatim se (pomoću derivacija drugog reda) provjeri radi li se o točki lokalnog ekstrema i ako da, radi li se o minimumu ili maksimumu. Budući da ne razmatramo situacije u kojima neka parcijalna derivacija ne postoji, za nas su ovdje jedini „kandidati” za točke ekstrema stacionarne točke.

**Definicija 86 (Stacionarna točka).** *Stacionarna točka skalarne funkcije više varijabli je nultočka njenog gradijenta, tj. element domene te funkcije u kojemu su sve parcijalne derivacije prvog reda jednake nuli.*

Ako se radi o funkciji dviju varijabli, u stacionarnoj je točki tangencijalna ravnina na graf paralelna s  $(x, y)$ -ravninom.

**Primjer 390.** *Neka je funkcija dviju varijabli zadana formulom*

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y.$$

*Njen gradijent je*

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 2xy, x^2 - 2y - 4),$$

*pa stacionarne točke dobijemo rješavanjem sustava*

$$3x^2 + 2xy = 0,$$

$$x^2 - 2y - 4 = 0.$$

Taj je sustav lako riješiti supstitucijom te se dobiju tri stacionarne točke funkcije  $f$ :  $S_1 = (0, -2)$ ,  $S_2 = (1, -\frac{3}{2})$  i  $S_3 = (-4, 6)$ .

Ulogu druge derivacije za ispitivanje je li pojedina stacionarna točka točka lokalnog ekstrema za funkcije više varijabli preuzima Hesseova matrica (definicija 81), točnije njezine minore.

**Definicija 87 (Minore kvadratne matrice).** Za kvadratnu matricu  $A \in M_n$  njene (glavne) minore su determinante kvadratnih matrica  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ ,  $A_n = A$ , gdje je  $A_k$  matrica koja se iz  $A$  dobije tako da uzmemo njenih prvih  $k$  redaka i  $k$  stupaca (tj.  $A_i = (a_{ij}) \in M_k$ ).

**Primjer 391.** Minore matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 9 & 10 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

su determinante

$$|1|, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 10 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 9 & 10 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & -9 \end{vmatrix}.$$

Uvjet za lokalne ekstreme skalarnih funkcija više varijabli glasi: Funkcija  $f$  u stacionarnoj točki  $S$  ima

- lokalni minimum, ako su sve minore Hesseove matrice  $H_f(S)$  pozitivne.
- lokalni maksimum, ako predznaci minora Hesseove matrice  $H_f(S)$  alterniraju počevši s negativnim.
- Ukoliko je neka od minora jednaka 0, tretiramo ju kao istovremeno pozitivnu i negativnu. To znači da ako bi razmatranje 0 bilo kao pozitivnog bilo kao negativnog broja svelo redoslijed predznaka na jedan od gore navedenih dvaju, onda je moguće da je  $S$  točka lokalnog ekstrema, ali je potrebno drugim metodama provjeriti radi li se stvarno o točki lokalnog ekstrema.



- U svim ostalim slučajevima govorimo o sedlastoj točki: **Sedlasta točka funkcije** je stacionarna točka koja nije točka ekstrema.

U slučaju funkcija jedne varijable primjer sedlaste točke je 0 za funkciju  $f(x) = x^3$ . Ipak, tu je situacija bitno jednostavnija nego kod funkcija više varijabli jer su jedine moguće sedlaste točke realne funkcije jedne varijable one stacionarne točke za koje funkcija u njihovoj okolini ili raste ili pada. Kod funkcija dviju varijabli osim takvih sedlastih točaka, moguće su i one koje ovisno o perspektivi gledanja na graf s (bar) jedne strane izgledaju kao lokalni minimumi i s (bar) jedne strane kao lokalni maksimumi (kao npr. ishodište na slici 10.9).

**Primjer 392.** Hesseova matrica za funkciju iz primjera 390 je

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}.$$

Provjerimo koje od stacionarnih točaka su joj točke lokalnih ekstrema, a koje su sedlaste. Uvrstimo ih redom u Hesseovu matricu, dobit ćemo

$$H_f(S_1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, H(f)(S_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, H(f)(S_3) = \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

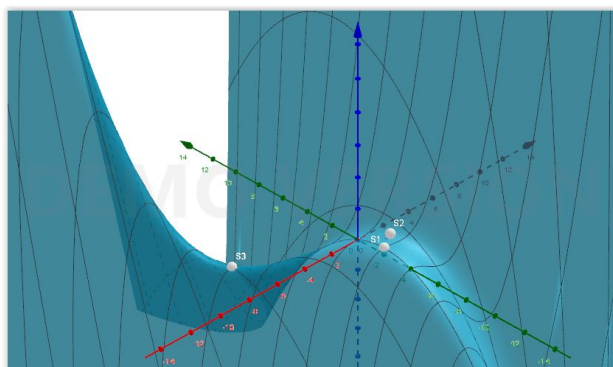
Minore od  $H_f(S_1)$  su  $-4$  i  $8$ , dakle imamo alternaciju  $-+$  te je  $S_1$  točka lokalnog maksimuma. Minore od  $H_f(S_2)$  su  $3$  i  $-10$ , dakle nemamo ni alternaciju  $++$  ni  $-+$  te je  $S_2$  sedlasta točka. Minore od  $H_f(S_3)$  su  $-12$  i  $-40$ , dakle je i  $S_3$  sedlasta točka. Na slici 10.12 možete vidjeti graf funkcije  $f$  iz ovog primjera i sve tri stacionarne točke.

## 10.2.2 Uvjetni ekstremi

U primijenjenim kontekstima često uz funkciju koju želimo maksimizirati ili minimizirati imamo i jedan ili više uvjeta koje tražena točka ekstrema treba zadovoljavati. Ti uvjeti mogu biti jednadžbe ili nejednadžbe koje se odnose na nezavisne varijable. Mi ćemo se ovdje baviti samo uvjetima koji su oblika jednadžbi.

**Primjer 393.** Zadatak je odrediti dimenzije otvorene kutije oblika kvadra maksimalnog obujma koja ima oplošje  $64 \text{ cm}^2$ . Ako su  $x$ ,  $y$  i  $z$  tražene duljine bridova te kutije (u centimetrima), zadatak se svodi na određivanje maksimuma funkcije

$$V(x, y, z) = x y z$$



Slika 10.12: Graf funkcije  $f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y$  ima dvije sedlaste točke i jednu točku lokalnog maksimuma koja nije točka globalnog maksimuma (slika izrađena programom Geogebra)

uz uvjet

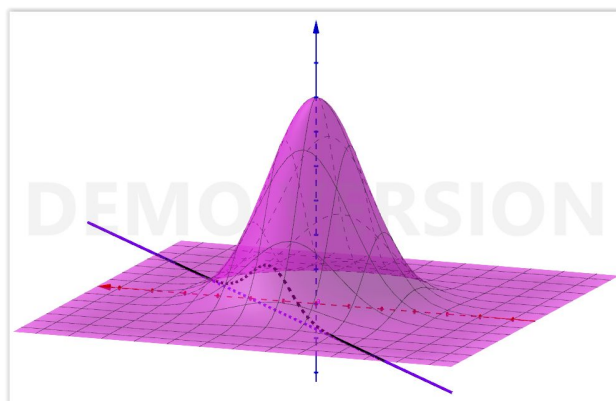
$$2xy + 2xz + yz = 64.$$

Pritom uočimo da nas zanimaju isključivo rješenja s  $x, y, z > 0$  (ako je neki od njih 0, volumen kutije je 0 i to očigledno nije maksimalni, već minimalni mogući volumen, a negativne duljine nemaju smisla). Dakle, tražimo tri pozitivna broja takva da im je umnožak što veći, a da pritom zadovoljavaju određenu jednakost.

Često je takve zadatke supstitucijom iz uvjeta moguće svesti na traženje lokalnih ekstrema bez uvjeta funkcije s manje varijabli, tj. na tehnike prethodnog odjeljka odnosno odjeljka 3.7.

**Primjer 394.** Funkcija  $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$  je definirana na  $\mathbb{R}^2$ . Postupak određivanja lokalnih ekstrema dao bi da ona postiže lokalni maksimum 1 u  $(0, 0)$  (štoviše, kako se radi o e na nepozitivne brojeve, jasno je da je  $f(x, y) \leq 1$  za sve  $x$  i  $y$  pa je to i globalni maksimum, što je vidljivo i na slici 10.13).

No, što ako nas zanimaju samo one točke  $(x, y)$  domene od  $f$  koje su na podskupu domene (pravcu) zadanom jednačbom  $x + y = 1$  (ljubičasto na slici 10.13)? Za koje točke tog pravca uvrštavanje u funkciju  $f$  daje (lokalno) maksimalne ili minimalne vrijednosti? Vizualno (vidi sliku 10.13) se radi o promatranju dijela plohe (crnoj crtkanoj krivulji na plohi) koja predstavlja dio grafa funkcije  $f$  koji je iznad pravca  $x + y = 1$ , dakle tražimo ekstreme samo na crno označenoj krivulji sa slike. U ovom slučaju, moguće je problem riješiti supstitucijom: Budući da nas zanimaju samo  $(x, y)$  sa svojstvom  $x +$



Slika 10.13: Graf funkcije  $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$  je ružičasta ploha; uvjet iz primjera 394 je ljubičasti pravac (slika izrađena programom Geogebra)

$y = 1$  tj.  $y = 1 - x$ , možemo to supstituirati u  $f$  čime dobivamo funkciju jedne varijable  $F(x) = \exp(-2x^2 + 2x - 1)$ . Ona postiže lokalni (štoviše, globalni) maksimum  $1/\sqrt{e}$  za  $x = 1/2$ , dakle se traženi uvjetni lokalni maksimum funkcije  $f$  uz uvjet  $x + y = 1$  postiže u  $(x, y) = (x, 1 - x) = (1/2, 1 - 1/2) = (1/2, 1/2)$ .

**Primjer 395.** Godine 1613., Johannes Kepler se u gradu Linzu ženio po drugi puta. Za svadbu je nabavio bačvu vina, no pri kupnji mu se čudnom učinila metoda kojom je trgovac određivao cijenu vina: Cijenu je doduže uzimao razmjernu volumenu, ali volumen je određivao pomoću štapa kojeg je provukao kroz rupu u sredini ruba bačve, dok ne dotakne jedan od kružnih krajeva na suprotnoj strani te zatim izmjerio koliko je dug mokri dio štapa. Dakle, cijena bačve je bila razmjerna duljini mokrog dijela štapa. Kepler je primijetio da mokri dio štapa može biti jednako dug za bačve različitih volumena te je odlučio odrediti za kakve je dimenzije bačve i danu duljinu mokrog dijela štapa (tj. danu cijenu) volumen bačve najveći. U tu je svrhu zamislio da su bačve valjkastog oblika. Kepler je dakle rješavao zadatak:

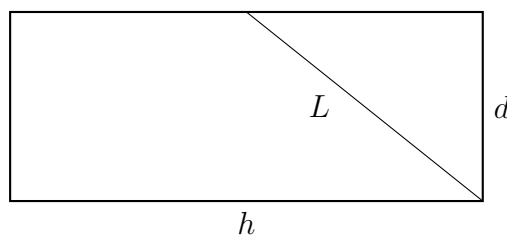
Koliko iznosi omjer promjera  $d$  i duljine  $h$  valjkaste bačve maksimalnog volumena  $V$  ako je fiksirana duljina  $L$  mokrog dijela štapa (slika 10.14)?

Volumen valjkaste bačve promjera  $d$  i visine  $h$  je

$$V(d, h) = r^2 h \pi = \frac{\pi}{4} d^2 h.$$

Uvjet kojeg imamo je da je

$$d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = L^2.$$



Slika 10.14: Ilustracija uz Keplerov problem bačve

Iz tog uvjeta vidimo da mora biti  $d^2 = L^2 - \frac{h^2}{4}$ , dakle smo funkciju volumena sveli na funkciju jedne varijable

$$v(h) = \frac{L^2\pi}{4}h - \frac{\pi}{16}h^3$$

s domenom  $[0, \infty)$ . Deriviranjem dobijemo  $v'(h) = \frac{L^2\pi}{4} - \frac{3\pi}{16}h^2 = 0$  pa imamo samo jednu stacionarnu točku  $h = \frac{2L}{\sqrt{3}}$ . Ona mora biti točka maksimuma jer je iz konteksta jasno da se minimum postiže u drugoj kritičnoj točki  $h = 0$ . Dakle,  $d^2 = \frac{2L^2}{3}$  pa je traženi omjer  $d : h = 1 : \sqrt{2}$ .

Kako vidimo, zajedničko prethodnim trima primjerima je da se radi o rješavanju sljedećeg tipa problema:

**Definicija 88 (Problem uvjetnog ekstrema).** Problemom uvjetnog (ili vezanog) ekstrema naziva se zadatak određivanja minimuma i/ili maksimuma skalarne funkcije s više varijabli, uz jedan ili više uvjeta koji su oblika jednadžbi s tim varijablama. Rješenja takvog problema nazivaju se uvjetnim ekstremima.

Jedna od metoda rješavanja problema uvjetnih ekstrema je, kako smo vidjeli u zadnja dva primjera, supstitucija pojedinih nepoznanica iz uvjeta i time svođenje problema na određivanje bezuvjetnih ekstrema funkcije s manje varijabli.

Općenitija je **metoda Lagrangeovih multiplikatora**. U njoj se pretpostavlja da su svi uvjeti zapisani u obliku

$$g(x, y, \dots) = 0.$$

Za svaki uvjet dodaje se po jedna nova varijabla  $\lambda$ , koju nazivamo Lagrangeovim multiplikatorom (dotičnog uvjeta). Ako je s  $f$  označena funkcija koju u našem problemu želimo maksimizirati odnosno minimizirati (tzv. ciljna funkcija), onda se Lagrangeova funkcija  $L$  problema uvjetnog ekstrema formira

po sljedećem pravilu:

$$L(x, y, \dots) = f(x, y, \dots) - \lambda \cdot g(x, y, \dots) - \dots$$

Dakle, Lagrangeova funkcija ovisi o nezavisnim varijablama našeg problema  $(x, y, \dots)$  i dodatno o Lagrangeovim multiplikatorima  $(\lambda, \dots)$  i jednaka je ciljnoj funkciji od koje su oduzeti umnošci Lagrangeovih multiplikatora s lijevim stranama odgovarajućih uvjeta.

**Primjer 396.** Za problem s kutijom maksimalnog volumena (primjer 393) Lagrangeova funkcija je

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda \cdot (2xy + 2yz + xz - 64).$$

Vrijedi sljedeći važan teorem, koji nam kaže da su jedini kandidati za rješenje problema uvjetnog ekstrema dijelovi stacionarnih točki Lagrangeove funkcije koji su iznosi izvornih nezavisnih varijabli:

**Teorem 54.** Ako ciljna funkcija  $f$  postiže traženi uvjetni ekstrem u točki  $(x, y, \dots)$ , onda postoje Lagrangeovi multiplikatori  $\lambda, \dots$  takvi da je  $X = (x, y, \dots, \lambda, \dots)$  stacionarna točka za Lagrangeovu funkciju  $F$ .

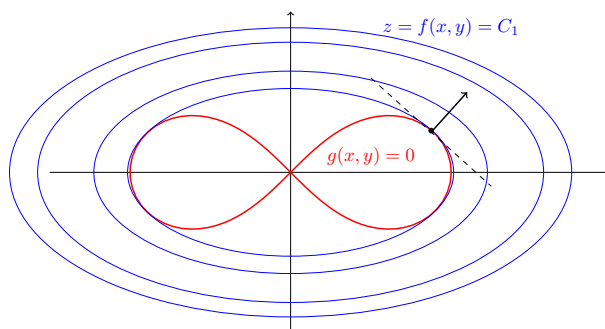
Primijetimo da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} - \dots, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} - \dots, \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \frac{\partial g}{\partial \lambda}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vidimo da izjednačavanje parcijalnih derivacija od  $F$  po Lagrangeovim multiplikatorima s nulom samo iznova ispisuje uvjete našeg problema. Dakle,  $(x, y, \dots, \lambda, \dots)$  je stacionarna točka Lagrangeove funkcije  $F$  ako i samo ako ona zadovoljava sve izvorne uvjete problema i dodatno uvjet  $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g + \dots$  (tj. u toj točki gradijent ciljne funkcije mora biti linearna kombinacija gradijenata funkcija određenih uvjetima, pri čemu su koeficijenti u toj linearnoj kombinaciji odgovarajući Lagrangeovi multiplikatori).

Odakle takav uvjet? Objasniti ćemo to samo za slučaj dvije nezavisne varijable  $x$  i  $y$  i jednog uvjeta:

$$f(x, y) \rightarrow \min/\max,$$



Slika 10.15: Uvjetni ekstrem funkcije dviju varijabli uz jedan uvjet se postiže u točki u kojoj su gradijent ciljne funkcije i funkcije uvjeta kolinearni

$$g(x, y) = 0.$$

Uvjet je geometrijski nivo-krivulja funkcije  $g$  (crveno na slici 10.15). Na krivulji  $g(x, y) = 0$  tražimo točku u kojoj  $f$  postiže minimum odnosno maksimum, recimo da tražimo maksimum. Mogli bismo u  $(x, y)$ -ravnini crtati nivo-krivulje  $f(x, y) = a$  funkcije  $f$  (plavo na slici 10.15) i tražimo onu s najvećom vrijednošću  $a$  koja dodiruje krivulju  $g(x, y) = 0$ . Ako krenemo od neke s velikom vrijednosti  $a$  (jedne od vanjskih plavih krivulja na slici 10.15) i smanjujemo vrijednost  $a$  (kao da „ispuhujemo balon”) prije ili kasnije nivo-krivulja od  $f(x, y) = a$  će dotaknuti krivulju  $g(x, y) = 0$ . Odgovarajuća vrijednost od  $f$ , tj.  $a$ , je traženi maksimum (za sve veće  $a$  nivo-krivulje se ne dodiruju). Uvjet  $\nabla F(x, y, \lambda) = 0$  svodi se sad na  $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ ,  $g(x, y) = 0$ , dakle na traženje točke na krivulji u kojoj su gradijenti od  $f$  i  $g$  kolinearni, upravo kako vidimo na slici 10.15: U točki rješenja problema tangente su zajedničke, odnosno normale (gradijenti od  $f$  i  $g$ ) su istog smjera, dakle postoji  $\lambda$  takav da je  $\nabla f = \lambda \nabla g$  i pritom je to točka na  $g(x, y) = 0$ , dakle stvarno imamo zadovoljen uvjet  $\nabla F(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$ .

Dakle, ukoliko se radi o određivanju lokalnog ekstrema funkcije  $f$  uz jedan jedini uvjet oblika  $g = 0$ , kandidati za tražene točke ekstrema nalaze se među rješenjima sustava

$$\nabla f(x, y, \dots) = \lambda \nabla g(x, y, \dots),$$

$$g(x, y, \dots) = 0,$$

budući da su to točno stacionarne točke odgovarajuće Lagrangeove funkcije. Kako za stacionarnu točku Lagrangeove funkcije zaključiti radi li se o točki minimuma, maksimuma ili nijedno? Formalna tehnika je izvan opsega ovog udžbenika, ali u većini slučajeva lako je iz konteksta zaključiti koja stacionarna točka je rješenje postavljenog problema.

**Primjer 397.** Riješimo problem kutije postavljen u primjeru 393. Primijetimo da se traži maksimalni volumen i da je iz postavke problema (ograničeno oplošje) očito da postoji rješenje problema. Također, primijetimo da ako je ijedan od bridova duljine 0, volumen je 0 pa su stoga eventualne stracionarne točke za koje je  $x = 0$  ili  $y = 0$  ili  $z = 0$  točke minimuma i možemo i ignorirati.

Pogledajmo uvjete koji proizlaze iz Lagrangeove funkcije:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z),$$

$$g(x, y, z) = 0.$$

Oni se svode na sustav

$$yz = \lambda(2y + z),$$

$$xz = \lambda(2x + 2z),$$

$$xy = \lambda(2y + x),$$

$$2xy + 2yz + xz = 64.$$

Pomnožimo prvu od jednadžbu s  $x$ , drugu s  $y$  i treću sa  $z$  te imamo

$$(xyz =) \lambda x(2y + z) = \lambda y(2x + 2z) = \lambda z(x + 2y).$$

To može vrijediti za  $\lambda = 0$ , no to rješenje nas ne zanima, jer bi onda bilo  $yz = xz = xy = 0$  te bi bar jedan brid bio duljine 0. Stoga posljednje jednakosti možemo podijeliti s  $\lambda$  i dobijemo  $2xy + xz = 2xy + 2yz = xz + 2yz$ , dakle (jer  $x, y, z \neq 0$ )  $x = z = 2y$ . To uvrstimo u četvrtu jednadžbu (izvorni uvjet) i dobivamo  $12x^2 = 64$  odnosno  $y = \frac{4}{\sqrt{3}}$  cm i  $x = z = \frac{8}{\sqrt{3}}$  cm. Budući da je to jedini kandidat za rješenje osim onih u kojima bi neki brid bio duljine 0, prema rečenom zaključujemo da se radi o traženoj točki maksimuma.

**Primjer 398.** U fizici se često određuju ekstremi funkcija tipa

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j$$

(tzv. kvadratne forme), uz „energetski” uvjet tipa

$$\sum_i x_i^2 = 1.$$

Jednadžbe koje odgovaraju određivanju stacionarne točke odgovarajuće Lagrangeove funkcije tad se nazivaju sekularnim jednadžbama. Primjer su jednadžbe koje se dobivaju u tzv. Hückelovoj metodi za određivanje molekulskih orbitala kao linearnih kombinacija atomskih orbitala (u tom slučaju Lagrangeov multiplikator  $\lambda$  postaje svojstvena vrijednost prikladne matrice).



**Ponovimo bitno...** Stacionarna točka skalarne funkcije je element domene te funkcije u kojem je gradijent nulvektor. Stacionarna točka može biti točka lokalnog ekstrema ili sedlasta točka. Za stacionarnu točku  $X_0$  funkcije  $f$  provjera radi li se o točki lokalnog ekstrema provodi se korištenjem minora Hesseove matrice  $H_f(X_0)$ . (Glavne) minore kvadratne matrice  $A$  su determinante kvadratnih podmatrica od  $A$  kojima je gornji lijevi kut zajednički s  $A$ .

O uvjetnim ekstremima skalarne funkcije  $f$  govorimo ako smo se pri određivanju ekstrema te funkcije ograničili na one točke domene koje zadovoljavaju jednu ili više jednadži. Točke uvjetnih ekstrema nalaze se među stacionarnim točkama Lagrangeove funkcije, koju dobijemo tako da od funkcije  $f$  za svaki uvjet oduzmemo produkt jedne nove varijable (Lagrangeovog multiplikatora) s lijevom stranom jednadžbe koja opisuje taj uvjet (podrazumijevamo da su svi nenul članovi jednadžbe zapisani na lijevoj strani). 🦆



### 10.2.3 Metoda najmanjih kvadrata

Jedna od najčešće korištenih metoda za obradu eksperimentalnih podataka je metoda najmanjih kvadrata. Osnovni problem kojeg rješava ova metoda je: Kako iz dobivenih eksperimentalnih podataka dobiti formulu funkcionalne ovisnosti? Mi ćemo ovdje opisati ovu metodu samo za slučaj po jedne nezavisne i zavisne varijable.

**Problem 1:** Za zadani niz parova brojeva  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , uz pretpostavku da veličina  $y$  (zavisna varijabla) ovisi o veličini  $x$  (nezavisna varijabla), traži se formula  $y = f(x)$  takva da ukupna greška aproksimacije bude što manja. Pritom, formulu funkcije  $f$  obično tražimo zato da bismo mogli procijeniti iznos  $y$  za  $x$  koji nije bio među zadanim ( $x \neq x_1, \dots, x_n$ ) i/ili da bismo mogli procijeniti iznose nekih drugih nepoznatih parametara. Vrsta funkcije  $f$  (afina, kvadratna, skalirana eksponencijalna, ...) u pravilu je ili poznata iz teorije ili se pretpostavlja temeljem podataka.

**Primjer 399.** Arrheniusova jednadžba

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$$

opisuje ovisnost koeficijenta  $k$  brzine reakcije o temperaturi  $T$ . Vrijednosti  $A$  (predeksponencijalni faktor) i  $E_a$  (energija aktivacije) su konstantne, ali u pravilu nepoznate.



Mjerenjima pri nekoj reakciji su dobiveni sljedeći podaci:

| $T/\text{K}$ | $k/(\text{L}/(\text{mol s}))$ |
|--------------|-------------------------------|
| 700          | 0,0110                        |
| 760          | 0,105                         |
| 810          | 0,789                         |
| 910          | 20,0                          |

Koliko iznose predeskonencijalni faktor i energija aktivacije za tu reakciju? Koliko iznosi koeficijent brzine te reakcije pri temperaturi 800 K?

U pravilu pri mjerenjima očekujemo da zbog postojanja eksperimentalne greške točke  $(x_i, y_i)$  zapravo nisu egzaktno na grafu  $y = f(x)$ . Stoga tražimo funkciju  $f$  čiji graf ne mora prolaziti točno kroz te točke (ne zahtijevamo  $y_i = f(x_i)$  za sve  $i$ ), nego takvu da je ukupno „rasipanje” zadanih točaka oko njenog grafa što manje:  $f(x_i) \approx y_i$  za sve  $i$ .

**Problem 2:** Kako za danu funkciju  $y = f(x)$  opisati ukupnu grešku aproksimacije obzirom na zadane parove  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ?

Obično podrazumijevamo da nema greške u apscisama<sup>9</sup>, pa je razumno gledati samo vertikalna odstupanja od vrijednosti funkcije:  $y_i - f(x_i)$  odnosno  $f(x_i) - y_i$ . Budući je u pravilu nebitno je li rezultat manji ili veći od točnog (i da ne želimo da jedan manjak poništi jedan višak), kao mjeru greške za pojedinu točku mogli bismo uzeti  $|f(x_i) - y_i|$ . No, s obzirom na to da ćemo funkciju greške htjeti minimizirati i da je za to poželjna derivabilnost, a apsolutna vrijednost nije svuda derivabilna, grešku aproksimacije funkcijom  $f$  u točki  $(x_i, y_i)$  opisujemo izrazom  $E_i = (f(x_i) - y_i)^2$ . **Ukupna greška aproksimacije** se onda definira kao zbroj lokalnih grešaka u svim točkama:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2.$$

Kako minimizirati  $E$ ? Da bi bilo moguće odgovoriti na to pitanje moramo prvo pretpostaviti oblik (vrstu) funkcije  $f$  kojom ćemo aproksimirati podatke. Najčešće se koriste affine funkcije  $f(x) = ax + b$  i kvadratne funkcije  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Stvarni problem je sada:

**Problem 3:** Ako smo pretpostavili vrstu funkcije  $f$ , s nepoznatim parametrima  $a, b, c, \dots$ , kako minimizirati ukupnu grešku aproksimacije  $E$ ?

<sup>9</sup>Možemo to reći i ovako: Uzima se da je sva greška akumulirana u ordinatama.

Konkretno, u slučajevima aproksimacije afinom odnosno kvadratnom funkcijom imamo

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n (a x_i + b - y_i)^2, \quad (10.3)$$

odnosno

$$E(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (a x_i^2 + b x_i + c - y_i)^2.$$

Uočimo da su ovdje poznate vrijednosti  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a nepoznati su parametri  $a, b, c, \dots$ . Stoga tražimo (globalni) minimum funkcije oblika  $E(a, b, c, \dots)$ . Vidimo da se radi o problemu određivanja ekstrema derivabilne realne funkcije više varijabli. Za takve su funkcije jedine kritične točke njihove stacionarne točke te se mogući koeficijenti  $a, b, c, \dots$  dobiju se rješavanjem sustava  $\nabla E = 0$ , tj.

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial b} = \frac{\partial E}{\partial c} = \dots = 0.$$

Kod **aproksimacije afinom funkcijom** iz formule (10.3) dobijemo sljedeći sustav za nalaženje stacionarne točke  $(a, b)$  funkcije greške  $E$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^n (a x_i + b - y_i) x_i = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 a + 2 \sum_{i=1}^n x_i b - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 2 \sum_{i=1}^n (a x_i + b - y_i) = 2 \sum_{i=1}^n x_i a + 2 n b - 2 \sum_{i=1}^n y_i = 0. \end{aligned}$$

Taj sustav možemo preglednije zapisati u obliku:

$$s_{x^2} \cdot a + s_x \cdot b = s_{xy}$$

$$s_x \cdot a + n \cdot b = s_y$$

pri čemu je

$$s_{x^2} = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

(zbroy kvadrata apscisa),

$$s_x = \sum_{i=1}^n x_i$$

(zbroy apscisa),

$$s_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

(zbroj produkata apscisa s odgovarajućim ordinatama),

$$s_y = \sum_{i=1}^n y_i$$

(zbroj ordinata), a  $n$  je broj parova podataka (u pravilu to je broj mjerenja). Cramerovo pravilo za rješavanje sustava daje nam formule za nepoznati koeficijent smjera pravca

$$a = \frac{n s_{xy} - s_x s_y}{n s_{x^2} - s_x^2} \quad (10.4)$$

i slobodni član

$$b = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{n s_{x^2} - s_x^2}. \quad (10.5)$$

Za slučaj **aproksimacije kvadratnom funkcijom** na analogan način dobivamo sustav:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^4\right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^3\right) b + s_{x^2} c = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i,$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^3\right) a + s_{x^2} b + s_x c = s_{xy},$$

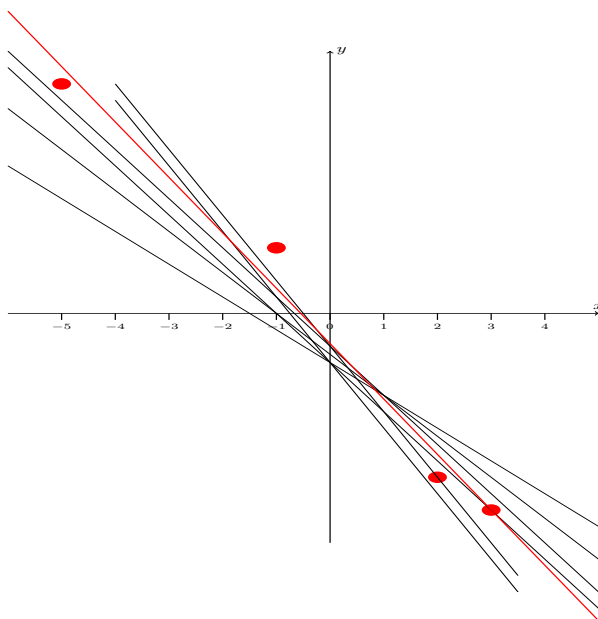
$$s_{x^2} a + s_x b + n c = s_y.$$

Iz prethodnog vidimo da bismo za konkretnu tablicu  $(x_i, y_i)$ -ova za slučaj aproksimacije bilo afinom bilo kvadratnom funkcijom lako izračunali koeficijente sustava linearnih jednadžbi i riješili sustav. Time bismo dobili stacionarnu točku za ukupnu grešku  $E$ . Radi li se o točki minimuma? Da. Intuitivni razlog za to je da je  $E$  „u biti” kvadratna funkcija s pozitivnim vodećim koeficijentom (odnosno, zbroj takvih funkcija) pa očekujemo da ima točno jedan ekstrem koji je ujedno globalni minimum. Precizniji dokaz dobivamo pomoću Hesseove matrice.

Ostanimo pri aproksimaciji afinom funkcijom, tj. pravcem. Pomoću formula (10.4) i (10.5) izračunati koeficijenti  $a$  i  $b$  određuju od svih pravaca u ravnini onaj pravac  $y = ax + b$  koji najbolje opisuje ovisnost koju smo eksperimentalno dobili u obliku  $n$  točaka, tj. za koji je rasipanje točaka  $(x_i, y_i)$  oko njega najmanje.

**Primjer 400.** *Odredimo pravac koji najbolje aproksimira točke  $(-5, 7)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(2, -5)$ ,  $(3, -6)$ . Dakle, među mnoštvom pravaca u ravnini, tražimo onaj koji izgleda kao crveni pravac na slici 10.16.*

Imamo  $n = 4$ ,  $s_x = -1$ ,  $s_y = -2$ ,  $s_{x^2} = 39$ ,  $s_{xy} = -65$  pa po formulama (10.4) i (10.5) dobivamo  $a = -\frac{262}{155}$  i  $b = -\frac{143}{155}$ , odnosno traženi pravac ima jednadžbu  $y = -\frac{262}{155}x - \frac{143}{155}$ .



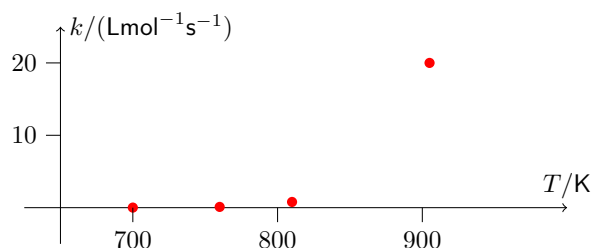
Slika 10.16: Aproksimacija afinom funkcijom

Naravno, nema smisla svaki skup točaka, tj. svaki set parova izmjerenih podataka, aproksimirati afinom funkcijom. Primjerice, podatke iz primjera 399 (parovi temperatura i koeficijenta brzine) sigurno nema smisla aproksimirati afinom funkcijom, kako zato što je u tom slučaju već poznata teorijska ovisnost (Arrheniusova jednadžba) koja očigledno nije afina (nema smisla uzeti  $x = T/K$ ,  $y = k/(L/(\text{mols}))$  i tražiti  $a$  i  $b$  tako da dobijemo  $y = ax + b$  jer bi to značilo da tvrdimo da  $k$  afino ovisi o  $T$ ), a tako i jer je iz grafičkog prikaza zadanih podataka (slika 10.17) vidljivo da točke ni približno ne prate neki pravac. Ako je kao u tom primjeru poznata teorijska ovisnost, tehnikama iz odjeljka 2.8 možemo ju svesti na afinu. Ako ne postoji takav teorijski argument, onda skica parova podataka može sugerirati odgovarajući tip funkcije, a često je nužno isprobati i više mogućih aproksimacija.

**Primjer 401.** *Nastavimo primjer 399. Ovisnost  $k$  o  $T$  nije afina. U primjeru 63 vidjeli smo da se Arrheniusova jednadžba može linearizirati uz*

$$y = \ln \frac{A}{L/(\text{mols})}, \quad x = \frac{1}{T}$$

$$a = -\frac{E_a}{R}, \quad b = \ln \frac{A}{L/(\text{mols})}.$$



Slika 10.17: Zadani podaci za primjer 399

Ako dakle umjesto  $T$ -ova za  $x$ -eve uzmemo njihove recipročne vrijednosti, a umjesto  $k$ -ova za  $y$ -e uzmemo njihove prirodne logaritme, ima smisla tražiti aproksimaciju  $y$  (logaritma koeficijenta brzine reakcije) kao afine funkcije od  $x$  (recipročne temperature).

Iz zadanih podataka računamo tablicu za primjenu metode najmanjih kvadrata za aproksimaciju afinom funkcijom:<sup>10</sup>

| $x_i$                         | $y_i$            | $x_i^2$                           | $x_i y_i$                         |
|-------------------------------|------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $1,42857 \cdot 10^{-3}$       | $-4,50986$       | $2,04082 \cdot 10^{-6}$           | $-6,44266 \cdot 10^{-3}$          |
| $1,31579 \cdot 10^{-3}$       | $-2,25379$       | $1,73130 \cdot 10^{-6}$           | $-2,96552 \cdot 10^{-3}$          |
| $1,23457 \cdot 10^{-3}$       | $-0,23699$       | $1,52416 \cdot 10^{-6}$           | $-0,29258 \cdot 10^{-3}$          |
| $1,09890 \cdot 10^{-3}$       | $2,99573$        | $1,20758 \cdot 10^{-6}$           | $3,29201 \cdot 10^{-3}$           |
| $s_x = 5,07783 \cdot 10^{-3}$ | $s_y = -4,00482$ | $s_{x^2} = 6,50386 \cdot 10^{-6}$ | $s_{xy} = -6,40875 \cdot 10^{-3}$ |

Ako zajednički nazivnik iz formula (10.4) i (10.5) označimo s  $\Delta$ , imamo

$$\Delta = ns_{x^2} - s_x^2 = 2,31082 \cdot 10^{-7},$$

pa je

$$a = \frac{ns_{xy} - s_x s_y}{\Delta} = -22932,14036, \quad b = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{\Delta} = 28,1101045.$$

Dakle,

$$E_a = -R a = 1,91 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{mol}}, \quad A = 1,61 \cdot 10^{12} \frac{\text{L}}{\text{mol s}},$$

tj. za podatke iz primjera 399 imamo ovisnost

$$k = 1,61 \cdot 10^{12} \frac{\text{L}}{\text{mol s}} \exp(-22,9 \cdot 10^3 \cdot \text{K}/T).$$

<sup>10</sup>Naravno, u računu uzimamo više od potrebnog broja značajnih znamenki kako ne bismo u konačnom rezultatu dobili grešku koja ne potječe od greški mjerenja već od greški preranog zaokruživanja.

Primjerice, za  $T = 800 \text{ K}$  sad možemo procijeniti da je odgovarajući  $k = 1,61 \cdot 10^{12} \frac{\text{L}}{\text{mol s}} \exp(-22,9/800) = 0,572 \frac{\text{L}}{\text{mol s}}$ .

**Primjer 402.** Recimo da smo pri nekoj kemijskoj reakciji mjerili množinske koncentracije (jedinog) reaktanta, a želimo odrediti kojeg je reda reakcija. Imamo osnove za pretpostavku da je reakcija reda 1, 2 ili 3. Reakcije s jednim reaktantom koje su prvog reda opisane su integriranim zakonom brzine (vidi str. 356)

$$\ln \frac{[A]}{\text{mol/L}} = \ln \frac{[A]_0}{\text{mol/L}} - k_1 \nu_A t,$$

reakcije drugog reda zakonom

$$\frac{1}{[A]} = \frac{1}{[A]_0} - k_2 \nu_A t,$$

a reakcije trećeg reda s

$$\frac{1}{[A]^2} = \frac{1}{[A]_0^2} - 2k_3 \nu_A t.$$

Za dane podatke, ako ne znamo kojeg reda je reakcija, možemo isprobati tri aproksimacije afinom funkcijom i vidjeti koja daje najmanje greške  $E_i = |f(x_i) - y_i|$  i  $E$ .

Konkretno, neka su dani podaci kao u prva dva stupca sljedeće tablice. Za gornja tri moguća zakona odgovarajuće linearizacije dobivamo uz  $x = t/\text{min}$  i  $y$  kao u trećem, četvrtom odnosno petom stupcu:

| $t/\text{min}$ | $[A]/\text{mol L}^{-1}$ | $\ln \frac{[A]}{c^\ominus}$ | $1/[A]/\text{L mol}^{-1}$ | $1/[A]^2/\text{L}^2 \text{mol}^{-2}$ |
|----------------|-------------------------|-----------------------------|---------------------------|--------------------------------------|
| 5              | 0,715                   | -0,33547                    | 1,39860                   | 1,95609                              |
| 10             | 0,602                   | -0,50750                    | 1,66113                   | 2,75935                              |
| 15             | 0,501                   | -0,69115                    | 1,99601                   | 3,98405                              |
| 20             | 0,419                   | -0,86988                    | 2,38663                   | 5,69603                              |
| 25             | 0,360                   | -1,02165                    | 2,77778                   | 7,71605                              |
| 30             | 0,300                   | -1,20397                    | 3,33333                   | 11,11111                             |
| 35             | 0,249                   | -1,39030                    | 4,01606                   | 16,12877                             |
| 40             | 0,214                   | -1,54178                    | 4,67289                   | 21,83597                             |
| 45             | 0,173                   | -1,75446                    | 5,78035                   | 33,41241                             |

Pretpostavimo li da je reakcija prvog reda ( $y = \ln \frac{[A]}{c^\ominus}$ ,  $x = \frac{t}{1 \text{ min}}$ ,  $a = -k_1 \nu_A \cdot 1 \text{ min}$ ,  $b = \ln \frac{[A]_0}{c^\ominus}$ ) metodom najmanjih kvadrata dobijemo  $\ln \frac{[A]}{c^\ominus} = -0,0350 \text{ min}^{-1} \cdot t - 0,1592$ . Greške nas zanimaju u odnosu na izmjerene vrijednosti ( $[A] = \exp(y) \text{ mol/L}$ ), dakle u  $i$ -toj točki greška je  $E_i = |[A]_i -$

$\exp(y_i) \text{ mol/L}$ ], a ukupna greška je  $E = \sum E_i$ . Dobit ćemo redom pojedinačne greške 0,000909, 0,00102 (u molima po litri) i t.d. te ukupnu grešku 0,0247 mol/L.

Pretpostavka da je reakcija drugog reda ( $y = 1 \text{ mol L}^{-1}/[\text{A}]$ ,  $x = t/\text{min}$ ,  $a = -k_2\nu_{\text{A}} \cdot 1 \text{ mol min/L}$ ,  $b = 1 \text{ mol L}^{-1}/[\text{A}]_0$ ) daje  $\frac{1}{[\text{A}]} = 0,1052 \frac{\text{L}}{\text{mol min}} t + 0,4846 \frac{\text{L}}{\text{mol}}$  i pritom imamo greške  $E_i = |[\text{A}]_i - \frac{1}{y_i} \text{ mol/L}|$  (redom, u molima po litri, 3,71, 2,57, ...) i ukupnu grešku 14,8 mol/L.

Pretpostavka da je reakcija trećeg reda ( $y = 1 \text{ mol}^2 \text{ L}^2/[\text{A}]^2$ ,  $x = t/\text{min}$ ,  $a = -2k_3\nu_{\text{A}} \cdot 1 \text{ mol}^2 \text{ min/L}^2$ ,  $b = 1 \text{ mol}^2 \text{ L}^2/[\text{A}]_0^2$ ) daje  $\frac{1}{[\text{A}]^2} = 0,709 \frac{\text{L}^2}{\text{mol}^2} \text{ min} \cdot t - 6,11 \frac{\text{L}^2}{\text{mol}^2}$ , a i u ovom slučaju ćemo kao i u prethodnom dobiti puno veće greške nego u prvom.

Budući da smo u prvom slučaju dobili najmanje greške (što je lako potvrditi i odgovarajućim grafovima) zaključujemo da je reakcija prvog reda, a koeficijent brzine reakcije je  $k_1 = 0,0350 \text{ min}^{-1}$ .



**Ponovimo bitno...** Metoda najmanjih kvadrata služi određivanju one funkcije određene vrste (afine, kvadratne, ...) čija greška u odnosu na zadane podatke je najmanja. Takvu funkciju zovemo najboljom aproksimacijom danih podataka. Ako su zadani podaci uređeni parovi realnih brojeva, greška funkcije  $f$  u odnosu na njih se definira kao zbroj kvadrata razlika između ordinata koje su poznate i ordinata koje dobijemo uvrštavanjem odgovarajuće apscise u funkciju  $f$ . Ako smo odabrali vrstu funkcije, onda greška  $E$  ovisi o dva ili više parametara koji određuju konkretnu funkciju te vrste (primjerice, ako funkcija treba biti afina, greška ovisi o koeficijentu smjera i slobodnom članu). Formule za određivanje nepoznatih koeficijenata tražene najbolje aproksimacije dobijemo sređivanjem formula dobivenih traženjem stacionarne točke greške  $E$ . 🦆🦆🦆

## 10.3 Osnove vektorske analize

Vidjeli smo da je gradijent skalarne funkcije  $f$  za svaku točku  $X$  iz domene te funkcije vektor  $\nabla f(X)$  parcijalnih derivacija te funkcije izračunatih u  $X$ . Možemo reći:  $\nabla f$  je funkcija koja  $X$ -evima pridružuje vektore  $\nabla f(X)$ . Funkcije poput  $\nabla f$ , kojima je kodomena podskup nekog  $\mathbb{R}^m$  s  $m > 1$ , nazivaju se **vektorskim funkcijama**. Ako se broj koordinata u domeni i kodomeni (broj nezavisnih i zavisnih varijabli) podudara govorimo o **vektorskim poljima**. Primjerice, gradijent skalarne funkcije je uvijek vektorsko polje:

$$(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\nabla f} \nabla f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

**Primjer 403.** *Gradijent funkcije zadane formulom  $f(x, y) = xy^3$  je vektorsko polje zadano s*

$$\nabla f(x, y) = (y^3, 3xy^2).$$

**Primjer 404.** *Funkcija zadana s*

$$F(x, y, z) = (x + y, xyz)$$

*je primjer vektorske funkcije s domenom  $\mathbb{R}^3$  i kodomenom  $\mathbb{R}^2$ . Ona trojci  $(1, 2, 3)$  pridružuje par  $(1 + 2, 1 \cdot 2 \cdot 3) = (3, 6)$ . Ova vektorska funkcija nije vektorsko polje.*

Svaku vektorsku funkciju  $F$  s  $n$  nezavisnih varijabli čija kodomena je (podskup od)  $\mathbb{R}^m$  (tj. koja ima  $m$  zavisnih varijabli) možemo shvatiti kao uređenu  $m$ -torku skalarnih funkcija istih nezavisnih varijabli:

$$F(X) = (F_1(X), F_2(X), \dots, F_m(X))$$

ili kraće  $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$ , gdje smo s  $X$  kratko označili elemente  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  domene od  $F$ . Skalarnе funkcije  $F_1, F_2, \dots, F_m$  zovemo koordinatnim funkcijama od  $F$  i njihova domena je ista kao domena od  $F$ .

**Primjer 405.** *Funkcija  $F$  iz primjera 404 ima kodomenu  $\mathbb{R}^2$ , dakle može se prikazati kao uređeni par svoje dvije koordinatne funkcije  $F_1(x, y, z) = x + y$  i  $F_2(x, y, z) = xyz$ .*

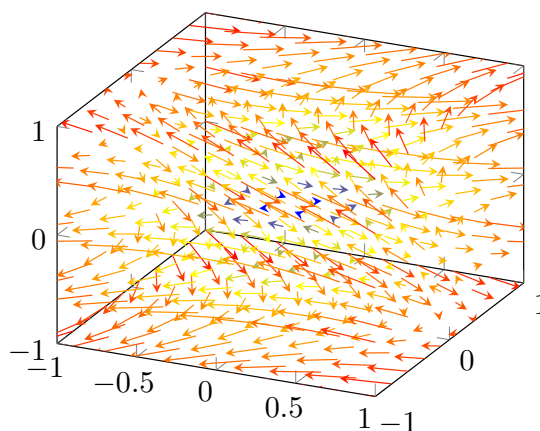
Iako postoje, grafovi vektorskih funkcija se ne crtaju (zašto?). Za vektorska polja s dvije ili tri varijable povremeno se za vizualizaciju koriste crteži u koordinatnoj ravnini odnosno prostoru, u kojima se točke poistovjećuju s elementima domene vektorskog polja, a orijentirane dužine s počecima u tim točkama predstavljaju pridružene im elemente kodomene (slika 10.18).

**Primjer 406.** *Promotrimo vektorsko polje  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definirano s  $F(x, y) = (-y, x)$ . Ako  $F$  želimo prikazati grafički, to činimo tako da s početkom u točkama  $(x, y)$  ucrtamo orijentirane dužine koje prikazuju pojedinoj točki pridruženi vektor  $F(x, y) = -y \vec{i} + x \vec{j}$ .*

Primijetimo da nema smisla govoriti o derivaciji vektorske funkcije, čak ni parcijalnoj. No, s obzirom na to da je svaka vektorska funkcija  $F$  oblika  $(F_1, \dots, F_n)$ , gdje su njezine koordinatne funkcije  $F_i$  skalarnе, ima smisla računati parcijalne derivacije

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$



Slika 10.18: Vizualizacija vektorskog polja  $F(x, y, z) = (3y, 2z, x)$ 

koordinatnih funkcija po varijablama. Ako one postoje, a u ovom poglavlju kako smo rekli za sve funkcije uzimamo da su derivabilne, one se mogu uredno zapisati u matricu koja na poziciji  $(i, j)$  ima parcijalnu derivaciju  $i$ -te po redu koordinatne funkcije po  $j$ -toj varijabli. Tu matricu zovemo **Jacobijevom matricom** vektorske funkcije  $F$ , koja se obično označava s

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(X),$$

tj. radi se o matrici koja je funkcija od  $X$ . Kao i kod parcijalnih derivacija,  $(X)$  se u notaciji obično izostavlja, ali podrazumijeva.

**Primjer 407.** *Jacobijeva matrica funkcije iz primjera 404 je*

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y, z)}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}.$$

Dakle, broj redaka Jacobijeve matrice jednak je broju koordinatnih funkcija vektorske funkcije, a broj stupaca jednak je njezinom broju varijabli. Stoga je za vektorska polja pripadna Jacobijeva matrica je kvadratna. Determinantu Jacobijeve matrice vektorskog polja  $F$  nazivamo **Jakobijanom** od  $F$  (u  $X$ ) i on će nam biti koristan pri promjeni zamjeni varijabli u višestrukim integralima (odjeljak [?]). Konkretno, kad će za izračunavanje nekog višestrukog integrala od koristi biti promjena koordinatnog sustava, morat ćemo računati odgovarajući Jakobijan vektorskog polja kojim se opisuje ta promjena koordinata.

Svaka promjena koordinatnog sustava može se naime interpretirati kao vektorsko polje jer je u svakom koordinatnom sustavu broj koordinata fiksiran (to je dimenzija vektorskog prostora koji se koordinatizira). Primjerice, promjena koordinata iz Kartezijevih u polarne koordinate i obrnuto u ravnini opisana je vektorskim poljima

$$P = (u, v) : (x, y) \mapsto (r, \varphi) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, (\pi +) \arctg \frac{y}{x} \right),$$

$$K = (u', v') : (r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Općenito, ako koordinate  $x, y$  u ravnini želimo promijeniti u nove koordinate  $x', y'$ , one će biti povezane formulama tipa  $x' = u(x, y)$  i  $y' = v(x, y)$ , koje se mogu interpretirati kao vektorsko polje  $F$  s koordinatnim funkcijama  $u$  i  $v$ :  $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ .

Osim Kartezijevog koordinatnog sustava i kosokutnih varijanti opisanih u poglavlju 6, u (trodimenzionalnom) prostoru se često koriste još dva tipa koordinatnih sustava, koji su oba prilagodbe polarnog koordinatnog sustava na trodimenzionalni prostor: cilindrički i sferni. **Cilindrički koordinatni sustav** sastoji se od ishodišta  $O$ , jednog brojevnog pravca ( $z$ -osi) koji prolazi kroz  $O$  i na njega okomite polarne osi (polupravca s početkom u  $O$ ). Cilindričke koordinate točke su koordinate  $r, \varphi$  i  $z$ , gdje su  $r$  i  $\varphi$  polarne koordinate projekcije točke na ravninu okomitu na  $z$ -os koja sadrži polarnu os, a treća koordinata je aplikata točke. Dakle, mogući iznosi su im  $r \geq 0$ ,  $\varphi$  može načelno biti bilo koji broj, ali se u pravilu gleda u rasponu od 0 do  $2\pi$  ili pak od  $-\pi$  do  $\pi$ , a aplikata  $z$  može biti bilo koji realan broj. Dakle, veza između cilindričkih i Kartezijevih koordinata (uz pretpostavku zajedničkog ishodišta i  $z$ -osi te podudaranja polarne osi s pozitivnim dijelom  $x$ -osi) dana je formulama

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

odnosno

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

**Primjer 408.** Točka koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate  $(1, 1, 1)$  ima cilindričke koordinate  $r = \sqrt{2}$ ,  $\varphi = 45^\circ$  i  $z = 1$ .

**Primjer 409.** U cilindričkom koordinatnom sustavu jednadžba  $r = 4$  predstavlja cilindar kojemu je os  $z$ -os i polumjer 4.

U cilindričkom koordinatnom sustavu jednadžba  $\varphi = 90^\circ$  predstavlja poluravninu koja je pola  $(y, z)$ -ravnine (ona polovina za koju su ordinate pozitivne).

U cilindričkom koordinatnom sustavu jednadžba  $z = 2$ , kao i u Kartezijevom koordinatnom sustavu, predstavlja ravninu paralelnu s  $(x, y)$ -ravninom na „visini” 2.

**Sferni koordinatni sustav** se sastoji od ishodišta  $O$  te referentnog (brojevnog) pravca i referentne ravnine koji prolaze kroz  $O$  i međusobno su okomiti, pri čemu je referentna ravnina opskrbljena polarnim koordinatnim sustavom. Sferne koordinate točke  $T$  su  $r$  (udaljenost  $T$  do ishodišta),  $\varphi$  (azimut, tj. polarni kut projekcije točke na referentnu ravninu) i  $\theta$  (polarna udaljenost, a to je kut dužine  $\overline{OT}$  prema pozitivnom dijelu referentnog pravca). Stoga su mogući iznosi sfernih koordinata  $r \geq 0$ ,  $\varphi$  može načelno biti bilo koji broj, ali se u pravilu gleda u rasponu od 0 do  $2\pi$  ili pak od  $-\pi$  do  $\pi$ , a polarna udaljenost je unutar raspona od 0 do  $\pi$ . Veza između Kartezijevih koordinata  $(x, y, z)$  i sfernih  $(r, \phi, \theta)$  (uz pretpostavku podudaranja referentne osi sa  $z$ -osi i polarne osi u referentnoj ravnini s pozitivnim dijelom  $x$ -osi) je dana jednadžbama

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

odnosno

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

**Primjer 410.** Sferni koordinatni sustav je u osnovi prilagođeni zemljopisni koordinatni sustav. Ako Zemlju aproksimiramo kuglom, sve točke na njezinoj površini imaju istu prvu sfernu koordinatu (to je prosječni polumjer Zemlje).

Kao  $(x, y)$ -ravnina uzima se je ravnina ekvatora, a  $z$ -os je pravac kroz sjeverni i južni pol.

Zemljopisna dužina je azimut točke na Zemljinoj površini, tj. odklon ravnine njezinog meridijana u odnosu na nulti meridijan (uzima se raspon od  $-180^\circ$  do  $+180^\circ$  umjesto matematički standardnijeg od 0 do  $360^\circ$ ). Negativni azimuti odgovaraju zapadnim zemljopisnim dužinama, a pozitivni istočnim.

Zemljopisna širina je polarna udaljenost točke na Zemljinoj površini, pri čemu se ne gleda odklon od spojnice središta sa sjevernim polom, nego od ravnine ekvatora, pa ovdje imamo raspon od  $-90^\circ$  (južni pol) do  $+90^\circ$  (sjeverni pol), odnosno zemljopisna širina je  $90^\circ - \rho$ .

**Primjer 411.** Sferne koordinate točke koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate  $(1, -1, 0)$  su  $\theta = 90^\circ$  (jer je točka u  $(x, y)$ -ravnini),  $r = \sqrt{2}$  i  $\varphi = 225^\circ$ .

**Primjer 412.** U sfernom koordinatnom sustavu jednadžba  $r = 4$  predstavlja sferu polumjera 4 sa središtem u ishodištu.

U sfernom koordinatnom sustavu jednadžba  $\varphi = 90^\circ$  predstavlja poluravninu koja je pola  $(y, z)$ -ravnine (ona polovina za koju su ordinate pozitivne).

U sfernom koordinatnom sustavu jednadžba  $\theta = 30^\circ$  predstavlja konus s vrhom u ishodištu kojemu je pozitivni dio  $z$ -osi os simetrije, a kojemu je kut pri vrhu jednak  $60^\circ$ .

Općenito, ako prostorne koordinate  $x, y, z$  (bile one Kartezijeve ili ne) želimo zamijeniti novim koordinatama  $x', y', z'$ , njihova veza je uvijek opisana jednadžbama tipa

$$\begin{aligned}x' &= u(x, y, z), \\y' &= v(x, y, z), \\z' &= w(x, y, z),\end{aligned}$$

tj. promjena koordinatnog sustava u prostoru opisuje se vektorskim poljem  $F = (u, v, w)$ .

**Primjer 413.** *Odredimo Jakobijan za tri opisane promjene koordinata iz Kartezijevih u polarne, cilindričke i sferne koordinate. Odgovarajuća vektorska polja su, kako smo vidjeli, polja  $P$ ,  $C$  i  $S$ :*

$$P(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi),$$

$$C(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z),$$

$$S(r, \varphi, \rho) = (r \cos \varphi \sin \rho, r \sin \varphi \sin \rho, r \cos \rho).$$

Stoga su odgovarajući Jakobijani redom

$$\det JP(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r,$$

$$\det JC(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

$$\det JS(r, \varphi, \rho) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

Za promjene koordinata (i općenito za „lokalno invertibilna” vektorska polja, tj. polja  $F$  koja za svaku točku  $Y = F(X)$  iz svoje slike imaju okolinu na kojoj postoji inverz) vrijedi da je Jacobijeva matrica od  $F^{-1}$  (izračunata u  $Y$ ) jednaka inverznoj matrici Jacobijeve matrice od  $F$  (izračunate u  $X$ ). To posebno znači (jer znamo da je determinanta inverzne matrice recipročna determinanti polazne) da su Jakobijani prijelaza iz polarnih, cilindričkih odnosno sfernih u Kartezijeve koordinate recipročni onima za prijelaz iz Kartezijevih u polarne, cilindričke odnosno sferne.

**Primjer 414.** Jakobijan prijelaza iz polarnih u Kartezijeve koordinate u ravni je

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

što je ujedno i Jakobijan prijelaza iz Kartezijevih u cilindričke koordinate. Jakobijan prijelaza iz Kartezijevih u sferne koordinate je

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} = \frac{1}{r \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)}}.$$

Od velikog su fizikalnog značenja skalarnim i vektorskim funkcijama po određenim principima iz pripadnih parcijalnih derivacija konstruirana nova skalarna i vektorska polja. Posebnu važnost tu ima linearni operator poznat pod nazivom **nabla-operator**, u oznaci

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

On na funkcije kojima su nezavisne varijable  $x_1, \dots, x_n$  može djelovati na tri načina:

1. ako djeluje na skalarnu funkciju  $f$ , rezultat djelovanja nabla-operatora je njezin gradijent  $\nabla f = \text{grad } f$ , koji je vektorsko polje s kojim smo se već upoznali;
2. ako djeluje na vektorsko polje  $F$  tako da rezultat bude skalarna funkcije, radi se o računanju **divergencije**  $\nabla \cdot F = \text{div } F$  tog vektorskog polja;
3. ako djeluje na vektorsko polje  $F$  s tri varijable i to tako da rezultat bude novo vektorsko polje, radi se o računanju **rotacije**  $\nabla \times F = \text{rot } F$  tog vektorskog polja.

Gradijent se može koristiti procjenu promjene vrijednosti funkcije pri promjenama varijabli u iznosima  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$  (uz oznaku  $\Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ ):

$$\langle \nabla f(X), \Delta X \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \Delta x_i \approx \Delta f.$$

**Primjer 415.** Potencijalna energija međudjelovanja dvaju naboja  $Q_1$  i  $Q_2$  udaljenih za  $r$  je

$$V = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 r}.$$

Sila koja djeluje na drugi naboj uslijed postojanja prvog je

$$\vec{F} = -\nabla V = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{r} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}.$$

Pritom je  $r = r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  pa je  $\frac{\partial(1/r)}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$  i analogno za deriviranje po  $y$  i  $z$ . Stoga je

$$\vec{F} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} [-x, -y, -z] = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_1,$$

gdje je  $\vec{r}_1$  jedinični vektor smjera i orijentacije kao  $\vec{r}$  (vektor pozicije drugog naboja u odnosu na prvi). Sila po jedinici drugog naboja (dakle, sila kojom prvi naboj djeluje na jedinicu naboja na poziciji  $\vec{r}$ ) je elektrostatsko polje naboja  $Q_1$ :

$$\vec{E} = \frac{1}{Q_2} \vec{F} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_1.$$

Primijetimo:

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

gdje je  $\phi = V/Q_2$  pripadno skalarno polje elektrostatskog potencijala.

Neka je sad  $F$  vektorsko polje. Njegova divergencija  $\nabla \cdot F$  je skalarna funkcija koja je jednaka zbroju prvih parcijalnih derivacija svih koordinatnih funkcija od  $F$  redom po odgovarajućim varijablama, tj. divergencija vektorskog polja je trag njegove Jacobijeve matrice:

$$\operatorname{div} F(X) = \nabla \cdot F(X) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X).$$

**Primjer 416.** Neka je  $F(x, y) = (\ln y, \frac{x}{y})$ . Tada je

$$\nabla \cdot F(x, y) = \frac{\partial \ln y}{\partial x} + \frac{\partial xy^{-1}}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

**Primjer 417.** Gaußov zakon za magnetsko polje  $\mathbf{B}$  ima oblik  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , čime se iskazuje da nema točkastih izvora magnetskog polja.

Rotacija vektorskog polja se definira samo za vektorska polja triju varijabli, dakle za  $F = (F_x, F_y, F_z) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ :

$$\operatorname{rot} F(X) = \nabla \times F(X) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Rotacija vektorskog polja je vektorsko polje s istim varijablama.

**Primjer 418.** Ako je  $F(x, y, z) = (y, z, x) = y \vec{i} + z \vec{j} + x \vec{k}$ , onda je

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (-1, -1, -1).$$

**Napomena 35.** Oznake za tri načina djelovanja nabla-operatora na funkcije potječu od sličnosti pravila izračunavanja s tri tipa produkata vezanih za geometrijske vektore:

- Poput množenja vektora skalarom —  $\nabla f$ , gdje je  $f$  skalarna funkcija;
- Poput skalarnog produkta vektora —  $\nabla \cdot F$ , gdje je  $F$  vektorsko polje;
- Za  $n = 3$ : poput vektorskog produkta vektora —  $\nabla \times F$ , gdje je  $F$  vektorsko polje.

Nabla-operator je u sva svoja tri načina djelovanja linearan, tj.

$$\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g,$$

$$\nabla \cdot (aF + bG) = a\nabla \cdot F + b\nabla \cdot G,$$

$$\nabla \times (aF + bG) = a\nabla \times F + b\nabla \times G,$$

za sve konstante  $a$  i  $b$  i sve skalarne funkcije  $f$  i  $g$ , odnosno sva vektorska polja  $F$  i  $G$ . Za skalarne funkcije  $f$ ,  $g$  i vektorska polja  $F$ ,  $G$  (uz uvjet da izrazi u formulama imaju smisla) vrijede i sljedeće formule:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f,$$

$$\nabla \times (fF) = (\nabla f) \times F + f(\nabla \times F),$$

$$\nabla \times (F \times G) = (\nabla \cdot G)F + (G \cdot \nabla)F - (\nabla \cdot F)G - (F \cdot \nabla)G,$$

$$\nabla \cdot (fF) = (\nabla f) \cdot F + f(\nabla \cdot F),$$

$$\nabla \cdot (F \times G) = (\nabla \times F) \cdot G - F \cdot (\nabla \times G),$$

$$\nabla(F \cdot G) = F \times (\nabla \times G) + G \times (\nabla \times F) + (F \cdot \nabla)G + (G \cdot \nabla)F.$$

Ponekad je potrebno odrediti „dvostruko” djelovanje nabla-operatora. Budući da je  $\nabla f$  (gradijent) vektorsko polje, na njega  $\nabla$  može djelovati kao divergencija ( $\nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$ ), a u slučaju triju nezavisnih varijabli i kao rotacija ( $\nabla \times \nabla f = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f$ ). Budući da je  $\nabla \cdot F$  (divergencija) skalarna funkcija, na nju  $\nabla$  može djelovati samo kao gradijent ( $\nabla \nabla \cdot F = \operatorname{grad} \operatorname{div} f$ ). Budući da je  $\nabla \times F$  (rotacija) vektorsko polje triju varijabli, na njega  $\nabla$  može djelovati kao divergencija ( $\nabla \cdot \nabla \times F = \operatorname{div} \operatorname{rot} F$ ) i kao rotacija ( $\nabla \times \nabla \times F = \operatorname{rot} \operatorname{grad} F$ ).

**Primjer 419.** Neka je  $f$  skalarna funkcija varijabli  $x, y, z$ . Onda je rotacija njezinog gradijenta

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla f &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) - \vec{j} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right),\end{aligned}$$

što je po Schwartzovom teoremu nulvektor.

Dakle, pokazali smo: Rotacija gradijenta skalarne funkcije triju varijabli je nul-polje:

$$\nabla \times \nabla f = \text{rot grad } f = [0, 0, 0].$$

Npr., rotacija elektrostatskog polja točkastog naboja je nul-polje:  $\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \nabla \phi = \vec{0}$ . Slično se pokaže da je divergencija rotacije vektorskog polja s tri varijable uvijek nul-funkcija:

$$\nabla \cdot \nabla \times F = \text{div rot } F = 0.$$

Među preostala tri smisljena dvostruka djelovanja nabra-operatora ističe se divergencija gradijenta skalarne funkcije, koja se naziva **Laplaceovim operatorom**:

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

**Primjer 420.** Raspišimo Laplaceov operator za funkcije triju varijabli:

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \nabla \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

**Primjer 421.** Za  $f(x, y, z) = A \sin(ax) \sin(by) \sin(cz)$  je

$$\nabla^2 f(x, y, z) = -(a^2 + b^2 + c^2)f(x, y, z),$$

tj. funkcija  $f$  je svojstveni vektor Laplaceovog operatora koji odgovara svojestvenoj vrijednosti  $-a^2 - b^2 - c^2$ .

**Napomena 36.** Laplaceov operator se pojavljuje u mnogim važnim jednadžbama u fizici:



- Laplaceova jednadžba  $\nabla^2\phi = 0$ ,
- Helmholtzova jednadžba  $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$ ,
- valna jednadžba  $\nabla^2\phi = \frac{1}{v} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ ,
- Schrödingerova jednadžba (za stacionarna stanja):  $\hat{H}\psi = E\psi$ ,  $\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V$ .

**Napomena 37.** Za račune s gradijentima, divergencijama, rotacijama i Laplaceovim operatorom često su potrebne zamjene koordinata (osobito u kvantnoj teoriji iz Kartezijevih u sferne). Odgovarajuće formule se izvede pomoću lančanog pravila. Tako su primjerice gradijent i Laplaceov operator skalarne funkcije izražene preko sfernih koordinata dani kao

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right),$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2},$$

a divergencija i rotacija vektorskog polja u sfernim koordinatama ( $F = (F_r, F_\phi, F_\theta)$ ) se računaju formulama

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

i

$$\begin{aligned} \nabla \times F = & \frac{1}{r \sin \phi} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi F_\theta) - \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) \right) \hat{\phi} + \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r F_\phi) - \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right) \hat{\theta}. \end{aligned}$$

U zadnjoj formuli su  $\hat{r}$ ,  $\hat{\phi}$  i  $\hat{\theta}$  jedinični vektori baze sfernog koordinatnog sustava ( $\hat{r} = \cos \theta \sin \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \phi \vec{k}$ ,  $\hat{\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ ,  $\hat{\phi} = \cos \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \cos \phi \vec{j} - \sin \phi \vec{k}$ ).

Važna podvrsta vektorskih polja su konzervativna vektorska polja. Znamo da je gradijent skalarne funkcije uvijek vektorsko polje, dakle su neka vektorska polja gradijenti skalarnih funkcija, kao što su i neke funkcije jedne varijable derivacije drugih funkcija. No, obrat ne vrijedi — nije svako vektorsko polje gradijent neke skalarne funkcije.

**Primjer 422.** Je li  $F(x, y) = (x + y, xy)$  gradijent neke skalarne funkcije? Pretpostavimo da jest:  $F = \nabla f$ , odnosno

$$(x + y, xy) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

za neku  $f = f(x, y)$ . Integriranjem  $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$  po  $x$  dobijemo

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + yx + C(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{dC}{dy} \Rightarrow \frac{dC}{dy} = xy - x.$$

Integriranjem po  $y$  dobijemo

$$C(y) = x \frac{y^2}{2} - xy + c,$$

što je nemoguće ( $C$  deriviranjem po  $x$  mora dati 0), tj. ne postoji skalarne funkcija  $f$  takva da  $F$  bude njen gradijent.

Dakle, neka vektorska polja su gradijenti skalarnih funkcija, a neka nisu.

**Definicija 89 (Konzervativno vektorsko polje).** Vektorsko polje  $F$  naziva se konzervativnim ako postoji skalarne funkcija  $f$  takva da je  $F = \nabla f$ . U tom slučaju  $f$  se zove potencijalom od  $F$ .

Uočite da je po definiciji  $\nabla f$  uvijek konzervativno vektorsko polje. Također primijetimo da je rotacija konzervativnog vektorskog polja triju varijabli nulpolje (ako je  $F$  konzervativno, onda je  $F = \nabla f$ , pa je  $\nabla \times F = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$  kako smo već pokazali u primjeru 419).

Ako je  $F = \nabla f$ , znači da je  $F_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, F_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}$ , pa po Schwartzovom teoremu mora vrijediti

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Gornji uvjet zove se **Eulerov uvjetom**: Vektorsko polje zadovoljava Eulerov uvjet ako mu je Jacobijeva matrica simetrična. Vektorsko polje koje ne zadovoljava Eulerov uvjet sigurno nije konzervativno. No, vektorsko polje koje ga zadovoljava ne mora biti konzervativno (primjeri za to nisu jednostavni pa ih izostavljamo). Ipak, ako je domena vektorskog polja s  $n$  varijabli koje zadovoljava Eulerov uvjet „otvoreni kvadar“ (Kartezijev produkt  $n$  otvorenih intervala) ili „otvorena kugla“ (skup svih točaka  $T$  iz  $\mathbb{R}^n$  takvih da je  $\|\vec{ST}\| < r$  za neku fiksnu točku  $S \in \mathbb{R}^n$  i neki fiksni  $r > 0$ ), onda je to polje konzervativno, tj. tada je Eulerov uvjet ekvivalentan konzervativnosti.

**Primjer 423.** Za vektorsko polje  $F(x, y) = (2x^3y^4 + x, 2x^4y^3 + y)$  se Eulerov uvjet svodi na samo jednu jednakost:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

Budući da je  $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 8x^3y^3$  i  $\frac{\partial F_y}{\partial x} = 2x^3y^3$ , vidimo da ovo polje zadovoljava Eulerov uvjet. Budući da je to polje definirano na čitavom  $\mathbb{R}^2 = \langle -\infty, +\infty \rangle \times \langle -\infty, +\infty \rangle$ , zaključujemo da je konzervativno.

Stoga znamo da je  $F_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  za neki potencijal  $f$ , odnosno

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^3y^4 + x$$

pa integriranje po  $x$  daje

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^4y^4 + \frac{1}{2}x^2 + c(y),$$

što deriviranjem po  $y$  daje

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^4y^3 + c'(y)$$

što opet zbog konzervativnosti mora biti jednako  $F_y = 2x^4y^3 + y$ . Stoga je  $c'(y) = y$ , dakle je  $c(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$  i zaključujemo da je traženi potencijal

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^4y^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C.$$



**Ponovimo bitno...** Vektorske funkcije su funkcije kojima je domena podskup od nekog  $\mathbb{R}^m$  ( $m > 1$ ); drugačije rečeno, rezultat djelovanja vektorske funkcije je uređena  $m$ -torka brojeva. Vektorske funkcije kojima je broj koordinata u domeni i kodomeni jednak nazivaju se vektorskim poljima. Svaku vektorsku funkciju  $f : D \rightarrow K \subseteq \mathbb{R}^m$  možemo shvatiti kao uređenu  $m$ -torku svojih koordinatnih funkcija. Jacobijeva matrica vektorske funkcije na poziciji  $(i, j)$  ima parcijalnu derivaciju  $i$ -te koordinatne funkcije po  $j$ -toj varijabli. Za vektorska polja Jacobijeva matrica je kvadratna, a njezina determinanta naziva se Jakobijan.

Nabla-operator  $\nabla$  je linearan operator koji djeluje na skalarne ili vektorske funkcije više varijabli. Ako je funkcija skalarna dobivamo vektorsko polje: gradijent  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^t$ . Ako je funkcija vektorsko polje imamo dva načina djelovanja nabla-operatora: divergencija koja je trag Jacobijeve

matrice tog polja (to je skalarna funkcija  $\nabla \cdot F = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ ) i rotacija  $\nabla \times F$  (koja je vektorsko polje i definirana je samo za vektorska polja s tri varijable). Divergencija gradijenta naziva se Laplaceovim operatorom, a divergencija rotacije i rotacija gradijenta (za funkcije triju varijabli) su nulfunkcije. Vektorska polja koja su gradijenti skalarnih funkcija (potencijala) nazivaju se konzervativnim vektorskim poljima. Da bi vektorsko polje bilo konzervativno, nužno je da njegova Jacobijeva matrica bude simetrična (to se zove Eulerovim uvjetom). 🐣🐣🐣

## 10.4 Integralni račun funkcija više varijabli

Postoje tri načina na koje Riemannove integrale (poglavlje 5) možemo poopćiti na integrale funkcija više varijabli. To su višestruki integrali te krivuljni integrali prve i druge vrste. Neovisno o tipu poopćenja, kao i prije, područje integriranja (skup po kojem integriramo) mora biti podskup domene podintegralne funkcije.

### 10.4.1 Višestruki integrali

Kao što znamo, za nenegativne po dijelovima neprekidne funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

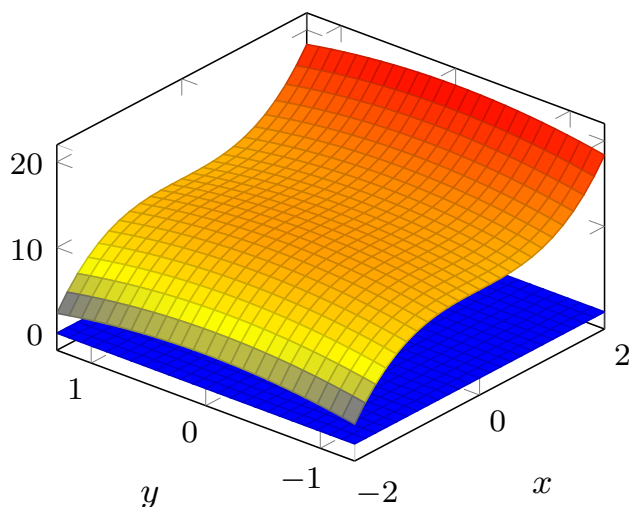
$$\int_a^b f(x) dx$$

predstavlja površinu omeđenu grafom podintegralne funkcije  $f$ , područjem integriranja (segmentom  $[a, b]$  kao podskupom  $x$ -osi) i vertikalama povučenim u rubovima područja integriranja do grafa. Ideja višestrukih integrala je poopćiti jednostruke (određene, Riemannove) integrale na skalarne funkcije više varijabli tako da povećamo i dimenziju rezultata.

Neka je  $f$  nenegativna (neprekidna) skalarna funkcija dviju varijabli i  $A$  podskup njezine domene (dakle, podskup  $(x, y)$ -ravnine). **Dvostruki integral** od  $f$  po području integriranja  $A$ , u oznaci

$$\iint_A f(x, y) dx dy \quad \text{ili} \quad \iint_A f(x, y) dA$$

je volumen omeđen grafom te funkcije, skupom  $A$  i vertikalama povučenim na  $(x, y)$ -ravninu u svim točkama ruba od  $A$ . Primjerice, za funkciju  $f$  čiji graf je žuto-narančasta ploha na slici 10.19, njezin dvostruki integral po plavom pravokutniku (to je područje integracije  $A$ ) je volumen omeđen te dvije obojene plohe i vertikalama koje spajaju rubove područja integracije s grafom.



Slika 10.19: Vizualizacija dvostrukog integrala

**Primjer 424.** Neka je  $A = [a, b] \times [c, d]$  pravokutnik u  $(x, y)$ -ravnini (s bridovima paralelnim koordinatnim osima). Budući da je graf funkcije  $f(x, y) = 1$  ravnina  $z = 1$ ,

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{[a,b] \times [c,d]} dx \, dy$$

je volumen kvadra kojemu je  $A$  osnovka i visina 1, dakle je taj integral jednak  $(d - c)(b - a)$ .

Primijetimo dakle da ako naše dvije nezavisne varijable te zavisna varijabla imaju mjerne jedinice, mjerna jedinica dvostrukog integrala bit će umnožak svih tih triju jedinica (kao što je kod jednostrukog integrala mjerna jedinica bil umnožak jedinica nezavisne i zavisne varijable).

Uzevši u obzir navedenu vizualizaciju dvostrukog integrala, lako zaključujemo da ako je površina područja integracije  $A$  jednaka 0, dvostruki integral bilo koje podintegralne funkcije iznosi 0. To je generalizacija dobro nam poznate formule  $\int_a^a f(x) \, dx = 0$  (jednostruki integral po području duljine nula).

**Primjer 425.** Budući da je površina kružnice nula, vrijedi

$$\iint_{x^2+y^2=1} \sin(x - 2y^2) \, dx \, dy = 0.$$

Dijelovi volumena koji su ispod  $(x, y)$ -ravnine se, kao i dijelovi površine koji su ispod  $x$ -osi za jednostruke određene integrale, u integral uključuju s negativnim predznakom.

**Primjer 426.** *Vrijedi*

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} y \, dx \, dy = 0.$$

*Naime, područje integriranja je jedinični krug u  $(x, y)$ -ravnini sa središtem u ishodištu, te je stoga dio prostora čiji volumen se opisuje gornjim integralom „valjak” (polumjera 1 kojemu je os  $z$ -os) čija jedna baza je spomenuti jedinični krug, a druga je dio grafa podintegralne funkcije  $f(x, y) = y$ , tj. dio ravnine  $z = y$ . Ta ravnina sadrži  $x$  os te je točno pola tog volumena iznad, a pola ispod područja integriranja te je stoga gornji integral jednak 0.*

Kao i jednostruki određeni integrali, dvostruki (i svi ostali višestruki) integrali su također linearni. No, postupak dvostrukog (i općenitije višestrukog) integriranja uvelike ovisi o području integriranja, a ne samo o podintegralnoj funkciji. Najlakše se računaju dvostruki integrali po području integriranja koje je pravokutnik s bridovima paralelnim koordinatnim osima:

**Teorem 55 (Fubini).** *Ako je podintegralna funkcija neprekidna na pravokutniku  $[a, b] \times [c, d]$ , onda vrijedi*

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

**Primjer 427.** *Izračunajmo  $\iint_{[-5,4] \times [0,3]} (2x - 4y^3) \, dA$ . Prema Fubinijevom teoremu, taj je integral jednak*

$$\begin{aligned} \int_{x=-5}^4 \left( \int_{y=0}^3 (2x - 4y^3) \, dy \right) dx &= \int_{-5}^4 (2xy - y^4)|_{y=0}^3 dx = \\ &= \int_{-5}^4 (6x - 81) dx = 3x^2 - 81x|_{-5}^4 = -756. \end{aligned}$$

Ako je područje integriranja kao u Fubinijevom teoremu i ako se još uz to (neprekidna) podintegralna funkcija se može faktorizirati na zasebne funkcije svojih dviju varijabli, dvostruki integral se svodi na umnožak dva obična, jednostruka integrala. Naime, ako je  $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ , onda u Fubinijevom teoremu imamo

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_c^d g(x) \cdot h(y) \, dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b g(x) \cdot \left( \int_c^d h(y) dy \right) dx = \left( \int_c^d h(y) dy \right) \cdot \left( \int_a^b g(x) dx \right).$$

Dakle, pokazali smo

**Korolar 8.** *Ako su funkcije  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i  $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidne, onda je*

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x) \cdot h(y) dx dy = \left( \int_a^b g(x) dx \right) \cdot \left( \int_c^d h(y) dy \right).$$

**Primjer 428.**

$$\int_1^2 \int_1^2 xy^2 dx dy = \left( \int_1^2 x dx \right) \cdot \left( \int_1^2 y^2 dy \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{2}.$$

Napomenimo da se prethodni korolar, kao i Fubinijev teorem mogu primijeniti i za slučaj nepravih integrala ako je neka od granica  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  beskonačna.

Naravno, nismo uvijek u situaciji da područje integriranja  $A$  bude pravokutnik sa stranicama paralelnim koordinatnim osima. Tada je vrlo često zgodno provesti supstituciju (zamjenu) varijabli tako da područje jednostavnije opišemo u nekom drugom koordinatnom sustavu. Posebno često je zgodan prijelaz na polarne koordinate.

**Primjer 429.** *Ako je  $A$  četvrtina jediničnog kruga sa središtem u ishodištu, ona se sastoji od točaka  $(x, y)$  za koje je  $0 \leq x \leq 1$ , a za svaki takav  $x$  odgovarajući  $y$  se nalazi u rasponu od 0 do  $\sqrt{1-x^2}$ . S druge strane, ako umjesto u Kartezijevim koordinatama isto područje  $A$  opišemo u polarnim koordinatama, vidimo da se ono sastoji od svih točaka ravnine s  $0 \leq r \leq 1$  i  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .*

Kao i u prethodnom primjeru, neka područja integriranja lakše je opisati u polarnim koordinatama. To se posebice odnosi na kružne isječke iz kružnica sa središtem u ishodištu ili pak na kružne vijence sa središtem u ishodištu:

- Kružni isječak iz kruga polumjera  $a$  sa središtem u  $O$ , a koji se nalazi između polupravaca  $\varphi = \alpha$  i  $\varphi = \beta$  opisan je s  $0 \leq r \leq a$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , tj. u polarnim koordinatama to je „pravokutnik“  $[0, a] \times [\alpha, \beta]$ .
- Kružni vijenac između kružnica  $r = a$  i  $r = b$  sa središtem u  $O$  opisan je s  $a \leq r \leq b$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , tj. u polarnim koordinatama to je „pravokutnik“  $[a, b] \times [0, 2\pi]$ .

Kao i u slučaju jednostrukih integrala, supstitucija (zamjena varijabli) uz efekt na granice integriranja, podintegralnu funkciju i diferencijale varijabli sa sobom nosi i dodatni faktor, a to je apsolutna vrijednost Jakobijana vektorskog polja koje odgovara zamjeni varijabli. Ako prelazimo koordinate  $(x, y)$  zamjenjujemo koordinatama  $(x', y')$  u ravnini, onda je

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_A f(x', y') \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} \right| dx' dy'.$$

Zašto nam treba apsolutna vrijednost Jakobijana? Jakobijan je determinanta Jakobijeve matrice vektorskog polja, te stoga njegov predznak ovisi o redosljedu kojim navodimo koordinatne funkcije vektorskog polja. Budući da ne želimo da rezultat integrala ovisi o tome kojim smo redosljedom naveli nove (ili stare) koordinate (varijable), potrebno je pri zamjeni varijabli uzeti apsolutnu vrijednost Jakobijana. Za najčešću zamjenu varijabli (Kartezijevih polarnim), odgovarajući iznos apsolutne vrijednosti Jakobijana je, kako smo vidjeli u prethodnom odjeljku,  $r$ . Imamo dakle formulu za zamjenu varijabli iz Kartezijevih u polarne koordinate u dvostrukim integralima:

$$\int \int_A f(x, y) dx dy = \int \int_A f(r, \varphi) r dr d\varphi.$$

**Primjer 430.** *Izračunajmo*

$$\iint_A e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

ako je  $A$  kao u primjeru 429. U polarnim koordinatama je  $A = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ , a znamo i da je  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  pa računamo:

$$\begin{aligned} \iint_A e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy &= \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} e^r \cdot r dr d\varphi = \\ &= \int_{r=0}^1 r e^r dr \int_{\varphi=0}^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^1 r e^r dr = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

pri čemu je posljednji integral izračunat parcijalnom integracijom.

Koristeći formulu za zamjenu varijabli i Fubinijev teorem mogu se pokazati još dvije korisne formule za dvostruke integrale. Ako je područje integriranja  $A$  omeđeno pravcima  $x = a$ ,  $x = b$  i grafovima funkcija  $y = f_1(x)$  i  $y = f_2(x)$ , onda je

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$



Slično, ako je područje integriranja  $A$  omeđeno pravcima  $y = c$ ,  $y = d$  i grafovima funkcija  $x = g_1(y)$  i  $x = g_2(y)$ , onda je

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left( \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

**Primjer 431.** Integrirajmo  $f(x, y) = x + 2y$  po dijelu prvog kvadranta omeđenom s  $y$ -osi, pravcem  $y = 9$  i parabolom  $y = x^2$ . Područje integriranja  $A$  je trokut (s jednom zakrivljenom, paraboličnom, stranicom) s vrhovima  $O$ ,  $(0, 9)$  i  $(3, 9)$  (sjecište  $y = 9$  s  $y = x^2$ ). Dakle, ono se sastoji od svih točaka  $(x, y)$  s  $0 \leq x \leq 3$ , a za svaki takav  $x$  odgovarajući  $y$  ide od parabole do  $y = 9$ , tj. za svaki  $x$  je  $x^2 \leq y \leq 9$ . Stoga računamo

$$\begin{aligned} \iint_A (x + 2y) \, dA &= \int_{x=0}^3 \left( \int_{y=x^2}^9 (x + y) \, dy \right) dx = \\ &= \int_{x=0}^3 xy + y^2 \Big|_{y=x^2}^9 dx = \int_{x=0}^3 (9x + 81 - x^3 - x^4) dx = \frac{4293}{20}. \end{aligned}$$

Daljnjim povećanjem dimenzije domene dobivamo trostruke (i četverostruke, peterostruke ...) integrale. Za trostruke integrale podintegralna funkcija je skalarna funkcija triju varijabli, a područje integriranja trodimenzionalno (podskup njezine domene), za četverostruke integrale podintegralna funkcija je skalarna funkcija četiriju varijabli, a područje integriranja četverpdimenzionalno (podskup njezine domene) i t.d. Također, kao i prije vrijedi: Ako nezavisne varijable i zavisna varijabla imaju mjerne jedinice, mjerna jedinica višestrukog integrala je umnožak mjernih jedinica svih uključenih varijabli.

Trostruki integrali se označavaju s

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dV,$$

gdje je  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  podskup domene podintegralne funkcije. Za trostruke (kao i ostale višestruke) integrale vrijede analogije svih navedenih pravila o dvostрукim integralima. Fubinijev teorem za trostruke integrale kaže da ako je područje integriranja kvadar  $V = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$  (sa stranama paralelnim koordinatnim ravninama) i  $f$  neprekidna na  $V$ , onda je

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_p^q f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

i analogno za ostale odabire redoslijeda integriranja. Također, ako je  $f$  moguće faktorizirati kao  $f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$  vrijedi

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \left( \int_a^b g(x) \, dx \right) \cdot \left( \int_c^d h(y) \, dy \right) \cdot \left( \int_p^q k(z) \, dz \right).$$

Pri zamjeni varijabli u trostrukim integralima ponovno se kao dodatni faktor pojavljuje apsolutna vrijednost Jakobijana:

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{V'} f(x', y', z') \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', y', z')} \right| \, dx' \, dy' \, dz'$$

Specijalno, za u kvantnoj teoriji često korišteni prijelaz iz Kartezijevih u sferne koordinate vrijedi

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{V'} f(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

npr.

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Naposlijetku, kao što je jednostruki integral po području duljine 0 i dvostruki po području površine 0 jednak nuli, tako je i trostruki integral po području volumena 0 jednak nuli:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, d\Omega = 0 \quad (\text{ako } V(\Omega) = 0).$$

**Primjer 432.** Ako je  $S$  površina kugle (sfera), onda je za svaku skalarnu funkciju  $f$  triju varijabli  $\iiint_S f \, dV = 0$  zato što je volumen sfere jednak 0.

Kao što je kvocijent jednostrukog integrala neke funkcije i duljine područja integriranja prosječna vrijednost te funkcije na tom području integriranja (vidi odjeljak 5.5), tako se to pravilo može proširiti i na skalarne funkcije više varijabli. Prosječna vrijednost funkcije  $f$  dviju varijabli  $x$  i  $y$  na skupu  $A$  je  $\iint_A f(x, y) \, dA$  podijeljen s površinom od  $A$ , a prosječna vrijednost funkcije  $f$  triju varijabli  $x$ ,  $y$  i  $z$  na skupu  $V$  je  $\iiint_V f(x, y, z) \, dV$  podijeljen s volumenom od  $V$ .

**Primjer 433.** Prosječna vrijednost funkcije  $f(x, y) = xy$  na jediničnom krugu iznosi

$$\frac{1}{\pi} \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3 \cos \varphi \sin \varphi \, dr \, d\varphi = 0.$$

U odjeljku 5.5 upoznali smo se i s osnovnim principima primjene integrala na računanje vjerojatnosti, očekivane vrijednosti i sl. za neprekidne slučajne varijable opisane funkcijom gustoće vjerojatnosti. Ti se principi prenose i na slučaj funkcija gustoće koje ovise o više varijabli. Neka je  $f$  funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje nekog objekta na nekoj poziciji u ravnini (funkcija  $f$  onda ovisi o dvije varijable) ili u prostoru (pa je  $f$  funkcija triju varijabli). Tada vjerojatnost da se taj objekt nalazi unutar dijela ravnine  $A$  odnosno dijela prostora  $V$  jednaka  $P = \iint_A f \, dA$  odnosno  $P = \iiint_V f \, dV$ . Kako se svaki objekt sigurno nalazi negdje, funkcija  $f$  mora biti normirana, dakle uvijek za funkcije gustoće vrijedi  $\iint_{\mathbb{R}^2} f \, dA = 1$  (za funkcije dviju varijabli) odnosno  $\iiint_{\mathbb{R}^3} f \, dV = 1$  (za funkcije triju varijabli). U kvantnoj teoriji funkcija gustoće vjerojatnosti je, prema Bornovoj interpretaciji, kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (orbitale):  $f = |\psi|^2$  (podsjećamo da su u općem slučaju valne funkcije kompleksne). Prosječna (očekivana) vrijednost veličine opisane operatorom  $\hat{\Omega}$  je tada

$$\langle \Omega \rangle = \iiint_{\mathbb{R}^3} \psi^* \hat{\Omega} \psi \, dx \, dy \, dz$$

(i analogno za dvodimenzionalni slučaj). Skalarni produkti valnih funkcija računaju se kao integrali po čitavom prostoru, tj. po čitavim njihovim domenama:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_D \psi_1^* \psi_2 \, dS.$$

**Primjer 434.** *Odredimo prosječnu (očekivanu) udaljenost elektrona 1s-orbitale od jezgre atoma vodika; 1s-orbitala je valna funkcija*

$$\psi_{1s}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0},$$

*dakle je po Bornovoj interpretaciji odgovarajuća funkcija gustoće*

$$f(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}.$$

*Linearan operator koji odgovara udaljenosti čestice je do jezgre*

$$\hat{\Omega} = \hat{r} = r.$$

*(množenje s  $r$ ). Stoga je*

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \psi^* \hat{r} \psi \, dV = \iiint_{\mathbb{R}^3} r \cdot \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} \, dV = \\ &= \frac{1}{\pi a_0^3} \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^3 e^{-2r/a_0} \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \frac{3}{2} a_0. \end{aligned}$$

**Primjer 435.** Pokažimo da su vodikove  $1s$  i  $2s$  orbitale ortogonalne, tj. da je

$$\langle \psi_{1s}, \psi_{2s} \rangle = 0.$$

Imamo

$$\psi_{2s}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \left( 2 - \frac{r}{a_0} \right) e^{-r/(2a_0)},$$

a  $\psi_{1s}$  znamo iz prethodnog primjera 434. Dakle, računamo

$$\langle \psi_{1s}, \psi_{2s} \rangle = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \psi_{1s} \psi_{2s} \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

S obzirom na to da multiplikativne konstante nisu 0, dovoljno je pokazati da je

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{+\infty} e^{-r/a_0} \left( 2 - \frac{r}{a_0} \right) e^{-r/(2a_0)} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = 0.$$

Podintegralna funkcija se faktorizira na funkcije od  $r$ ,  $\varphi$  i  $\theta$  pa po korolaru Fubinijevog teorema treba izračunati jednostruke integrale po tim varijablama.

Imamo

$$\int_{r=0}^{\infty} \left( 2r^2 - \frac{r^3}{a_0} \right) e^{-3r/(2a_0)} \, dr = 0,$$

koristeći dvaput formulu 5.2. Stoga je i ukupni integral jednak 0.

**Primjer 436.** Ako je elektron opisan valnom funkcijom  $\psi$ , a zanima nas vjerojatnost da se on nađe izvan stošca s vrhom u ishodištu, kojemu je os pozitivni dio  $z$ -osi i kut pri vrhu  $45^\circ$ , a unutar kugle polumjera  $R$ , potrebno je izračunati

$$P = \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=22.5^\circ}^{\pi} r^2 |\psi|^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

## 10.4.2 Krivulje i krivuljni integrali

Implicitna definicija krivulja, tj. definicija krivulja kao nivo-skupova skalar-nih funkcija dviju varijabli, pogodna je za ravninske krivulje, no ne može se poopćiti na više dimenzije. Stoga se općenita definicija temelji na ideji parametarski zadanih krivulja (odjeljak 10.4.1).

**Definicija 90 (Krivulja).** Krivulja u  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 2$ ) je slika neprekidne funkcije  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Funkciju  $\gamma$  također ćemo, malo nepravilno, nazivati krivuljom. Vidimo da se radi o vektorskim funkcijama jedne varijable. U pravilu se podrazumijeva da je funkcija  $\gamma$  iz gornje definicije po dijelovima (dakle, do na konačno mnogo točaka) derivabilna i da je njezina derivacija neprekidna (takve funkcije, odnosno krivulje nazivamo glatkima).

Ako je  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  krivulja, onda točku  $A = \gamma(a)$  zovemo **početkom krivulje**, a točku  $B = \gamma(b)$  **krajem krivulje**. Ako se početak i kraj krivulje podudaraju ( $\gamma(a) = \gamma(b)$ ) kažemo da je krivulja **zatvorena**. Ako je  $\gamma$  krivulja u  $\mathbb{R}^3$  i ako je (za svako  $t$ )  $\gamma(t)$  element neke plohe, govorimo o krivulji na toj plohi. Uočimo da su ovako definirane krivulje prirodno **orijentirane**, tj. postoji prirodan smjer obilaska krivulje, a to je u smjeru porasta varijable  $t$  (od početka prema kraju).

**Primjer 437.** Uzmimo funkciju  $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiranu s  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$ . Ta funkcija određuje krivulju kojoj je početak točka  $\gamma(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$ , a kraj joj je  $\gamma(\pi) = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$ , dakle ova krivulja nije zatvorena. Slika te funkcije, tj. tom funkcijom definirana krivulja sastoji se od točaka koje u Kartezijevom koordinatnom sustavu u ravnini imaju koordinate  $(\cos t, \sin t)$  kad  $t$  ide od 0 do  $\pi$ , dakle su to po definiciji funkcija sinus i kosinus točke polukružnicu polumjera 1 sa središtem u ishodištu koja se nalazi u gornjoj poluravnini. Pritom ju obilazimo od  $\gamma(0)$  prema  $\gamma(\pi)$ , tj. orijentirana u pozitivnom smjeru.

U svakoj točki krivulje  $\gamma(T)$  definira se tangencijalni vektor<sup>11</sup> kao vektor derivacija svih koordinatnih funkcija dane krivulje:

$$\gamma'(T) = (\gamma'_1(T), \dots, \gamma'_n(T)).$$

Također, duljina  $l(\gamma)$  krivulje  $\gamma$  definira se kao integral norme tangencijalnog vektora po domeni krivulje:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt,$$

gdje je  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  standardni skalarni produkt vektora u  $\mathbb{R}^n$ .

Za krivulje u trodimenzionalnom prostoru ( $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ) u svakoj njihovoj točki  $\gamma(T)$  definirana je i normalna ravnina, tj. ravnina koja je u točki  $\gamma(T)$  okomita na krivulju. Drugim riječima,

<sup>11</sup>Vektor smjera tangente na krivulju u njenoj točki  $\gamma(T)$ . Ako je varijabla krivulje interpretirana kao vrijeme, a formula krivulje kao vremenska ovisnost pozicije o vremenu, tangencijalni vektor je vektor brzine.

to je ravnina koja sadrži točku  $(x(T), y(T), z(T))$  i ima vektor normale  $\gamma'(T)$ , dakle joj je jednadžba

$$x'(T)(x - x(T)) + y'(T)(y - y(T)) + z'(T)(z - z(T)) = 0.$$

Ponekad je potrebno krivulji promijeniti (obrnuti) orijentaciju.

**Primjer 438.** *Kružnicu zadanu parametarski s  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  obilazimo u pozitivnom smjeru. Kako postići da ju obilazimo u negativnom smjeru? Nije teško uvjeriti se da je s*

$$x(t) = \cos(-t) = \cos t, \quad y(t) = \sin(-t) = -\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

definirana ista kružnica, ali s orijentacijom u negativnom smjeru.

Općenito, ako je  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  krivulja, krivulju obrnute orijentacije (ali iste slike funkcije) označavamo s  $-\gamma$ , a definirana je s

$$-\gamma(t) = \gamma(a + b - t), \quad a \leq t \leq b.$$

Osim obrtanja orijentacije krivulje, ponekad je potrebno opisati jednu krivulju kao spoj više drugih.

**Primjer 439.** *Opišimo parametarski krivulju  $\gamma = ABCA$ , gdje je dio  $AB$  dužina od  $A = (0, 0)$  do  $B = (1, 0)$ ,  $BC$  četvrtina jedinične kružnice od  $B$  do  $C = (0, 1)$  i  $CA$  dužina  $\overline{CA}$ . Očigledno je da u točkama  $B$  i  $C$  dolazi do promjene pravila te ju je prirodnije opisati kao uniju dužine  $\gamma_1 = \overline{AB}$ , luka kružnice  $\gamma_2 = \overline{BC}$  i dužine  $\gamma_3 = \overline{CA}$ .*

Krivulja  $\gamma_1$  se lako parametarski opiše jer su na njoj točke oblika  $(t, 0)$  s  $0 \leq t \leq 1$ :

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Primijetimo da  $\gamma_1$  ima orijentaciju od svog početka  $\gamma_1(0) = A$  prema kraju  $\gamma_1(1) = B$ , kakvu i želimo.

Krivulja  $\gamma_2$  je parametarski opisana s

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t), \gamma_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Pritom  $\gamma_2$  ima orijentaciju od svog početka  $\gamma_2(0) = B$  prema kraju  $\gamma_2(\pi/2) = C$ , odnosno i ova je orijentacija u skladu sa željenom.

Krivulja  $\gamma_3$  se analogno kao i  $\gamma_1$  lako parametrizira:

$$\gamma_3(t) = (0, t), \gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Primijetimo da  $\gamma_3$  ima orijentaciju od svog početka  $\gamma_3(0) = A$  prema kraju  $\gamma_3(1) = C$ , što je obrnuto od željene. Stoga  $\gamma_3$  trebamo zamijeniti s  $\gamma_3(0 + 1 - t) = \gamma_3(1 - t) = (0, 1 - t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

Krivulja  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  nastala spajanjem dvije krivulje  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  i  $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  (pri čemu je  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , tj. kraj prve krivulje je početak druge) općenito je definirana s

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t), & b \leq t \leq c \end{cases}$$

Primijetimo da se u prethodnom primjeru domena od  $\gamma_2$  ne nastavlja na onu od  $\gamma_1$ , niti ona od  $\gamma_3$  na onu od  $\gamma_2$ , tako da ako želimo skroz formalno zadovoljiti gornju definiciju moramo varijable od  $\gamma_1$  i  $\gamma_3$  translahirati, odnosno uzeti  $\gamma_1(t) = (t+1, 0)$ ,  $-1 \leq t \leq 0$  i  $\gamma_3(t) = (0, 1 + \frac{\pi}{2} - t)$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} + 1$ .

Krivulje definirane na opisani način često se koriste u termodinamici. Naime, svako stanje (termodinamičkog) sustava opisuje se preko iznosa određenih skalarnih svojstava, dakle stanje opisano sa  $m$  svojstava se interpretira kao točka  $X \in \mathbb{R}^m$ . Tako svaki (termodinamički) sustav poistovjećujemo sa skupom svih njegovih mogućih stanja, tj. s (otvorenim) podskupom  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ . Proces su promjene stanja sustava. U infinitezimalnim procesima se te promjene događaju u beskonačno malim iznosima. Svaki infinitezimalni proces može se interpretirati kao orijentirana krivulja  $\gamma$  u skupu  $\Omega$ ; točke na toj krivulji predstavljaju stanja tokom procesa.

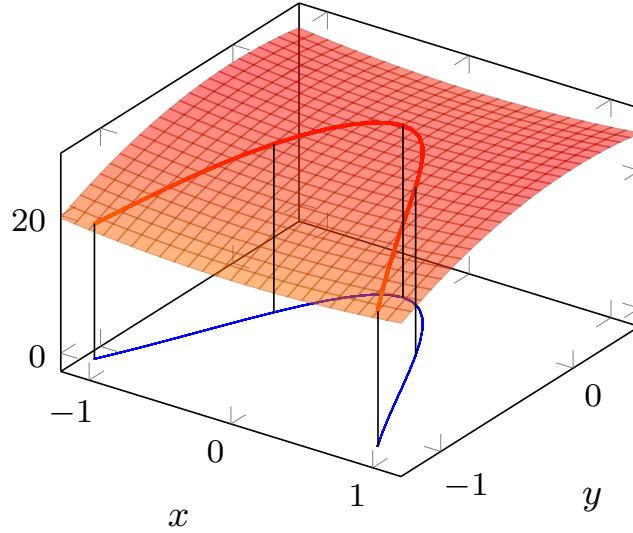
Upoznajmo se sad s krivuljnim integralima. Podintegralna funkcija u krivuljnim integralima 1. vrste je skalarna funkcija, a u krivuljnim integralima 2. vrste podintegralna funkcija je vektorsko polje. U oba slučaja područje integriranja je krivulja koja je podskup domene podintegralne funkcije. Za obje vrste krivuljnih integrala se u slučaju integriranja po zatvorenoj krivulji koristi oznaka  $\oint$  umjesto  $\int$ .

**Definicija 91 (Krivuljni integral prve vrste).** Neka je  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  neka neprekidna skalarna funkcija od  $n$  varijabli te neka je  $\gamma$  krivulja u  $\Omega$  (dakle,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ). Tada je krivuljni integral (prve vrste) od  $f$  duž  $\gamma$  definiran s

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Vizualno, ako je  $f$  (pozitivna, neprekidna) skalarna funkcija dviju varijabli i  $\gamma$  krivulja u  $(x, y)$ -ravnini unutar njezine domene,  $\int_{\gamma} f \, ds$  je površina zakrivljenog lika okomitog na  $(x, y)$ -ravninu omeđenog s krivuljom i grafom od  $f$  (slika ??).

**Primjer 440.** Izračunajmo  $\oint_{\gamma} xy^4 \, ds$  ako je  $\gamma$  rub polukruga  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $y \geq 0$ .



Slika 10.20: Vizualizacija krivuljnog integrala prve vrste

Prvo parametriziramo krivulju po kojoj se integrira:

$$\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), 0 \leq t \leq \pi.$$

S obzirom na definiciju, treba nam norma njezinog tangencijalnog vektora:

$$\gamma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t),$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-2 \sin^2 t)^2 + (2 \sin t)^2} = 2.$$

Stoga je po definiciji

$$\oint_{\gamma} xy^4 ds = \int_0^{\pi} 2 \cos t \cdot (2 \sin t)^4 \cdot 2 dt = 0.$$

Kao i svi integrali, krivuljni integrali 1. vrste su linearni. Uz to, oni ne ovise o orijentaciji krivulje po kojoj se integrira:

$$\int_{-\gamma} f ds = \int_{\gamma} f ds.$$

Integral po krivulji nastaloj spajanjem krivulja zbroj je integrala po pojedinim dijelovima:<sup>12</sup>

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds.$$

<sup>12</sup>Usporedite s pravilom  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .



Za primjene u fizici i fizikalnoj kemiji važniji su krivuljni integrali 2. vrste. Dobro je poznato da se mehanički rad izvršen duž ravnog puta (dužine) uslijed djelovanja sile  $F$  u pozicijama  $x$  može se izraziti integralom

$$w = \int_a^b F(x) dx = \int_{I=[a,b]} F dx.$$

Što ako put nije ravan, nego je nekakva krivulja  $\gamma$  u ravnini ili prostoru? U tom slučaju  $F$  postaje vektorsko polje (u svakoj točki  $X$  sila  $\vec{F}(X)$  je vektor) i integral tog vektorskog polja duž krivulje  $\gamma$  bit će izvršeni rad:

$$w = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

gdje  $d\vec{r}$  predstavlja infinitezimalni tangencijalni vektor na  $\gamma$ , a  $\cdot$  sugerira skalarni produkt vektora. Za opća vektorska polja  $F = (F_1, \dots, F_n)$  umjesto gornje notacije (vezane za vektorska polja na ravnini ili u trodimenzionalnom prostoru) uobičajenija je notacija  $\int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$ . No, što je to točno  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , odnosno  $\int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$ ?

**Definicija 92 (Krivuljni integral druge vrste).** Neka je  $F = (F_1, \dots, F_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  neko vektorsko polje i  $\gamma$  krivulja u  $\Omega$ . Tada je *krivuljni integral (druge vrste) vektorskog polja  $F$  duž  $\gamma$*  definiran s

$$\int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt,$$

gdje je s  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  označen standardni skalarni produkt vektora u  $\mathbb{R}^n$ .

**Primjer 441.** Ako je  $\gamma$  je dio pravca  $y = 2x + 1$  za  $x$  između 0 i 1, tj.  $\gamma(t) = (t, 2t + 1)$  za  $0 \leq t \leq 1$ , onda je

$$\int_{\gamma} x dx + xy^2 dy = \int_0^1 (t \cdot 1 + t(2t + 1)^2 \cdot 2) dt = \frac{37}{6}.$$

**Primjer 442.** Neka sila djeluje u točkama prostora tako da je u svakoj točki razmjerna radij-vektoru te točke, tj.  $\vec{F}(x, y, z) = k(x, y, z)$ . Koliki rad se izvrši ako se u polju te sile čestica kreće duž spirale  $\gamma : [0, 10\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ , od njezinog početka prema kraju?

Rekli smo:

$$w = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

dakle je

$$w = \int_0^{10\pi} \langle k(\cos t, \sin t, 2t), (-\sin t, \cos t, 2) \rangle dt = \int_0^{10\pi} 4kt dt = 200k\pi^2.$$

Kao i krivuljni integrali 1. vrste, i krivuljni integrali 2. vrste mogu se računati po dijelovima:

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} F_1 dx_1 + \dots F_n dx_n = \int_{\gamma_1} F_1 dx_1 + \dots F_n dx_n + \int_{\gamma_2} F_1 dx_1 + \dots F_n dx_n.$$

**Primjer 443.** Izračunajmo krivuljni integral vektorskog polja  $F(x, y) = (y^2, x + xy)$  po krivulji  $ABC$  koja je unija dvije dužine  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$ , gdje je  $A = (-1, 1)$ ,  $B = (0, 0)$  i  $C = (2, 2)$ , s tim da se krivulja obilazi od  $A$  preko  $B$  do  $C$ . Koliko taj integral iznosi ako se krivulja obiđe obrnutim smjerom?

Parametriziramo  $\overline{AB}$ :  $x(t) = t$ ,  $y(t) = -t$ ,  $-1 \leq t \leq 0$ , a zatim parametriziramo i  $\overline{BC}$ :  $x(t) = t$ ,  $y(t) = t$ ,  $0 \leq t \leq 2$ . Stoga je

$$\begin{aligned} \int_{ABC} y^2 dx + xy dy &= \int_{-1}^0 \langle ((-t)^2, t + t \cdot (-t)), (1, -1) \rangle dt + \int_0^2 \langle (t^2, t + t \cdot t), (1, 1) \rangle dt = \\ &= \int_{-1}^0 (2t^2 - t) dt + \int_0^2 (2t^2 + t) dt = 6. \end{aligned}$$

Za obilazak u suprotnom smjeru imamo:  $\overline{CB}$  je  $x(t) = -t$ ,  $y(t) = -t$  za  $0 \leq t \leq 2$ , a  $\overline{BA}$  je  $x(t) = -t$ ,  $y(t) = t$  za  $-1 \leq t \leq 0$ . Slijedi

$$\int_{CBA} y^2 dx + xy dy = -6.$$

Kao u gornjem primjeru, tako i općenito vrijedi:

$$\int_{-\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega,$$

odnosno kod krivuljnih integrala 2. vrste obrtanje orijentacije krivulje mijenja predznak integrala.<sup>13</sup>

Prije nego istaknemo još jedno važno svojstvo krivuljnih integrala, potrebno nam je opće lančano pravilo za parcijalne derivacije. Neka je  $f$  skalarna funkcija više varijabli i  $\gamma$  krivulja u njezinoj domeni. Tada je smisleno gledati kompoziciju  $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .<sup>14</sup>

$$f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)).$$

<sup>13</sup>Usporedite s pravilom  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .

<sup>14</sup>Uočimo: To je prvi faktor u definiciji krivuljnog integrala 1. vrste.

Dakle,  $f \circ \gamma$  je sad realna funkcija jedne varijable  $t \in [a, b]$  i posjeduje „običnu” derivaciju  $\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}$  (osim u konačno mnogo točaka).

**Primjer 444.** Neka je  $f(x, y) = x^2 + y^3$  i  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Tada je  $f \circ \gamma(t) = \cos^2 t + \sin^3 t$ , dakle

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = 2 \cos t \cdot (-\sin t) + 3 \sin^2 t \cos t.$$

Kao u prethodnom primjeru, tako se i općenito može dokazati sljedeće lančano pravilo za kompoziciju skalarne funkcije više varijabli s krivuljom (vektorskom funkcijom jedne varijable):

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma_i}{dt}.$$

U odjeljku ?? dat ćemo i općenito lančano pravilo (za kompoziciju skalarne funkcije više varijabli s općom vektorskom funkcijom), a sad se vratimo krivuljnim integralima 2. vrste.

Krivuljni integrali druge vrste imaju i važnu primjenu u termodinamici. Svojstva sustava su skalarne funkcije  $Y$  definirane na skupu  $\Omega$  koji predstavlja sustav (vidi str. 446). No, najčešće nije poznata (ili se čak ni ne može odrediti) eksplicitna formula takve funkcije  $Y$ . Pomoću krivuljnih integrala 2. vrste moguće je izračunati promjenu  $\Delta Y$  iznosa od  $Y$  tijekom procesa predstavljenog krivuljom  $\gamma$ , ako je poznat diferencijal (preciznija definicija diferencijala slijedi u odjeljku ??)  $F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$  kojim je  $Y$  indirektno opisana.<sup>15</sup> U tom slučaju naime vrijedi

$$\Delta Y = \int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n.$$

Među svojstvima termodinamičkog sustava neka su istaknuta i nazivaju se **funkcijama stanja**. To su svojstva sustava čija promjena tokom bilo kojeg procesa ne ovisi o samom procesu (o načinu na koji je do promjene došlo), nego samo o početnom i konačnom stanju.<sup>16</sup> Prema navedenom zaključujemo: Funkcija  $Y$  opisana diferencijalom  $F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$  je funkcija stanja točno ako  $\int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$  ne ovisi o  $\gamma$ , već samo o početnoj i krajnjoj

<sup>15</sup>Smisao je:  $F_1 \Delta x_1 + \dots + F_n \Delta x_n$  aproksimira promjenu  $\Delta Y$  ako se sve temeljne varijable  $x_1, \dots, x_n$ , o kojima ovise funkcije  $F_1, \dots, F_n$ , promijene za male iznose  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ . Takve se promjene u pravilu mogu mjeriti te se mogu dobiti – egzaktno ili aproksimativno – formule funkcija  $F_1, \dots, F_n$  čak i kad se ne može odrediti formula za  $Y$ .

<sup>16</sup>Funkcije stanja su praktički sva termodinamička svojstva osim rada  $w$  i topline  $q$ .

točki od  $\gamma$ . Dakle, poželjno je po poznatim funkcijama  $F_1, \dots, F_n$  (tj. poznatom vektorskom polju  $F = (F_1, \dots, F_n)$ ) slučaj kad je  $\int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$  neovisan o putu integriranja, već samo ovisi o početnoj i konačnoj točki. Pokazuje se da je to slučaj točno ako je vektorsko polje  $F$  konzervativno. Pokazat ćemo to pojednostavljenim izvodom.

Neka je  $F$  konzervativno vektorsko polje. Tada je  $F = \nabla f$  za neki potencijal  $f$ , odnosno  $F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  za sve  $i$ , pa je

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n &= \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_i(t)) \gamma'_i(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (f(\gamma(t))) dt = f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Dakle, krivuljni integral konzervativnog vektorskog polja ne ovisi o krivulji, nego samo o njezinom početku i kraju (odnosno,  $Y$  opisan s  $F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$  je funkcija stanja ako je  $F = (F_1, \dots, F_n)$  konzervativno).

Sažmimo prethodnu važnu činjenicu:

**Teorem 56.** *Krivuljni integral 2. vrste konzervativnog vektorskog polja  $F = (F_1, \dots, F_n)$  zadovoljava poopćenje Newton-Leibnizove formule*

$$\int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = f(B) - f(A),$$

gdje je  $f$  potencijal („antiderivacija”) od  $F$  ( $F = \nabla f$ ) i  $A$  i  $B$  su početak odnosno kraj krivulje  $\gamma$ .

Primijetimo da to posebno znači da je krivuljni integral konzervativnog vektorskog polja po svakoj zatvorenoj krivulji jednak 0 (ako je  $Y$  funkcija stanja i  $\gamma$  proces koji završava istim stanjem kojim je i počeo,  $\Delta Y = 0$ ).

**Primjer 445.** *Izračunajmo*

$$\int_{\gamma} (2x^3y^4 + x) dx + (2x^4y^3 + y) dy$$

ako je  $\gamma$  negativno orijentirana poluelipsa središta  $O$  kojoj su tjemena točke  $A(-5, 0)$ ,  $B(0, 3)$  i  $C(5, 0)$ .

Zadatak se pojednostavljuje ako se sjetimo da je polje koje integriramo konzervativno (primjer 423) pa je stoga traženi integral jednak integralu po dužini  $\overline{AC}$ , koju je lako parametrizirati kao  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, 0)$  za  $-5 \leq t \leq 5$ . Stoga je naš integral jednak

$$\int_{-5}^5 (2t^3t^4 + t) dt = 0.$$

Preciznija formulacija prethodnog teorema jest:

**Teorem 57.** *Za vektorsko polje  $F$  ekvivalentne su tvrdnje:*

(i) *Integral od  $F$  ne ovisi o putu, tj.  $\int_{\gamma_1} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = \int_{\gamma_2} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$  za svake dvije krivulje  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  koje imaju zajedničke početke i zajedničke krajeve.*

(ii)  *$\oint_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = 0$  za sve zatvorene krivulje.*

(iii)  *$F$  je konzervativno vektorsko polje.*

Budući da su u termodinamičkom kontekstu, rekli smo, razna svojstva opisana indirektno diferencijalima, na kraju ovog poglavlja potrebno je malo više reći o tom pojmu.

## 10.5 Diferencijali

Izrazi oblika

$$\omega = F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = \sum_i F_i dx_i$$

u kojima sve skalarne funkcije  $F_1, \dots, F_n$  ovise o istim varijablama  $x_1, \dots, x_n$  nazivaju se diferencijalima (malo preciznije, diferencijalima prvog reda). Očigledno je svaki diferencijal određen<sup>17</sup> vektorskim poljem  $F = (F_1, \dots, F_n)$  čije varijable su  $x_1, \dots, x_n$  pa diferencijal poput gornjeg možemo označiti s  $\omega_F$ .

**Primjer 446.** *Vektorskom polju  $F(x, y) = (x + y, x^2 - y^2)$  odgovara diferencijal  $\omega_F = (x + y) dx + (x^2 - y^2) dy$ .*

Dok je – nadamo se – svima jasno što su  $F_i$ -ovi, što su to  $dx_i$ -ovi? Kao prvo, to nisu „mali prirasti” varijabli:

$$dx_i \neq \Delta x_i.$$

Diferencijali pojedinih varijabli su također funkcije, štoviše, linearni funkcionali:  $dx_i$  je linearan funkcional s domenom  $\mathbb{R}^n$  koji  $n$ -torci pridružuje iznos  $i$ -te koordinate, tj.

$$dx_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**Primjer 447.** *Ako promatramo  $\mathbb{R}^3$  s koordinatama  $(x, y, z)$ , onda je  $dy(1, 2, 3) = 2$ .*

<sup>17</sup>Oprez: To nije isto što i diferencijal polja  $F$ , u oznaci  $dF$ .

Stoga je

$$dx_i(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) = \Delta x_i,$$

tj. u slučaju male promjene točke u  $\mathbb{R}^n$  diferencijal  $dx_i$  ukupnoj promjeni pridružuje promjenu  $i$ -te koordinate.

**Primjer 448.** Za slučaj realne funkcije jedne varijable, npr.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , imamo

$$\frac{df}{dx}(1) = f'(1) = 2,$$

odnosno  $df(1) = \frac{df}{dx}(1) dx = 2 dx$ ,  $f'(1) \approx \Delta f / \Delta x = (f(1+\Delta x) - f(1)) / \Delta x$ . Dakle,  $\Delta f \approx f'(1) \cdot \Delta x = 2 dx(\Delta x) = df(1)(\Delta x)$ .

Očito je da diferencijal  $\omega_F$  ovisi o istim varijablama  $x_1, \dots, x_n$  o kojima ovisi i vektorsko polje  $F$  (tj. funkcije  $F_1, \dots, F_n$ ), odnosno radi se o funkciji s istom domenom kao i  $F$ . Pritom se varijabla  $X = (x_1, \dots, x_n)$  pri uvrštavanju u  $\omega_F$  uvrštava u  $F_1, \dots, F_n$ .

**Primjer 449.** Za  $\omega_F = (x+y) dx + (x^2 - y^2) dy$  je  $\omega_F(1, 2) = (1+2) dx + (1^2 - 2^2) dy = 3 dx - 3 dy$ . Vidimo dakle da je  $\omega_F(1, 2)$  linearan funkcional (na  $\mathbb{R}^2$ ), u kojeg možemo uvrstiti bilo koji par realnih brojeva, npr.  $\omega_F(1, 2)(3, 4) = 3 dx(3, 4) - 3 dy(3, 4) = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = -3$ .

Imamo dakle redom:

- 

$$\omega_F = \sum_i \underbrace{F_i}_{\text{skalarna funkcija}} \underbrace{dx_i}_{\text{lin. funkcional}},$$

i  $\omega_F$  je funkcija koja ima istu domenu  $\Omega$  kao i funkcije  $F_i$ ;

- uvrštavanje elementa  $X_0 \in \Omega$  daje

$$\omega_F(X_0) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{dx_i}_{\text{lin. funkcional}} = \text{lin. funkcional}$$

odnosno rezultat djelovanja diferencijala  $\omega_F$  je linearan funkcional (na  $\mathbb{R}^n$ ). Dakle, **diferencijali** su funkcije koje elementima domene (elementima podskupa  $\Omega$  od  $\mathbb{R}^n$ ) pridružuju linearne funkcionale (s domenom  $\mathbb{R}^n$ );

- uvrštavanje točke iz  $\mathbb{R}^n$  u linearni funkcional  $\omega_F(X_0)$  daje

$$\omega_F(X_0)(X) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{x_i}_{\text{broj}} = \text{broj}.$$

Posebno:

$$\omega_F(X_0)(\Delta X) = \sum_i F_i(X_0)\Delta x_i,$$

ako smo sa  $\Delta X$  označili  $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ .

Zbog navedene korespondencije između vektorskih polja  $F$  i diferencijala  $\omega_F$ , krivuljni integrali 2. vrste se odnose na jedno i drugo:

$$\int_{\gamma} \omega_F = \int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Time smo opravdali notaciju krivuljnih integrala 2. vrste.

**Napomena 38.** Prema svemu navedenom vidimo da termodinamički gledano, diferencijali predstavljaju infinitezimalne promjene termodinamičkih svojstava, tj. indirektno opisuju svojstvo  $Y$  i da je promjena svojstva  $Y$  opisanog diferencijalom  $\omega$  tijekom procesa  $\gamma$  jednaka

$$\Delta Y = \int_{\gamma} \omega.$$

Znamo da krivuljni integrali 2. vrste ne ovise o putu integriranja ako je  $F$  konzervativno. Diferencijali koji odgovaraju konzervativnim vektorskim poljima nazivaju se **egzakti (ili potpuni) diferencijali**. Ako je  $F$  konzervativno, znamo da to po definiciji znači  $F = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$  za neki skalarni potencijal  $f$ , dakle takvom polju odgovara egzaktan diferencijal oblika

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Egzaktne diferencijale označavamo s  $df$ : Oznaka  $df$  za neki diferencijal  $\omega_F$  znači da je  $f$  potencijal od  $F$ . Kad koristimo oznaku  $df$ , egzaktan diferencijal nazivamo i diferencijalom skalarne funkcije  $f$ . Dakle: Egzaktan diferencijal je isto što i diferencijal neke skalarne funkcije, kao što je konzervativno vektorsko polje isto što i gradijent neke skalarne funkcije.

**Primjer 450.** Za skalarnu funkciju

$$f(x, y, z) = e^{x-y} z^2$$

je

$$\nabla f(x, y, z) = (e^{x-y} z^2, -e^{x-y} z^2, 2e^{x-y} z)$$

pa je diferencijal od  $f$

$$df(x, y, z) = e^{x-y} z^2 dx - e^{x-y} z^2 dy + 2e^{x-y} z dz.$$

**Primjer 451.** *Budući da je gradijent konstantne funkcije nul-vektorsko polje, diferencijal skalarne funkcije je nulfunkcija, odnosno u svakoj točki domene je to nulfunkcional.*

Teorem 57 sad možemo formulirati i u terminima diferencijala:

**Teorem 58.** *Za diferencijal  $\omega$  ekvivalentne su tvrdnje:*

- (i) *Integral od  $\omega$  ne ovisi o putu, tj.  $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$  za svake dvije krivulje  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  koje imaju zajedničke početke i zajedničke krajeve.*
- (ii)  *$\oint_{\gamma} \omega = 0$  za sve zatvorene krivulje.*
- (iii)  *$\omega$  je egzaktan diferencijal.*

Također i Eulerov kriterij egzaktnosti ima svoju ekvivalentnu varijantu u terminologiji diferencijala: Ako su sve  $F_i$  glatke fukcije s otvorenom povezanom domenom, diferencijal  $\omega_F = \sum_i F_i dx_i$  je egzaktan ako i samo ako je

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

za sve  $i, j = 1, \dots, n$ .

Neke diferencijalne jednačbe povezane su s egzaktnim diferencijalima. Ako je diferencijalna jednačba oblika

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

pri čemu je  $\omega = M(x, y) dx + N(x, y) dy$  egzaktan, nazivamo ju **egzaktnom diferencijalnom jednačbom**. Budući da je tada  $\omega = df$ , određivanjem potencijala  $f$  vektorskog polja  $(M, N)$  dobivamo rješenje takve jednačbe u obliku  $f(x, y) = C$ .

**Primjer 452.** *Diferencijalna jednačba  $(2xy - 9x^2) dx + (2y + x^2 + 1) dy = 0$  je egzaktna. Ako odredimo potencijal  $f(x, y)$  polja  $(2xy - 9x^2, 2y + x^2 + 1)$ , opće rješenje te jednačbe su krivulje  $f(x, y) = C$ .*

Ponekad je za diferencijal  $\omega$  moguće naći funkciju  $\mu$  jedne ili objiju varijabli  $x$  i  $y$  tako da je  $\mu \cdot \omega$  egzaktan. Tada kažemo da je  $\mu$  Eulerov multiplikator diferencijala  $\omega$ .

**Primjer 453.** *Jednačba  $(3xy - y^2) dx + x(x - y) dy = 0$  nije egzaktna, ali to postaje množenjem s  $x$ .*

Naposlijetku, iskoristimo naučeno da detaljnije promotrimo primjene funkcija više varijabli, posebice diferencijala, u termodinamici. Prema navedenim



matematičkim ekvivalentima, termodinamičko svojstvo  $Y$  je funkcija stanja točno ako  $\int_{\gamma} \omega$  ne ovisi o  $\gamma$ , već samo o početnoj i krajnjoj točki od  $\gamma$ , tj. točno ako je  $\omega$  egzaktni diferencijal (što obično možemo provjeriti koristeći Eulerov kriterij egzaktnosti). Uočimo: Ako znamo pravilo, odnosno formulu za  $Y$ , diferencijal  $dY$  je sigurno egzaktni jer je to po definiciji diferencijal određen s  $\nabla Y$ .

S fizikalne strane, funkcije stanja su sva svojstva koja su određiva na tzv. apsolutnoj ljestvici. To su npr. volumen, tlak, temperatura, množina, ... To u osnovi znači da je takvim funkcijama načelno moguće odrediti formulu pravila (primjerice, metodom najmanjih kvadrata). S druge strane, za rad  $w$  i toplinu  $q$  poznato je da iznos promjene (tj. izvršeni rad odnosno razmijenjena toplina) ovisi o načinu na koji je ta promjena postignuta pa diferencijali koji ih opisuju nisu egzaktni. Usprkos tome, uobičajeno ih je označavati s  $dw$  i  $dq$ . Ovisno o tipu rada, definiraju se pripadni neegzaktni diferencijali  $dw$ . Primjerice, volumni rad je definiran diferencijalom  $dw = -p dV$ . U sljedećim primjerima smatrat ćemo njega jedinim mogućim oblikom rada, ali postupci su analogni i ako se koriste diferencijali koji opisuju električni, kemijski ili koji drugi oblik rada.

S druge strane, za neegzaktni diferencijal  $dq$  postoji Eulerov multiplikator i on je termodinamička temperatura  $T$ . Dobiveni egzaktni diferencijal je diferencijal skalarne funkcije koja se naziva entropija i označava sa  $S$ . Ta je činjenica zapravo termodinamička definicija entropije, sadržana u **drugom glavnom stavku termodinamike**: (Za svaki termodinamički sustav) postoji jedinstveno, jednoznačno, neprekidno i ekstenzivno svojstvo stanja (funkcija stanja) sustava koje zovemo entropijom, u oznaci  $S$ ; to je svojstvo karakterizirano time da za reverzibilne procese vrijedi

$$dS = \frac{dq}{T}.$$

S druge strane, zbroj neegzaktnih diferencijala  $dw$  i  $dq$  je uvijek egzaktni diferencijal. To je sadržaj **prvog glavnog stavka termodinamike**, kojime je definirana unutrašnja energija: (Za svaki sustav) postoji jedinstveno, jednoznačno, neprekidno i ekstenzivno svojstvo stanja (funkcija stanja) sustava koje zovemo unutrašnjom energijom sustava, u oznaci  $U$ ; ona je u izoliranom sustavu konstantna, a u svim neadijabatskim procesima njezina promjena jednaka je zbroju izvršenog rada i prenesene topline. Za infinitezimalne procese to znači

$$dU = dw + dq.$$

Stoga, ukoliko je jedini mogući rad u nekom sustavu volumni te ako se odvija reverzibilni proces, vrijedi

$$dU = -p dV + T dS,$$

odnosno na osnovnoj razini je  $U$  skalarna funkcija stanja čije nezavisne varijable su volumen  $V$  i entropija  $S$ , a one određuju i zavisne varijable – tlak  $p$  i termodinamičku temperaturu  $T$ .

**Primjer 454.** *Termodinamički potencijal za određene termodinamičke uvjete je funkcija stanja<sup>18</sup>  $\Phi$  takva da je  $d\Phi = 0$  (ako je jedini mogući rad volumni). Za izobarno izotermne uvjete ( $p = \text{const.}$ ,  $T = \text{const.}$ ) termodinamički potencijal je Gibbsova energija definirana kao  $G = U + pV - TS$ :*

$$\begin{aligned} dG &= d(U + pV - TS) = dw + dq + p dV + V dp - T dS - S dT = \\ &= -p dV + T dS + p dV - T dS = 0. \end{aligned}$$

Slično se vidi da je entalpija  $H = U + pV$  termodinamički potencijal za izobarne adijabatske sustave (konstantan  $p$  i  $S$ , tj.  $dp$  i  $dS$  su nulfunkcionalni).

Koristeći definiciju egzaktnih diferencijala možemo izvesti mnoge korisne termodinamičke relacije.

**Primjer 455.** *Kako je  $G = H - TS$  funkcija stanja, slijedi da je*

$$dG = V dp - S dT$$

egzaktan diferencijal, dakle je oblika

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p dT.$$

Slijedi:

$$\left( \frac{\partial G}{\partial p} \right)_T = V, \quad \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = -S.$$

Uvrštavanje posljednje jednakosti u definiciju  $G = H - TS$  daje drugu Gibbs-Helmholtzovu relaciju  $G = H + T \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p$  odnosno

$$H = G - T \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p.$$

Druge korisne formule mogu se dobiti ako na neke egzaktne diferencijale primijenimo Eulerov kriterij egzaktnosti.

---

<sup>18</sup>Koja ima (lokalni) minimum u ravnotežnom stanju.

**Primjer 456.** Svaka od Maxwellovih formula dobiva se iz egzaktnosti jednog od diferencijalâ  $dU$ ,  $dH$ ,  $dA$  i  $dG$ . Primjerice, kako je

$$dG = -S dT + V dp,$$

budući je  $dG$  egzaktan, mora zadovoljavati Eulerov uvjet egzaktnosti pa je

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

To je jedna od četiriju Maxwellovih formula termodinamike.

Za kraj, dajmo opće lančano pravilo za kompoziciju skalarne funkcije više varijabli s općom vektorskom funkcijom lančano pravilo poprima kompliciraniji oblik:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_Z = \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)_{x_2, x_3, \dots} \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial X}\right)_Z + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)_{x_1, x_3, \dots} \cdot \left(\frac{\partial x_2}{\partial X}\right)_Z + \dots$$

**Primjer 457.** Za slučaj kompozicije skalarne funkcije dviju varijabli  $f = f(x, y)$  s vektorskim poljem dviju varijabli  $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.\end{aligned}$$

**Primjer 458.** Ako  $U$  smatramo funkcijom temperature  $T$  i volumena  $V$ , vrijedi

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

(zašto?). Ako pak  $U$  smatramo funkcijom temperature  $T$  i tlaka  $p$ , bit će

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T dp.$$

Kolika je razlika između relativnih promjena unutrašnje energije obzirom na promjenu temperature (iskazanih parcijalnim derivacijama  $\frac{\partial U}{\partial T}$ ) u ova dva slučaja?

Iskoristimo lančano pravilo:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V,$$

odnosno

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V.$$

# Poglavlje 11

## Nizovi i redovi

### 11.1 Nizovi

Nabrajanja poput

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

ili

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

u svakodnevnom se govoru nazivaju nizovima, bez obzira je li to nabranje konačno (do nekog zadnjeg člana, recimo  $\diamond, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit$ ) ili nastavljeno „u beskonačnost” (što naznačavamo s  $\dots$  nakon prvih nekoliko članova niza). U matematici se pod nizom podrazumijeva beskonačan niz. Glavne karakteristike nizova su:

- Sastoje se od članova, koji su obično (realni ili kompleksni) brojevi.
- Za svaki član moguće je utvrditi ne samo je li u nizu, nego i na kojem mjestu u redoslijedu se nalazi. Pritom su mjesta određena prirodnim (u jeziku: odgovarajućim rednim) brojevima – prvi član, drugi član,  $\dots$ , sedamnaesti član,  $\dots$ .

Precizna definicija, koja sažeto izražava gore navedene karakteristike niza jest:

**Definicija 93** (Niz realnih ili kompleksnih brojeva). *Svaku funkciju kojoj je domena skup  $\mathbb{N}$  (ili  $\mathbb{N}_0$ <sup>1</sup>) zovemo nizom. Ako je kodomena niza  $\mathbb{R}$ , govorimo o nizu realnih brojeva, a ako je kodomena niza  $\mathbb{C}$ , govorimo o nizu kompleksnih brojeva.*

---

<sup>1</sup>Kad gledamo nizove s domenom  $\mathbb{N}_0$ , iako je formalno  $a_0$  nulti član niza, uobičajeno je zvati ga prvim, tj. pozicije brojati od nulte.

Elementi domene niza, tj. skupa  $\mathbb{N}$ , predstavljaju redne brojeve, tj. pozicije u nizu, a njima pridružene vrijednosti su odgovarajući članovi niza. Primjerice,  $a(5)$  je peti član niza. U slučaju nizova uobičajeno je elemente domene (redne brojeve) označavati s  $n$ , a njima pridružene elemente kodomene (članove niza) s  $a_n$  (a ne kao kod drugih funkcija s  $a(n)$ ). Kad govorimo o čitavom nizu umjesto s  $a$  ga označavamo s  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ili kraće s  $(a_n)_n$ , dok je  $a_n$  oznaka za  $n$ -ti član niza (usporedite s razlikom između oznake  $f$  i  $f(x)$  općenito kod funkcija). Budući je domena svakog niza cijeli skup  $\mathbb{N}$ , znači da za svaki prirodni broj  $n$  postoji  $n$ -ti član tog niza pa je niz uvijek beskonačan ako ga doživljavamo kao „nabrajanje”.

Nizove, kao i druge funkcije, najčešće opisujemo formulom koja opisuje kako elementu domene pridružiti odgovarajući element kodomene. Kod nizova takvu formulu obično zovemo **formulom općeg člana niza**.

**Primjer 459.** *Formulom*

$$a_n = \frac{1}{2n+1}$$

zadan je opći član niza recipročnih neparnih prirodnih brojeva  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n+1}, \dots$

**Konstantan niz** je niz koji je kao funkcija konstantan:

$$a_n = c, \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je  $c$  neki fiksni, tj. o  $n$  neovisan, broj.

Nizovi se mogu zadati i **rekurzivno**, pravilom koje kaže kako se iz jednog ili više prethodnih članova dobije sljedeći član:

**Primjer 460.** *Fibonaccijev niz je niz  $(F_n)$  definiran tako da su mu prva dva člana jednaka 1 ( $F_1 = F_2 = 1$ ), a svaki sljedeći je zbroj prethodna dva:*

$$F_3 = F_1 + F_2 = 2,$$

$$F_4 = F_2 + F_3 = 3,$$

$$F_5 = F_3 + F_4 = 5,$$

$$F_6 = F_4 + F_5 = 8,$$

...

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}.$$

Među vrstama nizova posebno se ističu aritmetički i geometrijski nizovi.

**Definicija 94 (Aritmetički niz).** Niz realnih ili kompleksnih brojeva sa svojom da je razlika svaka dva uzastopna člana niza ista zovemo aritmetičkim nizom: niz  $(a_n)_n$  je aritmetički ako postoji konstanta  $d$  (diferencija aritmetičkog niza) takav da za sve  $n \in \mathbb{N}_0$  vrijedi

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

**Primjer 461.** Niz s općim članom  $a_n = 2 + 3n$  (tj. 2, 5, 8, 11, ...) je aritmetički jer je razlika svaka dva uzastopna člana 3:

$$a_{n+1} - a_n = 2 + 3(n+1) - (2 + 3n) = 3.$$

Opći član aritmetičkog niza s diferencijom  $d$  dan je formulom

$$a_n = a_0 + dn, \quad n \geq 0$$

Dakle, aritmetički nizovi su zapravo afine funkcije s domenom  $\mathbb{N}_0$ .

**Definicija 95 (Geometrijski niz).** Niz realnih ili kompleksnih brojeva sa svojom da je kvocijent svaka dva uzastopna člana niza isti zovemo geometrijskim nizom: niz  $(a_n)_n$  je geometrijski ako postoji neki broj  $q$  (kvocijent geometrijskog niza) takav da za sve  $n \in \mathbb{N}_0$  vrijedi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

**Primjer 462.** Niz s općim članom  $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$  (tj. 2,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{9}$ , ...) je geometrijski jer je kvocijent svaka dva uzastopna člana  $\frac{1}{3}$ :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}.$$

Opći član geometrijskog niza s kvocijentom  $q$  dan je formulom

$$a_n = a_0 \cdot q^n,$$

gdje je  $a_0$  prvi član niza. To lako dobijemo iz definicije<sup>2</sup> geometrijskog niza:

$$a_n = a_{n-1}q = a_{n-2}q \cdot q = a_{n-2}q^2 = a_{n-3}q \cdot q^2 = a_{n-3}q^3 = \dots = a_0q^n.$$

Vidimo dakle da su za  $q > 0$  ( $q \neq 1$ ) nizovi zapravo eksponencijalne funkcije restringirane na  $\mathbb{N}_0$ , no ovdje imaju smisla i druge baze (kvocijenti  $q$ ) jer dozvoljavamo i da geometrijski niz bude konstantan ( $q = 0$  i  $q = 1$ ), ali

---

<sup>2</sup>Formalni dokaz išao bi matematičkom indukcijom.

također nema potrebe zabraniti  $q < 0$  jer ćemo  $q$  potencirati samo na prirodne brojeve i 0.

Dakle, geometrijski niz je potpuno zadan prvim članom i kvocijentom. Zbroj prvih  $n$  članova geometrijskog niza dan je formulom

$$S_n = a_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

**Primjer 463.** *Trokut Sierpinskog jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala. On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji” jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji” trokuti. Trokut Sierpinskog je ono što bi od našeg trokuta preostalo ako bi se postupak nastavio unedogled. Kolika je površina ostatka trokuta nakon  $n$  koraka?*

*Ako je polazni trokut površine  $P$ , imamo  $P_0 = P$ . Nadalje,  $P_1 = \frac{3}{4}P$  i općenito u svakom koraku preostaje  $\frac{3}{4}$  površine iz prethodnog koraka:*

$$P_{n+1} = \frac{3}{4}P_n.$$

*Dakle, površine čine geometrijski niz s kvocijentom  $\frac{3}{4}$ , odnosno*

$$P_n = P \left( \frac{3}{4} \right)^n.$$

**Primjer 464.** *Otopina početne množinske koncentracije  $c_0$  uzastopno se  $m$ -terostruko ( $m \in \mathbb{N}$ ) razrjeđuje vodom:*

$$c_0, c_1 = c_0/m, c_2 = c_1/m = c_0/m^2, \dots, c_k, \dots$$

*Dakle, niz koncentracija je geometrijski s kvocijentom  $\frac{1}{m}$ .*

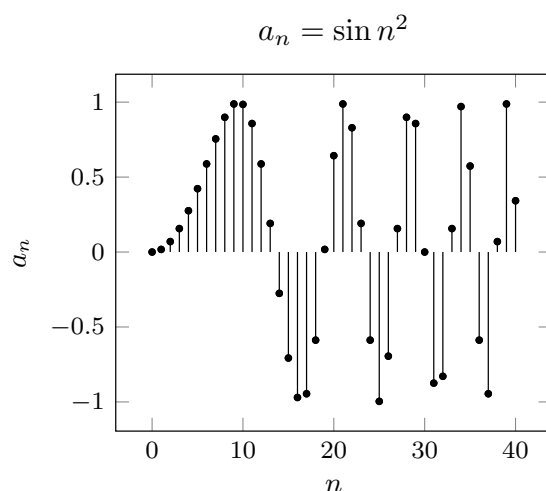
*Koncentracija će pasti na manje od  $c_{\min}$  (najmanje mjerljive koncentracije) kad je*

$$c_k = c_0/m^k < c_{\min}$$

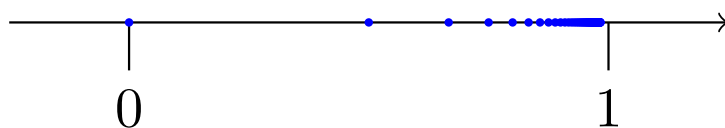
*, dakle  $c_0 < m^k c_{\min}$  odnosno  $m^k > \frac{c_0}{c_{\min}}$ . Logaritmiranjem (uočimo da  $\log_m$  ima smisla jer je  $m$  kao prirodan broj dopustiva baza logaritma, osim za  $m = 1$ ) dobijemo*

$$k > \log_m \frac{c_0}{c_{\min}}.$$

Nizove realnih brojeva možemo prikazati grafički tako da crtamo njihove grafove u (Kartezijevom) koordinatnom sustavu. Kako se graf svake funkcije, pa tako i niza, sastoji od uređenih parova oblika  $(x, f(x))$  gdje  $x$  prolazi



Slika 11.1: Grafički prikaz niza realnih brojeva



Slika 11.2: Niz realnih brojeva na brojevnom pravcu

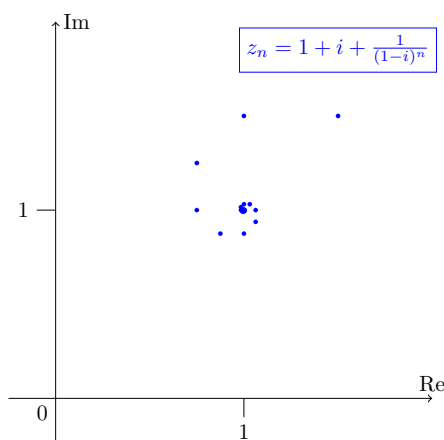
domenom, slijedi da se crtež grafa niza sastoji od diskretnih točaka kojima su apscise prirodni brojevi, a ordinate odgovarajuće vrijednosti članova niza. Radi lakšeg očitavanja obično se kao pomoćne linije ucrtavaju spojnice apscisa s odgovarajućim točkama grafa.

**Primjer 465.** Na slici 11.1 prikazan je graf niza zadanog formulom  $a_n = \sin n^2$ .

Alternativno, niz realnih brojeva ponekad se prikazuje označavanjem točaka na brojevnom pravcu koje predstavljaju članove nize (slika 11.2 prikazuje prvih 60 članova niza definiranog s  $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ). Taj prikaz očigledno nosi manje informacija nego standardni putem grafa, ali može bolje dočarati limes niza (vidi niže).

Graf kompleksnog niza možemo prikazati u trodimenzionalnom prostoru (jedna os za indekse niza, druge dvije kao realna i imaginarna os za članove





Slika 11.3: Grafički prikaz niza kompleksnih brojeva

niza), no takav bi prikaz bio vrlo nepregledan. Stoga se kompleksni nizovi, ukoliko uopće, vizualiziraju kao točke u kompleksnoj ravnini, analogno prethodno opisanom prikazu za realne nizove. Tako dobijemo dijagrame poput onog na slici 11.3.

Nizovi mogu biti ograničeni i neograničeni. Niz realnih brojeva je ograničen ako mu se svi članovi nalaze unutar intervala realnih brojeva kojemu nijedan od rubova nije beskonačan, a niz kompleksnih brojeva je ograničen ako mu se svi članovi nalaze unutar kruga konačnog radijusa. To objedinjavamo kao:

**Definicija 96 (Ograničeni nizovi).** Niz realnih ili kompleksnih brojeva je ograničen ako postoji realan broj  $M$  takav da je

$$|a_n| \leq M$$

za sve  $n$ .

**Primjer 466.** Svaki konstantan niz je ograničen.

**Primjer 467.** Niz zadan s  $a_n = \frac{1}{n}$  je ograničen jer su mu svi članovi između 0 i 1, dakle  $|a_n| \leq 1$  za sve  $n$ .

Niz realnih brojeva može biti ograničen samo odozdo (ako su mu svi članovi veći od nekog konkretnog realnog broja) ili samo odozgo (ako su mu svi članovi manji od nekog konkretnog realnog broja). Ako je niz ograničen i odozgo i odozdo, onda je naravno ograničen.

**Primjer 468.** Niz prirodnih brojeva, tj. niz  $a_n = n$ , je ograničen odozdo jer je  $a_n \geq 1$  za sve  $n \in \mathbb{N}$ , ali nije ograničen odozgo.

U skupu realnih brojeva ima smisla uspoređivati brojeve po veličini pa ima smisla reći da je primjerice niz  $1, 4, 9, 16, \dots (a_n = n^2)$  rastući, a niz  $-1, -2, -3, \dots (a_n = -n)$  padajući. Nizovi su rastući ili padajući ako su rastući ili padajući kao funkcije. S obzirom na domen niza to se svodi na sljedeću definiciju:

**Definicija 97** (Rastući i padajući nizovi realnih brojeva). Niz  $(a_n)_n$  realnih brojeva zovemo rastućim ako je

$$a_n \leq a_{n+1}$$

za sve  $n$ , a padajućim ako je

$$a_n \geq a_{n+1}$$

za sve  $n$ .

U slučaju da su nejednakosti iz gornje definicije zadovoljene strogo ( $<$  odnosno  $>$ ), ponekad se naglašava da je niz strogo rastući odnosno strogo padajući.

**Primjer 469.** Samo konstantan niz je istovremeno rastući i padajući.

**Primjer 470.** Niz iz primjera 465 nije ni rastući ni padajući.

**Napomena 39.** Ako niz  $(a_n)_n$  raste, njegov suprotni niz  $(-a_n)_n$  pada (i obrnuto). Primjerice, niz zadan s  $a_n = \frac{1}{n}$  pada, a niz zadan s  $b_n = -\frac{1}{n}$  raste.

Najvažnije matematičko pitanje o nizovima je ima li neki niz limes ili ne. Budući da su nizovi vrsta funkcija, pojam limesa niza je poseban slučaj limesa funkcije (odjeljak 4.1). Podsjetimo se: oznaka  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  podrazumijeva da se  $x$  može proizvoljno približiti k  $c$  ostajući u domeni funkcije  $f$ . Kako između svaka dva prirodna broja imamo „rupu”, besmisleno je razmatrati pitanja poput „koliki je limes niza kad  $n$  teži k 3?” jer se ostajući u prirodnim brojevima  $n$  ne možemo proizvoljno približiti broju 3. Također, kako su u domeni nizova samo nenegativni brojevi, nema smisla govoriti o limesima nizova kad  $n$  teži u  $-\infty$ . Ukratko, u kontekstu nizova ima smisla govoriti samo o limesima u pozitivnoj beskonačnosti te se često govori jednostavno o limesu niza, a ne o limesu niza kad  $n$  teži u beskonačnost.

Limes ili granična vrijednost (realnog ili kompleksnog) niza  $(a_n)_n$  kad  $n$  teži u beskonačnost je, ako postoji, broj  $L$  takav da što je veći  $n$ , to su članovi niza  $a_n$  bliži  $L$  (i pritom mogu doći proizvoljno blizu  $L$ ). Formalno:

**Definicija 98 (Limes niza).** Broj  $L$  je limes niza  $(a_n)_n$  ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da za  $n \geq n_0$  vrijedi  $|a_n - L| < \varepsilon$ .

Ako je  $L$  limes niza  $(a_n)_n$  pišemo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

ili kraće  $\lim a_n = L$ .

Ako limes niza postoji, kažemo da je niz konvergentan, a inače je divergentan.

Smisao gornje formalne definicije limesa niza je da su počevši od nekog mjesta u nizu svi članovi niza na proizvoljno maloj udaljenosti  $\varepsilon$  od limesa  $L$ .

Najjednostavniji primjeri konvergentnih nizova su konstantni nizovi: niz definiran s  $a_n = c$  uvijek ima limes  $c$ , tj.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$ .

Konvergenција niza tiče se ponašanja njegovih „dalekih članova”: Bitno je da se počevši od neke pozicije članovi niza grupiraju oko nekog broja. Stoga odabir početnih (konačno mnogo) članova niza ne utječe na njegovu konvergenciju.

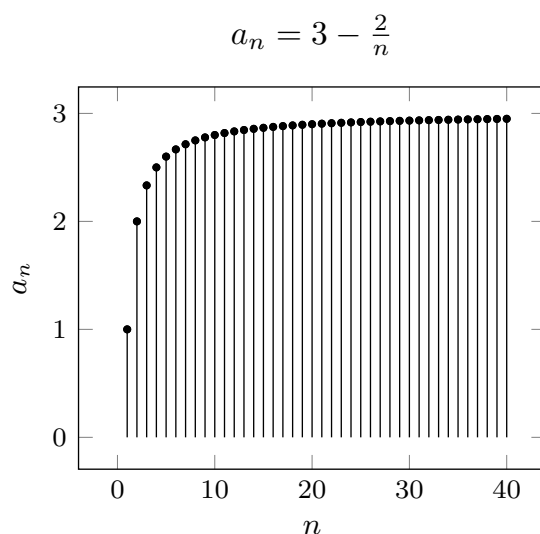
**Primjer 471.** Nizovi  $2, 2, 2, 2, 2, \dots, 2, \dots$  (konstantan niz), zatim niz  $1235, i - 45, i, 2, 2, 2, 2, \dots, 2, \dots$  te niz  $1, 2, 3, \dots, 10^{100}, 2, 2, 2, 2, \dots, 2, \dots$  svi imaju limes  $2$  iako se razlikuju u početnim članovima: u prvom nizu su svi članovi proizvoljno blizu  $2$ , u drugom nizu su svi članovi počevši od četvrtog proizvoljno blizu  $2$ , a u trećem su svi članovi počevši od  $10^{100} + 1$  člana proizvoljno blizu  $2$ .

Vizualno konvergenciju niza možemo predočiti na dva načina. Jedan je uočavanje desne horizontalne asimptote u grafu niza (samo za realne nizove; slika 11.4), a drugi je vidljivo grupiranje članova niza oko jedne točke (za niz  $a_n = 1 - \frac{1}{n}$  limes je  $1$ , vidi sliku 11.2, a za niz  $z_n = 1 + i + \frac{1}{(1-i)^n}$  limes je  $1 + i$ , vidi sliku 11.3).

Neki divergentni nizovi realnih brojeva poprimaju proizvoljno velike ili male vrijednosti pa imaju smisla oznake  $\lim a_n = +\infty$  i  $\lim a_n = -\infty$ .

**Definicija 99 (Beskonačni limesi nizova).** Ako članovi niza postaju proizvoljno veliki, tj. ako za proizvoljno velik broj  $M$  postoji pozicija  $n_0 \in \mathbb{N}$  u nizu takva da su za sve daljnje pozicije  $n > n_0$  članovi niza veći od  $M$  ( $a_n > M$ ), kažemo da niz teži u plus beskonačno i pišemo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$



Slika 11.4: Niz realnih brojeva ima limes ako mu graf ima desnu horizontalnu asimptotu

Slično, ako članovi niza postaju proizvoljno mali tj. ako za proizvoljno malen<sup>3</sup> broj  $m$  postoji pozicija  $n_0 \in \mathbb{N}$  u nizu takva da su za sve daljnje pozicije  $n > n_0$  članovi niza manji od  $m$  ( $a_n < m$ ), kažemo da niz teži u minus beskonačno i pišemo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty.$$

**Primjer 472.** Aritmetički niz s diferencijom  $d \neq 0$  divergira u  $+\infty$  ili u  $-\infty$ , ovisno o predznaku od  $d$ .

Geometrijski nizovi su konvergentni ako im je kvocijent  $q = 1$  ili  $q = 0$  (konstantni nizovi) ili ako im je kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ( $|q| < 1$ ), a inače su divergentni.

Za slučaj realnih geometrijskih nizova  $a_n = a_0 q^n$  vrijedi:

$$\lim a_n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1, \\ a_0, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1, a_0 > 0, \\ -\infty, & q > 1, a_0 < 0, \\ \text{neodređen,} & q \leq -1 \end{cases}.$$

<sup>3</sup>Podsjećamo: proizvoljno malen broj znači „jako negativan” broj.

**Primjer 473.** U primjeru 463 opisali smo trokut Sierpinskog. Budući da u  $n$ -tom koraku njegovog nastajanja je trenutna površina  $P_n = P \left(\frac{3}{4}\right)^n$ , zaključujemo da je površina trokuta Sierpinskog jednaka  $\lim P_n = 0$ .

Među konvergentnim nizovima (osim konvergentnih geometrijskih nizova) vrijedi zapamtiti sljedeće nizove i njihove limese:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

za sve  $k > 0$ .

**Primjer 474.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Broj  $e$  se definira kao limes niza:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Među divergentnim nizovima vrijedi zapamtiti i sljedeće nizove i njihove limese:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$$

i

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = +\infty$$

za sve  $k > 0$ . Za negativne  $k$  je limes  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n$  neodređen.

**Primjer 475.**

$$\lim n^3 = +\infty.$$

**Primjer 476.**  $\lim (-2)^n$  nije određen: Članovi niza su redom  $-2, 4, -8, 16, -32, \dots$ , tj. alterniraju po predznaku pa niti se grupiraju oko nekog broja (naprotiv, sve se više udaljavaju od nule) niti su počevši od nekog mjesta proizvoljno veliki (iza svakog velikog broja dođe jedan negativan) niti su počevši od nekog mjesta proizvoljno mali (iza svakog malog, negativnog broja dođe jedan pozitivan).

Osnovna svojstva limesa nizova su analogna svojstvima limesa realnih funkcija:

**Teorem 59.** *Ako postoje  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  i  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ , onda postoje i limesi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n)$  i  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n)$  te vrijedi:*

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.\end{aligned}$$

Nadalje, ako je  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \neq 0$ , onda postoji i  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$  i jednak je  $\frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n}$ .

**Primjer 477.** Imamo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 + 0 = 0$ .

Korisno je znati i teorem (koji je poznat kao Heineova karakterizacija neprekidnosti):

**Teorem 60.** *Realna funkcija  $f$  je neprekidna u točki  $c$  ako i samo ako za svaki niz  $(a_n)_n$  koji konvergira k  $c$ , niz  $(f(a_n))_n$  konvergira k  $f(c)$ .*

Ukratko, za neprekidne funkcije  $f$  i sve konvergentne nizove  $(a_n)_n$  vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n\right).$$

**Primjer 478.** *Kako je sinus neprekidna funkcija, vrijedi*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{n^2} = \sin \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \sin 0 = 0.$$

Posljedica gornjeg teorema su sljedeća svojstva limesa koja se često koriste kod računanja limesa nizova:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (c + a_n) = c + \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln a_n = \ln \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

(za realne nizove  $(a_n)$  s pozitivnim članovima),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}$$

(za realne nizove  $(a_n)$  se nenegativnim članovima) itd. Sva navedena pravila vrijede za konvergentne realne nizove  $(a_n)$ .

Za limese nizova koji su racionalne funkcije od  $n$  primjenjuju se isti postupci kao za računanje limesa racionalnih funkcija u beskonačnosti (dijeljenje s najvećom potencijom).

**Primjer 479.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 2n^2}{1 - 3n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3} - 3} = 0.$$

Slični postupak (dijeljenje s članom koji najbrže raste) može se primijeniti i na izračunavanje mnogih drugih limesa nizova. Ovdje podsjećamo: Eksponencijalne funkcije s bazom većom od 1 rastu brže od svih polinoma, a kad međusobno uspoređujemo dvije rastuće eksponencijalne funkcije, brže raste eksponencijalna funkcija s većom bazom.

**Primjer 480.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n - e^n}{5n^2 + e^n} = \frac{2\frac{n}{e^n} - 1}{5\frac{n^2}{e^n} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1.$$

S teorijske strane dobro je znati i sljedeći teorem:

**Teorem 61.** *Ako je niz realnih brojeva ograničen i rastući ili ograničen i padajući, onda je konvergentan.*



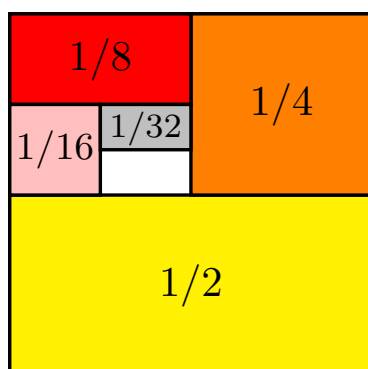
**Ponovimo bitno...** Nizovi realnih odnosno kompleksnih brojeva su realne odnosno kompleksne funkcije kojima je domena skup prirodnih brojeva (evtl. s nulom). Niz  $(a_n)_n$  konvergira k broju  $L$  ako vrijedi: Što je veći  $n$ , to je iznos  $a_n$  bliži  $L$ . Na konvergenciju niza ne utječe bilo koji konačan broj početnih članova. Geometrijski nizovi su nizovi za koje vrijedi da je kvocijent dva uzastopna člana konstantan; oni konvergiraju ako je taj kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ili ako su konstantni. 🦆🦆🦆

## 11.2 Redovi

Pojednostavljeno rečeno, red je beskonačna suma, tj. suma nekog niza:  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

**Primjer 481.** *Na slici 11.5 prvih nekoliko članova geometrijskog niza  $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  predstavljeno je kao površine pravokutnika. Kad bismo nastavili ucrtavati daljnje članove vidimo da će u sredini (u bijelom polju) uvijek biti dovoljno mjesta za ucrtati još po jedan član niza, a ako nastavimo u beskonačnost, čitav kvadrat (površine 1) bit će ispunjen članovima niza. Dakle,*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1.$$



Slika 11.5: Niz i red

Kako sugerira prethodni primjer, pitanje ima li smisla sumi  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  pridružiti određenu vrijednost svodi se na pitanje: Ako zbrojimo što više članova počevši od prvog, približava li se takva suma nekom broju ili ne? Formalno:

**Definicija 100 (Red).** Red je uređen par niza  $(a_n)_n$  i pripadnog niza parcijalnih suma  $(S_n)_n$  definiranog s

$$S_1 = a_1,$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Član  $a_n$  naziva se općim članom reda.

Red je konvergentan ako je njegov niz parcijalnih suma  $(S_n)$  konvergentan.

U tom slučaju  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  zovemo sumom reda i označavamo s  $\sum_n a_n$ :

$$\sum_n a_n = \lim_n S_n.$$

Uočimo: Iako niz  $(S_n)_n$  nije proizvoljan, već određen nizom  $(a_n)_n$  kojeg u redu sumiramo, u definiciji ga ističemo zasebno jer je pitanje sumacije reda pitanje konvergencije niza  $(S_n)_n$ .

**Primjer 482.** U primjeru 481 zbrajali smo članove geometrijskog niza s općim članom  $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ . Znamo da je takvom nizu suma prvih  $n$  članova jednaka  $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$ , odnosno  $S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ , dakle je  $\lim_n S_n = 1$  i stoga pišemo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1.$$



Redovi poput prethodnog nazivaju se geometrijskim. **Geometrijski red** je red dobiven zbrajanjem članova geometrijskog niza, tj. to je red oblika  $\sum_n aq^n = a + aq + aq^2 + \dots$ . Geometrijski red konvergira (i suma mu je  $\frac{a}{1-q}$ ) točno ako je  $|q| < 1$ .

**Primjer 483.** *Decimalni zapis realnog broja  $x$  je njegov zapis kao reda*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{10^n},$$

gdje je  $a_0$  cijeli dio od  $x$ , a ostali  $a_n$ -ovi su redom decimalne znamenke od  $x$ . Svaki konačni decimalni zapis je odabir neke parcijalne sume tog reda.

Primjerice, zapis  $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$  zapravo znači

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} 3 \cdot \frac{1}{10^n}$$

(primijetimo da je decimalni zapis geometrijski red ako i samo ako je  $x$  oblika cijeli broj plus  $\frac{a}{9}$  s  $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ).

Kad  $\frac{1}{3}$  pišemo kao aproksimativno 0,33333 zapravo smo kao aproksimaciju odabrali petu parcijalnu sumu.

Pritom treba misliti na to da se radi samo o aproksimaciji poznatog broja  $\frac{1}{3}$ , koji je različit od broja  $0,33333 = 0,33333000\dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1}{10^n}$  gdje je  $a_n = 3$  za  $n \leq 5$  i  $a_n = 0$  za  $n > 5$ . U tom smislu korektno je (u kemiji i fizici uobičajeno) razlikovanje brojeva 0,35 i 0,3500 jer se u primjenama uvijek radi o aproksimacijama točnih brojeva (nikoje mjerenje ne može dati matematički egzaktnu brojčanu vrijednost) pa se u prvom slučaju radi o broju kod kojeg je iz određenih (praktičnih) razloga kao aproksimacija odabrana druga parcijalna suma, dok se kod drugog broja odabrala četvrta. Pritom u oba slučaja zapravo ne znamo ostatak reda, tj. ti brojevi možda jesu, a možda i nisu jednaki broju  $\frac{7}{20} = 0,35000\dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1}{10^n}$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 5$ ,  $a_n = 0$  za  $n > 2$ .

**Primjer 484.** *Molekulska particijska funkcija se u statističkoj termodinamici definira formulom*

$$z = \sum_j g_j e^{-E_j/(k_B T)},$$

gdje je  $k_B$  Boltzmannova konstanta,  $T$  termodinamička temperatura,  $E_j$  je energija molekule u  $j$ -tom stanju, a  $g_j$  je degeneracijski broj  $j$ -tog stanja

(sumira se po svim mogućim energijskim stanjima jedne molekule). Ako nema degeneriranih stanja, svi su  $g_j = 1$  pa je formula jednostavnija:

$$z = \sum_j \exp\left(-\frac{E_j}{k_B T}\right).$$

Za vibracije dvoatomnih molekula u približenju harmoničkog oscilatora (za promjene geometrije molekule koje ne odstupaju puno od ravnotežne geometrije) poznato je i da vrijedi  $E_j = h\nu(j + \frac{1}{2})$ , gdje je  $j \in \mathbb{N}_0$  vibracijski kvantni broj, a  $\nu$  je vibracijska frekvencija i  $h$  Planckova konstanta.

Uvrstimo li to u formulu za  $z$ , dobijemo

$$z = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j + \frac{1}{2}h\nu}{k_B T}\right) = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right).$$

Ovo je geometrijski red s početnim članom  $\exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right)$  i kvocijentom  $q = \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$ , koji je pozitivan broj manji od 1, dakle se radi o konvergentnom geometrijskom redu sa sumom

$$z = \frac{e^{\frac{h\nu}{2k_B T}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}}.$$

Uz konvergentne geometrijske redove, najpoznatiji konvergentni redovi su redovi

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

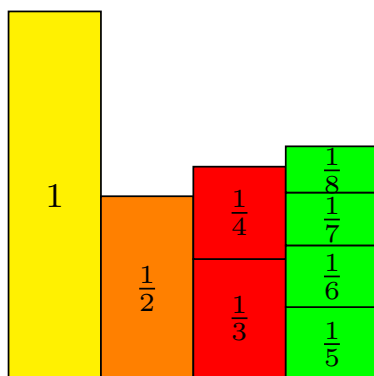
**Napomena 40.** Poznato je da vrijedi  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ , tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(to je u 18. st. pokazao Leonhard Euler).

**Primjer 485.** Redovi s konstantnim članovima ( $\sum_{n=1}^{+\infty} c = c + c + c + \dots$ ) divergiraju osim ako je  $c = 0$  ( $\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$ ).

**Primjer 486.** Red  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$  divergira jer su mu parcijalne sume  $S_n = 0$  za parne  $n$  i  $S_n = 1$  za neparne  $n$  pa je limes niza ( $S_n$ ) (niza  $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ ) neodređen.



Slika 11.6: Ilustracija uz dokaz divergencije harmonijskog reda

Među divergentnim redovima ističe se **harmonijski red**

$$\sum_n \frac{1}{n} = +\infty.$$

Kako se uvjerimo u to da ta suma beskonačna? Prikažimo njegove članove kao površine pravokutnika jednakih širina (slika 11.6), pri čemu ih slažemo u stupce tako da u jedan stupac grupiramo članove od prvog neiskorištenog do prvog sljedećeg koji je oblika  $\frac{1}{2^n}$ . Sad se vidi (i nije teško formalno dokazati) da u svakom stupcu imamo površinu ne manju  $\frac{1}{2}$ , dakle je suma cijelog reda veća od beskonačno mnogo polovina, što je beskonačno.

Uočimo: Svim redovima za koje dosad znamo da konvergiraju opći član teži u nulu ne i nikoji red kojeg smo dosad sreli, a da njegov opći član ne teži u nulu, ne konvergira. S druge strane, harmonijskom redu opći član teži u nulu, ali red ipak divergira. I stvarno, a vjerujemo i očekivano, postoji veza između konvergencije niza  $(a_n)_n$  i odgovarajućeg reda  $\sum_n a_n$  (tj. konvergencije niza  $(S_n)_n$ ):

**Teorem 62 (Nužan uvjet konvergencije reda).** *Ako red  $\sum_n a_n$  konvergira, onda je  $\lim_n a_n = 0$ .*

Kraće i lakše pamtljivo: Red nema „šanse” konvergirati ako mu opći član ne teži u nulu. Ako mu opći član teži u nulu, onda red možda konvergira, a možda i ne.

**Primjer 487.** Red  $\sum_n (1 - \frac{1}{n})$  divergira jer je  $\lim_n (1 - \frac{1}{n}) = 1 \neq 0$ .

**Primjer 488.** Red  $\sum_n \cos n$  divergira jer  $\lim_n \cos n$  ne postoji, pa nije jednak nuli.

Da bi se za konkretni red ispitalo konvergira li, postoje razni **kriteriji konvergencije**. Najvažniji među njima su

- **Kriterij uspoređivanja:** Ako je  $0 \leq a_n \leq b_n$  za sve  $n$  (počevši od nekog mjesta) te ako znamo da  $\sum_n b_n$  konvergira, onda konvergira i  $\sum_n a_n$ . Ako je  $0 \leq a_n \leq b_n$  za sve  $n$  (počevši od nekog mjesta) te ako znamo da  $\sum_n a_n$  divergira, onda divergira i  $\sum_n b_n$ .
- **D'Alembertov kriterij:** Ako  $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ , onda red  $\sum_n a_n$  (apsolutno)<sup>4</sup> konvergira, a ako je  $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ , onda red divergira. U slučaju da je  $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  ovaj kriterij ne daje odluku.
- **Cauchyjev kriterij** Ako  $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ , onda red  $\sum_n a_n$  (apsolutno) konvergira, a ako je  $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ , onda red divergira. U slučaju da je  $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  ovaj kriterij ne daje odluku.
- **Leibnizov kriterij** primjenjuje se za redove kojima članovi alterniraju po predznaku. Red  $\sum_n (-1)^n b_n$  (gdje su svi  $b_n \geq 0$ ) konvergira ako je niz  $(b_n)$  padajući i konvergira u nulu.
- **Integralni kriterij:** Ako su svi  $a_n$  pozitivni i ako je  $a(x)$  definirana tako da u formuli za opći član  $a_n$  znak  $n$  zamijenimo s  $x$ , te ako je tako definirana funkcija  $a$  neprekidna za  $x \geq 1$  i  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 0$ , onda red  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  i integral  $\int_1^{+\infty} a(x) dx$  ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

**Primjer 489.** Znamo da konvergira red  $\sum_n \frac{1}{3^n}$  (geometrijski red s kvocijentom  $1/3$ ). Kako je  $3^n < 3^n + n$  za sve  $n$ , slijedi da je  $\frac{1}{3^n + n} \leq \frac{1}{3^n}$  za sve  $n$ , pa temeljem kriterija uspoređivanja zaključujemo da i red  $\sum_n \frac{1}{3^n + n}$  konvergira.

**Primjer 490.** Red  $\sum_n \frac{1}{n!}$  konvergira po d'Alembertovom kriteriju jer je

$$\lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

**Primjer 491.** Red  $\sum_n \left( \frac{5n-7n^2+n^3}{6n^3+6} \right)^n$  konvergira po Cauchyjevom kriteriju jer je

$$\lim_n \sqrt[n]{\left( \frac{5n-7n^2+n^3}{6n^3+6} \right)^n} = \lim_n \frac{5n-7n^2+n^3}{6n^3+6} = \lim_n \frac{\frac{5}{n^2} - \frac{7}{n} + 1}{6 + \frac{6}{n^3}} = \frac{1}{6} < 1.$$

<sup>4</sup>Red  $\sum_n a_n$  s realnim ili kompleksnim članovima apsolutno konvergira ako konvergira red  $\sum_n |a_n|$ . Svaki apsolutno konvergentan red je konvergentan.

**Primjer 492.** Red  $\sum_n (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  konvergira po Leibnizovom kriteriju jer je  $a_n = \frac{1}{n} > 0$  za sve  $n$ , niz  $(\frac{1}{n})_n$  je padajući i  $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ .

**Primjer 493.** Integralnim kriterijem može se pokazati divergencija harmonijskog reda  $\sum_n \frac{1}{n}$ . Kako je  $a_n = \frac{1}{n}$ , znači da uzimamo  $f(x) = \frac{1}{x}$  i  $f$  ima tražena svojstva (neprekidna za  $x \geq 1$  i ima  $x$ -os kao horizontalnu asimptotu). Kako znamo da  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$  divergira u  $+\infty$ , zaključujemo da je  $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$ .

Općenito se integralnim kriterijem može pokazati da među redovima  $\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}$  konvergiraju točno oni kod kojih je  $s > 1$ .

**Napomena 41.** D'Alembertov i Cauchyjev kriterij konvergencije mogu se primijeniti i na redove s kompleksnim općim članom.



**Ponovimo bitno...** Red je uređen par nekog niza i pripadnog niza parcijalnih suma. Parcijalna suma niza je zbroj njegovih početnih članova do nekog mjesta. Elemente niza kojeg zbrajamo zovemo općim članovima reda. Red konvergira ako odgovarajući niz parcijalnih suma konvergira. Ako opći član reda ne konvergira u nulu, red ne može konvergirati. Geometrijski red konvergira točno ako je kvocijent geometrijskog niza kojeg zbrajamo po apsolutnoj vrijednosti manji od 1. Red oblika  $\sum_n \frac{1}{n^s}$  konvergira točno ako je  $s > 1$ . 

## 11.3 Redovi funkcija

U primjenama se rijetko pojavljuju redovi u kojima niz  $(a_n)_n$  iz kojeg je red nastao ne ovisi o dodatnoj varijabli, označimo ju s  $x$ . Redovi oblika

$$\sum_n a_n(x)$$

nazivaju se **redovima funkcija**. Takvi su primjerice redovi:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

$$1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n!},$$

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx).$$

Svaki red funkcija za svaki  $x$  daje red koji možda konvergira, a možda ne — to ovisi o tome koji konkretan  $x$  uzmemo. Skup svih  $x \in \mathbb{R}$  za koje red  $\sum_n a_n(x)$  konvergira zove se **područjem konvergenције** tog reda.

**Primjer 494.** Područje konvergenције reda  $\sum_n x^n$  je  $\langle -1, 1 \rangle$  jer je to geometrijski red s kvocijentom  $x$ .

**Primjer 495.** Odredimo područje konvergenције reda  $\sum_n \frac{(x-2)^n}{n!}$  koristeći d'Alembertov kriterij:

$$\lim_n \left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x-2)^n}{n!}} \right| = \lim_n \left| \frac{x-2}{n+1} \right| = 0$$

što je manje od 1 za svaki  $x$ , dakle je područje konvergenције  $\mathbb{R}$ .

Za varijable  $x$  iz područja konvergenције (i samo za njih) smisleno je pisati

$$f(x) = \sum_n a_n(x),$$

tj. tom je formulom definirana realna funkcija kojoj je domena točno području konvergenėje reda na desnoj strani formule.

**Primjer 496.**  $S$

$$f(x) = \sum_n x^n$$

je definirana funkcija  $f : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Vrijedi npr.

$$f(0,5) = \sum_n 0,5^n = 2, f(0,25) = \sum_n 0,25^n = 1,333 \dots$$

Za primjene su najvažnije dvije vrste redova funkcija: redovi potencija i trigonometrijski redovi.

### 11.3.1 Redovi potencija

**Definicija 101 (Red potencija).** Za niz  $(b_n)_n$  i  $c \in \mathbb{R}$  red funkcija oblika

$$\sum_n b_n(x-c)^n$$

zove se redom potencija (oko točke  $c$ ).

Primijetimo da je svaka parcijalna suma svakog reda potencija polinom.

Područje konvergencije svakog reda potencija (oko točke  $c$ ) je interval od  $c - R$  do  $c + R$ , gdje je broj  $R$  tzv. **radijus konvergencije reda potencija**, određen bilo kojom od formula

$$R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|b_n|}},$$

$$R = \lim_n \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|.$$

Ako je  $R = \infty$ , red potencija konvergira na čitavom skupu  $\mathbb{R}$ . Inače, interval konvergencije reda potencija, tj. interval od  $c - R$  do  $c + R$ , može biti otvoren, zatvoren ili poluotvoren: u rubovima  $c - R$  i  $c + R$  red potencija može i ne mora konvergirati te stoga u rubovima treba zasebno ispitati konvergenciju. Uočimo da radijus konvergencije reda potencija ne ovisi o  $c$ , nego samo o nizu koeficijenata  $(b_n)_n$ .

**Primjer 497.** Red funkcije

$$\sum_n \frac{(x-3)^n}{n}$$

je red potencija oko  $c = 3$  za koji je

$$b_n = \frac{1}{n}.$$

Izračunajmo radijus konvergencije koristeći prvu od gornjih formula:

$$R = \lim_n \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1.$$

Dakle, naš red sigurno konvergira za  $x$  između  $3 - 1 = 2$  i  $3 + 1 = 4$ . Konvergenciju za  $x = 2$  i  $x = 4$  ispitujemo zasebno.

Uvrstimo  $x = 2$  u red potencija, čime dobivamo red  $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$  koji konvergira po Leibnizovom kriteriju (primjer 492) a za  $x = 4$  dobivamo harmonijski red  $\sum \frac{1}{n}$  koji divergira. Dakle, područje konvergencije promatranog reda potencija je  $[2, 4)$ , odnosno s

$$f(x) = \sum_n \frac{(x-3)^n}{n}$$

je definirana funkcija  $f : [2, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Bitno češće od pitanja za koje  $x$  red potencija postaje realna funkcija jedne varijable je obrnuto pitanje: Za zadanu realnu funkciju  $f$  jedne varijable, kojoj je domena neki otvoren interval  $I$ , može li se ona za  $x \in I$  izjednačiti s nekim redom potencija (zapisati kao red potencija).

**Primjer 498.** Funkcija s pravilom  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  može se zapisati kao

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

no ta jednakost ne vrijedi na čitavoj domeni od  $f$  (to je  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , nego s domenom  $I = \langle -1, 1 \rangle$ .

Dakle, pitanje kojim se želimo sad pozabaviti jest: Ako znamo realnu funkciju  $f$  jedne varijable, može li se naći red potencija koji kao područje konvergencije ima neki interval  $I$  koji je podskup prirodne domene od  $f$  i takav da za  $x$  iz tog područja konvergencije ima sumu jednaku  $f(x)$ ? Pritom je  $c$  fiksirana točka  $I$ .

Naime, ako to možemo učiniti, to znači da se  $f(x)$  može (za  $x$  iz  $I$ ) aproksimirati parcijalnom sumom tog reda potencija, tj. polinomom. Dakle, cilj nam je za zadanu formulu  $f(x)$  i za  $x$  blizu neke točke  $c$  u domeni te funkcije naći polinom  $p_n(x)$  nekog stupnja  $n$  takav da je  $f(x) \approx p_n(x)$  za  $x$  blizu  $c$  i da je pritom među svim polinomima odabranog stupnja  $p_n(x)$  najbolja aproksimacija za  $f(x)$  (graf od  $p$  se u blizini točke  $(c, f(c))$  najbolje priljubljuje uz graf od  $f$ ). Drugim riječima, za zadanu  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  i  $c \in I$  (pri čemu  $c$  nije rubna točka od  $I$ ) tražimo red potencija  $\sum b_n(x-c)^n$  takav da

$$f(x) = \sum_n b_n(x-c)^n$$

vrijedi na što većem intervalu  $I' \subseteq I$  koji sadrži  $c$ . U takvom slučaju reći ćemo da je funkcija  $f$  **razvijena u red potencija oko  $c$** . S obzirom na to da su u takvom redu potencija potencije  $(x-c)^n$  određene odabirom  $c$ , zadatak se svodi na određivanje koeficijenata  $b_n$  tako da se postigne gornja jednakost. Njih ćemo odrediti uzevši u obzir da želimo da parcijalne sume reda  $\sum_n b_n(x-c)^n$  budu polinomi koji oko  $c$  najbolje aproksimiraju  $f$ . Te polinome onda nazivamo **Taylorovim polinomima** funkcije  $f$  oko  $c$ .

Krenimo redom za  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Želimo li da polinom stupnja 0 (konstantna funkcija  $p_0(x) = b_0$ ) što bolje aproksimira  $f$  oko  $c$ , tražimo horizontalni pravac  $y = b_0$  koji je „najsličniji” grafu od  $f$  oko  $c$ . Naravno da to znači da on mora bar prolaziti točkom grafa  $(c, f(c))$ , dakle mora biti

$$b_0 = f(c).$$



Znamo da je polinom stupnja 1 (afina funkcija  $p_1(x) = b_0 + b_1(x - c)$ ) koja najbolje aproksimira  $f$  oko  $c$  točno tangenta na graf od  $f$  u točki  $(c, f(c))$ . Jednadžba tangente u toj točki je

$$y = f'(c) \cdot (x - c) + f(c).$$

Slijedi da uz već poznati  $b_0 = f(c)$  (tangentna i graf prolaze istom točkom) imamo i

$$b_1 = f'(c).$$

Ako bisom tražili polinom stupnja 2 (kvadratnu funkciju  $p_2(x) = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2$ ) razumno je uz podudaranje iznosa  $f(c)$  i  $p_2(c)$  (oba prolaze istom točkom) te  $f'(c)$  i  $p_2'(c)$  (imaju zajedničku tangentu) tražiti i podudaranje zakrivljenosti, tj. druge derivacije. Imamo dakle uvjet

$$f''(c) = p_2''(c) = 2b_2$$

odnosno

$$b_2 = \frac{1}{2}f''(c).$$

Zaključujemo da će opći uvjet za određivanje formula za  $b_k$ -ove biti zahtjev da se u slučaju da  $f$  aproksimiramo  $n$ -tom parcijalnom sumom  $p_n(x) = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + \dots + b_n(x - c)^n$  derivacije od  $f$  i  $p_n$  podudaraju u  $c$ , redom od nulte do  $n$ -te.

**Primjer 499.** *Uzmimo funkciju  $f(x) = e^x$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  i odredimo njezin Taylorov polinom stupnja 3 oko 0, tj. polinom  $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$  stupnja 3 koji najbolje aproksimira  $e^x$  oko  $c = 0$ .*

*Budući da je  $f^{(n)}(x) = e^x$  za sve  $n$ , imamo redom uvjete:*

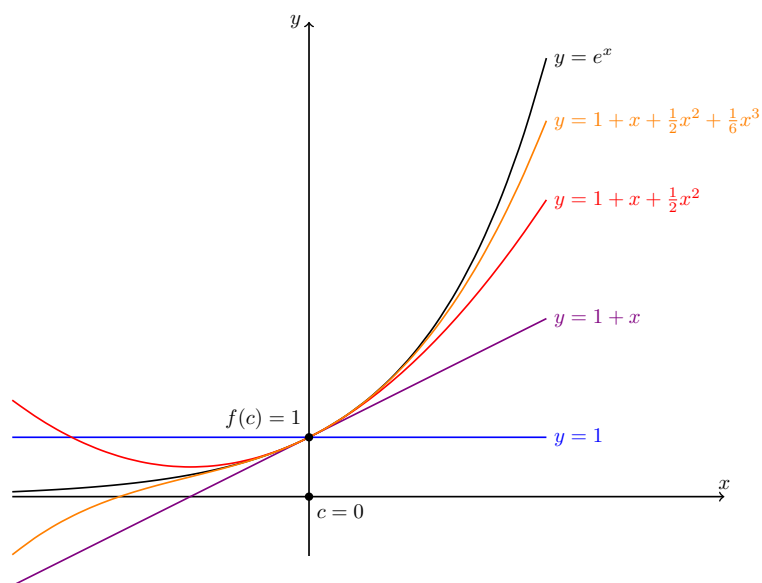
$$e^0 = b_0,$$

$$e^0 = b_1,$$

$$e^0 = 2b_2,$$

$$e^0 = 6b_3.$$

Dakle, traženi polinom je  $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ . Na slici 11.7 vidimo kako izgleda taj polinom kao i polinomi stupnjeva 0, 1 i 2 koji oko  $c = 0$  najbolje aproksimiraju  $f(x) = e^x$ .



Slika 11.7: Taylorovi polinomi stupnjeva 0 do 3 za  $f(x) = e^x$  i  $c = 0$ .

Imamo dakle uvjete:

$$\begin{aligned}
 p_n(c) &= f(c), \\
 p'_n(c) &= f'(c), \\
 p''_n(c) &= f''(c), \\
 p'''_n(c) &= f'''(c), \\
 &\vdots \\
 p_n^{(n)}(c) &= f^{(n)}(c).
 \end{aligned}$$

Derivirajmo  $p_n$   $n$  puta:

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + b_3(x-c)^3 + \dots + b_n(x-c)^n, \\
 p'_n(x) &= b_1 + 2b_2(x-c) + 3b_3(x-c)^2 + \dots + nb_n(x-c)^{n-1}, \\
 p''_n(x) &= 2b_2 + 3 \cdot 2b_3(x-c) + \dots + n \cdot (n-1)b_n(x-c)^{n-2}, \\
 p'''_n(x) &= 3 \cdot 2b_3 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot b_n(x-c)^{n-3}, \\
 &\vdots \\
 p_n^{(n-1)}(x) &= (n-1)!b_{n-1} + n!b_n(x-c), \\
 p_n^{(n)}(x) &= n!.
 \end{aligned}$$

Uvrstimo  $c$  u derivacije od  $p_n$ :

$$\begin{aligned}
 p_n(c) &= b_0, \\
 p'_n(c) &= b_1, \\
 p''_n(c) &= 2b_2, \\
 p'''_n(c) &= 3 \cdot 2b_3, \\
 &\vdots \\
 p_n^{(n-1)}(c) &= (n-1)!b_{n-1}, \\
 p_n^{(n)}(c) &= n!.
 \end{aligned}$$

Naposlijetku ih redom izjednačimo s  $f(c)$ ,  $f'(c)$ ,  $f''(c)$ ,  $f'''(c)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n-1)}(c)$  i  $f^{(n)}(c)$  te vidimo da je opća formula za  $b_n$  sljedeća:

$$b_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}. \quad (11.1)$$

Drugim riječima, ako naš problem određivanja reda potencija čije parcijalne sume oko  $c$  najbolje aproksimiraju  $f$  uopće ima rješenja, onda je to red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

Taj je red definiran samo ako  $f$  u  $c$  posjeduje sve derivacije, a naziva se **Taylorovim redom** funkcije  $f$  oko točke  $c$ , a njegova parcijalna suma stupnja  $n$  naziva se Taylorovim polinomom stupnja  $n$  funkcije  $f$  oko točke  $c$ ; njega ćemo označavati s  $T_n(x)$ . Taylorov polinom stupnja  $n$  naravno ima smisla samo ako funkcija  $f$  u točki  $c$  posjeduje sve derivacije do  $n$ -te. U pravilu,

ali ne uvijek, povećanjem stupnja  $n$  Taylorovog polinoma dobivamo točniju aproksimaciju funkcije  $f$  oko  $c$ . Za slučaj  $c = 0$ , Taylorovi redovi nazivaju se **Maclaurinovim redovima**.

**Primjer 500.** *Kako je za  $f(x) = e^x$  i sve  $n \in \mathbb{N}_0$*

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

*imamo  $f^{(n)}(0) = 1$  za sve  $n \in \mathbb{N}_0$ , dakle je Maclaurinov red za  $e^x$  dan formulom*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

*Radijus konvergencije tog reda je*

$$R = \lim_n \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_n (n+1) = \infty,$$

*dakle Maclaurinov red od  $e^x$  konvergira za sve  $x \in \mathbb{R}$ .*

Dakle, Taylorov red funkcije  $f$  oko točke  $c$  je red potencija s koeficijentima određenim funkcijom  $f$  i točkom  $c$  kao u formuli 11.1. Njegovo područje konvergencije je kao i svakom redu potencija interval  $I$  od  $c - R$  do  $c + R$ , sa ili bez rubova, gdje je  $R$  radijus konvergencije tog reda. Za  $x \in I$  stoga Taylorov red od  $f$  oko  $c$  definira funkciju  $T(x)$  koja se s  $f(x)$  sigurno podudara bar za  $x = c$ . Taylorov red funkcije općenito ne mora biti jednak funkciji  $f$  nigdje osim u  $c$ , tj. nije uvijek moguće staviti jednakost između  $f(x)$  i pripadnog Taylorovog reda  $T(x)$ .<sup>5</sup>

**Primjer 501.** *Promotrimo funkciju definiranu s*

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

*Imamo  $f(0) = 0$ . Nadalje, po definiciji derivacije je*

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(-1/x^2)}{x}.$$

*Supstituirajmo  $y = 1/x^2$  pa je prethodni limes jednak*

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\exp(-y)}{\pm y^{-1/2}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \pm \frac{\sqrt{y}}{\exp(y)} = 0$$

---

<sup>5</sup>Funkcije za koje je  $T(x) = f(x)$  na nekom intervalu oko  $c$  nazivaju se analitičkim funkcijama u  $c$ .

budući da eksponencijalna funkcija raste brže od svake potencije. Dakle,  $f'(0) = 0$ . Analogno bi se korištenjem definicije derivacije pokazalo:  $f^{(n)}(x) = 0$  za sve  $n$ , dakle je Maclaurinov red funkcije  $f$  jednak  $\sum_n \frac{0}{n!} x^n = 0$ , pa se on s  $f$  podudara samo u 0.

Ipak, za većinu funkcija koje su beskonačno puta derivabilne u  $c$  moći ćemo staviti jednakost između  $T(x)$  i  $f(x)$ :

**Teorem 63 (Taylor).** *Funkcija je jednaka svom Taylorovom redu (na nekom intervalu  $I$  oko  $c$ ) ako s porastom  $n$  greške  $R_n(x) = T(x) - T_n(x)$  aproksimacije  $f(x)$  s  $T_n(x)$  teže u 0 za sve  $x \in I$ .*

Naposlijetku i za nas najvažnije: Opisani postupak daje rješenje problema najbolje aproksimacije funkcije  $f$  oko  $c$  polinomom ako taj problem uopće ima rješenje. Formalno se to iskazuje kao teorem:

**Teorem 64.** *Ako je na nekom intervalu oko  $c$  funkcija jednaka nekom redu potencija, onda je to njezin Taylorov red oko  $c$ .*

**Primjer 502.** *Odredimo Taylorov red oko  $c = 2$  za polinom  $f(x) = x^3 - 2x + 5$ . Imamo:  $f'(x) = 3x^2 - 2$ ,  $f''(x) = 6x$ ,  $f'''(x) = 6$  i dalje su sve derivacije od  $f$  nul-funkcije. Stoga je  $f(2) = 9$ ,  $f'(2) = 10$ ,  $f''(2) = 12$ ,  $f'''(2) = 6$ ,  $f^{(n)}(2) = 0$  za  $n > 3$  pa je Taylorov red od  $f$  oko 2 jednak  $T(x) = 9 + 10(x-2) + \frac{12}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 = 9 + 10(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3$ . Lako se vidi da je on za sve  $x$  jednak  $f(x)$ , tj.  $T(x)$  je razvoj od  $f(x)$  oko 2 i konvergira na  $\mathbb{R}$ .*

Kao i u prethodnom primjeru vrijedi i općenito: Taylorovi redovi polinoma su oni sami, raspisani po potencijama od  $(x - c)$ .

Od svih Taylorovih redova najčešće se koriste Maclaurinovi redovi. Najvažniji Maclaurinovi redovi su sljedeći (područja konvergencije navedena su uz svaki):

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle;$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle;$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Uz ove česti su i binomni redovi koji poopćavaju redove za  $\frac{1}{1 \pm x}$ . Binomni red je red

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

i on konvergira za  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ . Eksponent  $\alpha$  može biti bilo koji realan broj, a  $\binom{\alpha}{n}$  je definiran kao

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Primjerice,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3 + \dots$$

Osim direktno korištenjem formule 11.1, razvoji u redove potencija često se mogu dobiti iz gornjih razvoja algebarskim manipulacijama te deriviranjem i integriranjem (konvergentni redovi potencija mogu se derivirati i integrirati poput polinoma).

**Primjer 503.** Odredimo Maclaurinov red za  $2^x$ . Znamo da je  $2^x = \exp(x \ln 2)$ , te koristeći Maclaurinov red za  $e^x$  (zamjenom  $x$  s  $x \ln 2$ ) imamo

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n.$$

Budući da Maclaurinov red za  $e^x$  konvergira k  $e^x$  za sve realne  $x$ , gornji razvoj u red također vrijedi za sve realne  $x$ .

**Primjer 504.** Odredimo Maclaurinov red za  $\operatorname{ch} x$ . Po definiciji je

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Iskoristimo ponovno Maclaurinov red za  $e^x$ :

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{2n!}.$$

Kad god je  $n$  neparan imamo  $(-x)^n = -x^n$  pa je  $x^n + (-x)^n = 0$ , odnosno u gornjem razvoju preostaju samo parni članovi. Kad je  $n$  paran imamo  $x^n + (-x)^n = 2x^n$ , dakle je

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n \text{ paran}} \frac{2x^n}{2n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Ponovno smo dobili razvoj koji konvergira i jednak je ciljanoj funkciji za sve  $x$ .

Uočimo da kao i za razvoj funkcije kosinus, razvoj funkcije kosinus hiperbolni u Maclaurinov red sadrži samo parne potencije. To vrijedi i općenitije: Maclaurinovi redovi parnih funkcija sadrže samo parne članove (točnije rečeno, svi neparni koeficijenti su im 0), a Maclaurinovi redovi neparnih funkcija sadrže samo neparne članove (točnije rečeno, svi parni koeficijenti su im 0).

**Primjer 505.** Odredimo Maclaurinov red za  $\operatorname{arctg} x$ . U ovom slučaju ne možemo postupiti kao u prethodna dva primjera. No,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

a posljednji izraz možemo razviti u red supstituirajući  $x^2$  na mjesto  $x$  u razvoju za  $\frac{1}{1+x}$ :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Taj red konvergira za  $|x^2| < 1$ , dakle za  $|x| < 1$ . Budući da je to razvoj derivacije, integriranjem (od 0 do  $x$ ) ćemo dobiti razvoj za arkus-tangens:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1} - 0^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \end{aligned}$$

i taj je razvoj korektan za  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ .

Uočimo da iz ovoga i bez deriviranja vidimo: Parne po redoslijedu derivacije arkus-tangensa u 0 su 0, a neparna po redoslijedu  $n$ -ta derivacija arkus-tangensa u 0 je  $(-1)^n/(2n+1)$ .

**Primjer 506.** *Odredimo Maclaurinov red za  $(1-x)^{-2}$ . U ovom slučaju zgodnije je polaznu funkciju prvo integrirati pa razvoj u red dobiti deriviranjem. Imamo*

$$\int_0^x \frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{1}{1-t} \Big|_0^x = \frac{1}{1-x} - 1 =$$

$$= -1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = -1 + (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n,$$

za  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ . Deriviramo posljednji izraz pa slijedi

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

za  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ .

Redovi potencija se nerijetko mogu iskoristiti i za izračunavanje suma konvergentnih redova.

**Primjer 507.** *Vrijedi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\pi)^n}{(2n)!} = -1$$

jer je red na lijevoj strani jednakosti Maclaurinov red funkcije kosinus u koji je uvršten  $\pi$ , te rezultat mora biti  $\cos \pi = -1$ .

Već smo rekli da je glavna primjena redova potencija u praksi aproksimiranje funkcija. Ako je dana funkcija  $f$  na nekom intervalu oko  $c$  jednaka odgovarajućem Taylorovom redu, onda ju možemo aproksimirati njegovom parcijalnom sumom (Taylorovim polinomom). Pritom je greška aproksimacije  $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$  obično nepoznata, ali se može procijeniti pomoću formule

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - c|^{n+1}$$

gdje je  $M$  gornja međa za apsolutnu vrijednost od  $f^{(n+1)}(t)$  za  $t$ -ove između  $x$  i  $c$  (tj.  $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$  za sve  $t$  između  $x$  i  $c$ ).

**Primjer 508.** *Uzmimo  $f(x) = \sin x$  i recimo da ga aproksimiramo Taylorovim polinomom stupnja 3 oko  $c = 0$ , tj. gledamo aproksimaciju*

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$



za  $x \approx 0$ . Kolika je greška te aproksimacije za  $x = 0,1$ ? Izračunajmo 4. derivaciju od sinusa:  $(\sin x)^{(4)} = \sin x$ . Stoga gornja formula povlači da je

$$|R_3(0,1)| \leq \frac{M}{4!} |0,1 - 0|^4 = \frac{10^{-4}}{24} M,$$

gdje je  $M$  gornja međa za  $|(\sin x)^{(4)}| = |\sin x|$  za  $x \in \langle 0; 0,1 \rangle$ . Ta bi se gornja međa mogla i precizno odrediti, no ugrubo je možemo procijeniti s 1 jer apsolutna vrijednost sinusa ne premašuje 1. Stoga je

$$|R_3(0,1)| \leq \frac{10^{-4}}{24} \approx 4,16667 \cdot 10^{-6},$$

odnosno  $\sin 0,1$  aproksimiramo s  $0,1 - \frac{0,1^3}{3!} = 0,009833333 \dots$ , greška je najranije na šestoj decimali (u stvarnosti je na sedmoj).

Češće i korisnije je razmišljati obrnuto: Na koliko velikom intervalu oko  $c$  aproksimacija  $f(x)$  s  $T_n(x)$  neće imati grešku veću od neke zadane maksimalne greške  $\varepsilon$ .

**Primjer 509.** Ako  $\sin x$  želimo u okolini nule aproksimirati s  $T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$  tako da greška bude najviše  $\varepsilon = 10^{-3}$ , na kojem intervalu to možemo postići?

Tražimo  $d$  tako da za  $|x| < d$  budemo sigurni da je  $|R_3(x)| \leq 10^{-3}$ :

$$|R_3(x)| = \left| \frac{\sin t}{4!} x^4 \right| \leq \frac{|x|^4}{24} \leq \frac{d^4}{24} \leq 0,001 \Rightarrow d \leq 0,28845.$$

Dakle, za  $x \in \langle -0,28845, 0,28845 \rangle$  greška aproksimacije  $\sin x$  s  $T_3(x)$  je manja od  $10^{-3}$ .

Taylorovi redovi i polinomi pojavljuju se u raznim primjenama. Slijedi nekoliko primjera.

**Primjer 510.** Virijalna jednačba stanja za realni plin ima oblik

$$pV_m = RT \left( 1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots \right),$$

tj.

$$p = p(V_m) = \frac{RT}{V_m} + \frac{RTB}{V_m^2} + \frac{RTC}{V_m^3} + \dots$$

Koeficijenti  $B$  i  $C$ , no uglavnom ne i daljnji koeficijenti, mogu se odrediti za konkretne plinove pri određenim temperaturama, npr.  $B$  je za  $\text{CO}_2$  pri  $273\text{K}$  jednak  $-149,7 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ .

**Primjer 511.** U teoriji relativnosti pojavljuje se formula relativističke mase, tj. ovisnosti mase o brzini:

$$m = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

( $m_0$  je masa mirovanja). Pretpostavimo li da je  $v$  puno manji od  $c$ , aproksimirajmo formulu s Taylorovim polinomom stupnja dva.

Prvo napišemo:

$$m(v) = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

i stavimo  $x = (v/c)^2$  (sad je  $x \approx 0$  zbog pretpostavke da je  $v$  puno manji od  $c$ ) pa imamo

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{m_0}{\sqrt{1-x}}, & m(0) &= m_0, \\ m'(x) &= -\frac{m_0}{2}(1-x)^{-3/2}, & m'(0) &= -\frac{m_0}{2}, \\ m''(x) &= \frac{3m_0}{4}(1-x)^{-5/2}, & m''(0) &= \frac{3m_0}{4} \end{aligned}$$

pa je

$$m(x) \approx m_0 - \frac{m_0}{2}x + \frac{3m_0}{8}x^2$$

odnosno

$$m \approx m_0 - \frac{m_0}{2} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3m_0}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4.$$

Greška za slučaj  $v \leq 0,1c$  ( $x \leq 0,01$ ) je najviše ( $m'''(x) = \frac{15m_0}{8}(1-x)^{-7/2}$ )

$$\left| \frac{15m_0}{3! \cdot 8} \cdot (1 - 0,01)^{-7/2} \cdot 0,01^3 \right| = 3,237 \cdot 10^{-7} m_0.$$

**Primjer 512.** Planckov zakon za zračenje crnog tijela glasi

$$\rho = \frac{8\pi h c}{\lambda^5 \left( e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1 \right)}.$$

Tu je  $\rho$  spektralna gustoća energije zračenja u ovisnosti o valnoj duljini  $\lambda$ ,  $h$  je Planckova konstanta,  $k$  Boltzmannova konstanta,  $c$  je brzina svjetlosti, a  $T$  temperatura (u kelvinima).

Prije Plancka Rayleigh i Jeans predložili su jednostavniju formulu

$$\rho = \frac{8\pi k T}{\lambda^4},$$

no kako bi iz te formule sljedilo da  $\rho$  jako raste kako se valne duljine približavaju nuli, i to pri svim temperaturama, sljedilo bi da sva tijela emitiraju kratkovalnu i ultraljubičasto zračenje (tu posljedicu Rayleigh-Jeansova zakona nazivamo ultraljubičastom katastrofom). S druge strane, za velike valne duljine Rayleigh-Jeansov zakon pokazuje dobro slaganje s eksperimentalnim rezultatima.

Ako je valna duljina  $\lambda$  jako velika, onda je  $x = \frac{hc}{\lambda kT}$  blizu 0. Stoga je aproksimacija  $e^{\frac{hc}{\lambda kT}}$  s prva dva člana Maclaurinova razvoja  $1 + \frac{hc}{\lambda kT}$  dobra (to bolja, tj. ima to manju grešku, što je  $x$  bliži nuli, tj. što je  $\lambda$  veća). Sljedi da je za velike valne duljine nazivnik u Planckovom zakonu  $\lambda^5 \left( e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right) \approx \lambda^5 \frac{hc}{\lambda kT}$  te Planckov zakon za velike  $\lambda$  poprima oblik

$$\rho(\lambda) \approx \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \frac{hc}{\lambda kT}} = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

što je točno Rayleigh-Jeansova formula. Dakle, s porastom valne duljine Planckov se zakon svodi na Rayleigh-Jeansov.

Naposlijetku, Taylorovi se razvoji mogu iskoristiti i za približno izračunavanje integrala.

**Primjer 513.** Znajući da je vjerojatnost da se molekula plina kreće nekom brzinom opisana Maxwell-Boltzmannovom funkcijom gustoće vjerojatnosti

$$f_{\text{MB}}(v) = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left( -\frac{Mv^2}{2RT} \right),$$

gdje je  $M$  molarna masa,  $R$  opća plinska konstanta,  $T$  temperatura u kelvinima i  $v$  brzina molekule, koristeći Taylorov red na dvije značajne znamenke (cijeli postotak) procijeniti ćemo vjerojatnost da se molekula dušika pri  $25^{\circ}\text{C}$  kreće brzinom ne većom od  $500 \text{ m/s}$ .

Molarna masa molekule dušika je  $M = 28,02 \text{ g/mol}$ ; znamo i  $R = 8,3145 \text{ J/(K mol)}$  i  $T = 298,15 \text{ K}$ . Dakle je za zadanu situaciju (ne pišemo jedinice jer je vidljivo da se sve krate)

$$f_{\text{MB}}(v) = 3,032 \cdot 10^{-8} v^2 \exp(-5,652 \cdot 10^{-6} v^2).$$

Znamo da se vjerojatnost da slučajna varijabla opisana funkcijom gustoće  $f$  nađe u intervali  $I$  računa kao integral od  $f$  po  $I$ , dakle zadatak je procijeniti

$$P = \int_0^{500} f_{\text{MB}}(v) dv.$$

*Razvoj u Maclaurinov red za  $e^x$  povlači*

$$f_{\text{MB}}(v) = 3,032 \cdot 10^{-8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5,652 \cdot 10^{-6})^n}{n!} v^{2n+2}$$

*dakle integriranje član po član daje*

$$P = 3,032 \cdot 10^{-8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5,652 \cdot 10^{-6})^n}{n!(2n+3)} v^{2n+3}.$$

*Računamo redom parcijalne sume za gornji red sve dok nam se ne ponove dvije značajne znamenke: Za  $n = 0$  imamo  $P_0 = 1,011 \cdot 10^{-8} 500^3 = 1,26375$ , za  $n = 1$  je  $P_1 = P_0 - 3,427 \cdot 10^{-14} 500^5 = 0,19281$ , za  $n = 2$  je  $P_2 = P_1 + 6,918 \cdot 10^{-20} 500^7 = 0,73328$ , za  $n = 3$  je  $P_3 = P_2 - 1,014 \cdot 10^{-25} 500^9 = 0,53523$ , za  $n = 4$  je  $P_4 = P_3 + \dots 500^{11} = 0,59246$ , za  $n = 5$  je  $P_5 = P_4 - \dots 500^{13} = 0,57878$  za  $n = 6$  je  $P_6 = P_5 + \dots 500^{15} = 0,58157$ , za  $n = 7$  je  $P_7 = P_6 - \dots 500^{17} = 0,58108$ . S obzirom na to da su se u zadnja dva koraka prve dvije, štoviše tri znamenke poklopile, zaključujemo da je tražena vjerojatnost 58,1 % (egzaktna vrijednost je  $P = 58,0683 \dots \%$ ).*

### 11.3.2 Trigonometrijski redovi

U ovom ćemo se odjeljku posvetiti (skoro isključivo) periodičnim funkcijama kojima je domena cijeli skup  $\mathbb{R}$ . Kao što znamo (odjeljak 2.6.5), dvije osnovne trigonometrijske i najpoznatije periodične funkcije s prirodnom domenom  $\mathbb{R}$  su sinus i kosinus. Njihovi grafovi izgledaju podjednako do na horizontalni pomak, funkcija sinus je neparna, a funkcija kosinus parna. Transformacije grafova (odjeljak 2.3) povlače da graf funkcije zadane s

$$c(x) = A \cos(Bx) + C$$

izgleda poput grafa funkcije kosinus (ako je  $A < 0$ , kao graf funkcije kosinus zrcaljen preko horizontalne osi), ali s amplitudom  $|A|$  umjesto amplitude 1, s temeljnim periodom  $\frac{2\pi}{B}$  umjesto temeljnog perioda  $2\pi$  i pomaknut vertikalno prema gore za  $C$  (prema dolje za  $-C$  ako je  $C < 0$ ), tako da je umjesto 0 prosječna vrijednost na  $[0, 2\pi/B]$  od  $c$  jednaka  $C$ . Pritom je takva funkcija  $c$  i dalje parna. Analogno, graf funkcije zadane sa

$$s(x) = A \sin(Bx) + C$$

izgleda poput grafa funkcije sinus (ako je  $A < 0$ , kao graf funkcije kosinus zrcaljen preko horizontalne osi), ali s amplitudom  $|A|$  umjesto amplitude 1, s

temeljnim periodom  $\frac{2\pi}{B}$  umjesto temeljnog perioda  $2\pi$  i pomaknut vertikalno prema gore za  $C$  (prema dolje za  $-C$  ako je  $C < 0$ ), tako da je umjesto 0 prosječna vrijednost na  $[0, 2\pi/B]$  od  $c$  jednaka  $C$ . Pritom je takva funkcija  $s$  i dalje parna. Podsjećamo i da ako je  $T$  temeljni period periodične funkcije, onda su i svi  $nT$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) također periodi te funkcije. Primijetimo da možemo stvar gledati i obrnuto: Tražimo li parnu ili neparnu periodičnu funkciju koja ima period  $T$ , prototip takve bit će funkcija tipa  $c$  odnosno  $s$ , gdje je  $B$  uzet tako da je jednak  $\frac{2\pi}{T}$ .

Neka je dakle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodična funkcija i neka je  $T$  njezin period. Označimo

$$L = \frac{T}{2}.$$

Tada je funkcija  $f$  u potpunosti određena svojim vrijednostima na segmentu  $[-L, L]$  (širine  $T$ ), a ostale vrijednosti se mogu rekonstruirati po periodičnosti:  $f(x) = f(x - (n+1)T)$  gdje je  $n$  najveći cijeli broj takav da je  $nT \leq x$ . Primjerice,  $\sin(29) = \sin(29 - 5 \cdot 2\pi) = \sin(-2,4150\dots)$ . Vrijedi i obrnuto: Svaka funkcija  $f$  zadana na  $[-L, L]$  prirodno se proširuje do periodične funkcije na  $\mathbb{R}$  perioda  $T = 2L$ . Stoga ćemo u ovom odjeljku periodične funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  poistovjećivati s njihovim restrikcijama na  $[-L, L]$ , odnosno gledati ih kao  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Najjednostavnije funkcije koje imaju period  $T = 2L$  su funkcije oblika

$$c_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

i

$$s_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(za  $n \in \mathbb{N}_0$ ).<sup>6</sup>

**Primjer 514.** Ako je  $L = \pi$ , tj. ako promatramo funkcije perioda  $2\pi$ , onda je

$$c_m(x) = \cos(mx), \quad s_n(x) = \sin(nx).$$

Uočimo da im za  $m, n > 1$  broj  $2\pi$  nije temeljni period ovih funkcija.

Radi jednostavnijeg zapisa, a i zbog fizikalne interpretacije označit ćemo

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

i broj  $\omega_n$  zvati kutnom frekvencijom funkcija  $c_n(x) = \cos(\omega_n x)$  i  $s_n(x) = \sin(\omega_n x)$ . Primijetimo i da je fizikalna dimenzija od  $\omega_n$  recipročna fizikalnoj

---

<sup>6</sup>Primijetimo da je za  $n = 0$  funkcija  $s_n$  nulfunkcija, pa stoga za funkcije  $s_n$  uzimamo samo  $n \in \mathbb{N}$ .

dimenziji od  $L$ , koja je pak jednaka fizikalnoj dimenziji varijable  $x$  funkcije  $f$  koju razvijamo u Fourierov red.

Cilj ovog odjeljka je opisati kako proizvoljnu periodičnu funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (tj.  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ ) perioda  $T = 2L$  aproksimirati linearnom kombinacijom funkcija  $c_n$  i  $s_n$ . Pretpostavljamo da  $f$  ima najviše konačno mnogo prekida unutar  $[-L, L]$ . Budući da je za dvije realne funkcije  $f$  i  $g$  zadane na  $[-L, L]$  koje imaju najviše konačno mnogo prekida njihov zbroj kao i skalarni višekratnik također realna funkcija s domenom  $[-L, L]$  (s najviše konačno mnogo prekida), slijedi da je skup  $\mathcal{P}$  svih realnih funkcija (koje imaju najviše konačno mnogo prekida) s domenom  $[-L, L]$  vektorski prostor. Štoviše, budući da su realne funkcije zadane na  $[-L, L]$  koje imaju najviše konačno mnogo prekida integrabilne,  $\mathcal{P}$  je unitaran prostor uz uobičajeni skalarni produkt definiran s

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x)g(x) dx, \quad f, g \in \mathcal{P}.$$

Uočimo da kad god je umnožak funkcija  $f$  i  $g$  neparna funkcija (npr. kad je jedna od njih parna, a druga neparna), onda su funkcije  $f$  i  $g$  ortogonalne (skalarni produkt im je 0).

U unitarnom prostoru  $\mathcal{P}$ , svaka funkcija tipa  $c_m$  ortogonalna je na svaku funkciju tipa  $s_n$ :

$$\langle c_m, s_n \rangle = \int_{-L}^L \cos(\omega_m x) \sin(\omega_n x) dx = 0$$

jer se radi o integralu neparne funkcije (umnožak parne i neparne funkcije je neparna funkcija) po simetričnom području integracije. Također, za različite indekse  $m$  i  $n$  svake dvije funkcije istog tipa ( $c_m$  i  $c_n$ , odnosno  $s_m$  i  $s_n$ ) su međusobno ortogonalne:

$$\begin{aligned} \langle c_m, c_n \rangle &= \int_{-L}^L \cos(\omega_m x) \cos(\omega_n x) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L (\cos((\omega_m + \omega_n)x) + \cos((\omega_m - \omega_n)x)) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin((\omega_m + \omega_n)x)}{\omega_m + \omega_n} + \frac{\sin((\omega_m - \omega_n)x)}{\omega_m - \omega_n} \right) \Big|_{-L}^L = 0 \end{aligned}$$

jer zbog  $m \neq n$  je  $\omega_m \neq \omega_n$ . Analogno se vidi da je za  $m \neq n$

$$\langle s_m, s_n \rangle = 0.$$

Dakle, u skupu svih funkcija tipa  $c_n$  i  $s_n$  svake dvije različite su međusobno ortogonalne (iz tog se može dokazati da se radi o linearno nezavisnom skupu).

S druge strane, ako množimo jednu od tih funkcija skalarno samu sa sobom dobivamo  $L$ :

$$\langle c_n, c_n \rangle = \langle s_n, s_n \rangle = L$$

za  $n \neq 0$ . Za slučaj  $m = n = 0$  imamo

$$\langle c_0, c_0 \rangle = 2L$$

( $s_0$  ne gledamo jer je nulfunkcija, no  $c_0(x) = \cos(\omega_0 x) = 1$  je konstantna nenul funkcija).

Već smo rekli, ali ponavljamo: U ovom nam je odjeljku cilj zadanu periodičku funkciju  $f$  aproksimirati linearnom kombinacijom sinusa i kosinusa s istim periodom, tj. linearnom kombinacijom funkcija  $f_m$  i  $g_n$ . Kao i kod redova potencija kod kojih je cilj aproksimacija zadane funkcije konačnom sumom (polinomom), ali ne unaprijed određene duljine (stupnja), tako i ovdje: budući da želimo dozvoliti načelno proizvoljno linearne kombinacije kao aproksimacije, promatramo odgovarajuće redove.

**Definicija 102 (Trigonometrijski red).** *Trigonometrijski red (perioda  $T = 2L$ ) je red funkcija oblika  $\sum_{n=0}^{+\infty} (A_n c_n(x) + B_n s_n(x))$ .*

Nulti član ( $n = 0$ ) je konstantna funkcija  $A_0$  (jer je  $s_0$  nulfunkcija) pa je uobičajenija notacija trigonometrijskog reda sljedeća:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n c_n(x) + B_n s_n(x)). \quad (11.2)$$

Sad, slično kao i kod redova potencija, imamo: Ako područje konvergencije trigonometrijskog reda sadrži segment  $[-L, L]$ , onda je sa

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n c_n(x) + B_n s_n(x)) \quad (11.3)$$

definirana funkcija na  $[-L, L]$ , tj. periodična funkcija perioda  $2L$ . Kao što smo se kod redova potencija pitali za koje koeficijente ćemo dobiti najbolju aproksimaciju parcijalnom sumom i iz tog uvjeta dobili Taylorov red, tako ovdje postavljamo pitanje: Za koje koeficijente u redu 11.2 taj red konvergira na  $[-L, L]$  i pritom je njegova suma u svakoj točki  $x$  tog intervala jednaka  $f(x)$ ?

Sljedeći izvod formula za koeficijente  $A_n$  i  $B_n$  nije matematički potpuno precizan, ali osnovna ideja izvoda je ova: Pomnožimo pretpostavljenu jednakost 11.3 skalarno s  $c_m$ . Dobijemo

$$\langle f, c_m \rangle = \frac{A_0}{2} \langle c_0, c_m \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \langle c_n, c_m \rangle + B_n \langle s_n, s_m \rangle).$$

No, znamo da su svi gornji skalarni produkti jednaki 0, osim  $\langle c_n, c_m \rangle$  za  $m = n$ . Stoga od gornje sume preostaje samo  $\frac{A_0}{2} \cdot 2L$  (ako  $m = 0$ ) ili  $A_m \cdot L$  (ako  $m \neq 0$ ). Drugim riječima, za svaki  $m \in \mathbb{N}_0$  je  $\langle f, c_m \rangle = A_m \cdot L$ . Analogno se vidi da je za svaki  $n \in \mathbb{N}$   $\langle f, s_n \rangle = B_n \cdot L$ . Dakle, ako je uopće moguće  $f$  zapisati u obliku 11.3, onda za koeficijente reda vrijede formule

$$A_n = \frac{1}{L} \langle f, c_n \rangle, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (11.4)$$

$$B_n = \frac{1}{L} \langle f, s_n \rangle, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (11.5)$$

Ti se koeficijenti (koeficijenti  $A_n$  i  $B_n$  izračunati formulama 11.4 i 11.5) nazivaju se **Fourierovim koeficijentima** funkcije  $f$ , a **Fourierov red** funkcije  $f$  je trigonometrijski red 11.3 kojem su koeficijenti upravo Fourierovi koeficijenti. Budući da je skalarni produkt parne i neparne funkcije u našem slučaju (jer je definiran kao integral po simetričnom intervalu) jednak 0, vidimo: Ako je  $f$  parna funkcija, onda su svi  $B_n$  jednaki 0, tj. u Fourierovom redu pojavljuju se samo kosinusi, a ako je  $f$  neparna funkcija, onda su svi  $A_n$  jednaki 0, tj. u Fourierovom redu pojavljuju se samo sinusi.

Kao i kod Taylorovih redova, postavlja se pitanje kada možemo periodičku funkciju  $f$  izjednačiti s odgovarajućim Fourierovim redom (tj. zapisati ju formulom 11.3). Odgovor je – gotovo uvijek! Preciznije, vrijedi:

**Teorem 65 (Dirichlet).** *Neka je  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija koja ima najviše konačno mnogo prekida koji su svi skokovi (vidi str. 165) i za koju se  $[-L, L]$  može podijeliti na konačno mnogo podintervala tako da je  $f$  na svakom od njih neprekidna i monotona (rastuća ili padajuća). Tada za sve  $x$  osim eventualno točaka prekida vrijedi formula 11.3 s koeficijentima određenim formulama 11.4 i 11.5.*

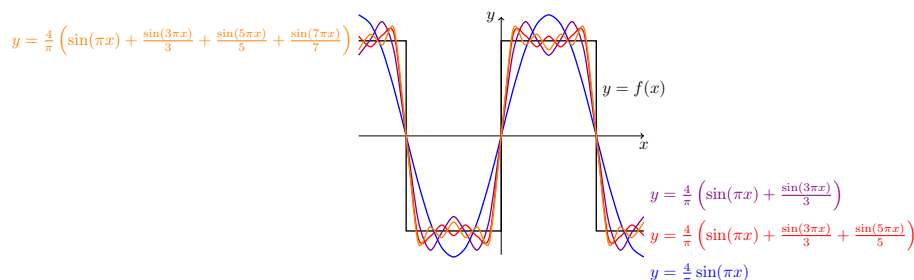
Zbog Dirichletovog teorema (a i jer pojedinačna točka ne mijenja vrijednost integrala) se kod razvoja funkcija u Fourierov red obično ne obraća pažnja na vrijednosti funkcije u točkama prekida.

**Primjer 515.** *Odredimo Fourierov red funkcije definirane s*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

*Kako je zapisana, ta je funkcija definirana samo na  $\langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle$ , no podrazumijeva se da i u  $-1$ ,  $0$  i  $1$  ima neke vrijednosti (no one nisu bitne). Stoga se u tim točkama u kojima pravilo nije specificirano graf često povezuje vertikalnim crtama, koje naravno nisu dio grafa. Naravno, podrazumijevamo i da*





Slika 11.8: Periodična funkcija i njezine aproksimacije parcijalnim sumama Fourierovog reda.

je  $f$  po periodičnosti proširen do funkcije s domenom  $\mathbb{R}$ . Njezin graf prikazan je crno na slici 11.8.

Funkcija  $f$  je neparna, dakle su svi  $A_n = 0$ , odnosno u razvoju u Fourierov red imamo samo sinuse:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\omega_n x).$$

Nadalje, širina intervala na kom je funkcija zadana je  $T = 2$ , dakle je  $L = 1$  i  $\omega_n = n\pi$ ,  $s_n(x) = \sin(\omega_n x)$ . Po formuli 11.5 imamo:

$$\begin{aligned} B_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin(\omega_n x) dx = \int_{-1}^0 (-\sin(\omega_n x)) dx + \int_0^1 \sin(\omega_n x) dx = \\ &= \frac{\cos(\omega_n x)}{\omega_n} \Big|_{-1}^0 - \frac{\cos(\omega_n x)}{\omega_n} \Big|_0^1 = \frac{1 - \cos \omega_n}{\omega_n} - \frac{\cos \omega_n - 1}{\omega_n} = \frac{2 - 2 \cos \omega_n}{\omega_n}. \end{aligned}$$

Uzeši u obzir da je  $\cos \omega_n = \cos(n\pi) = (-1)^n$  vidimo: Kad je  $n$  paran,  $(-1)^n = 1$  pa je  $B_n = 0$ ; kad je  $n$  neparan,  $(-1)^n = -1$  pa je  $B_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$ . Dakle,

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin(\pi x) + \frac{1}{3} \sin(3\pi x) + \frac{1}{5} \sin(5\pi x) + \dots \right).$$

Jednakost po Dirichletovom teoremu vrijedi za sve  $x$  osim točaka prekida, a to su  $x = k \in \mathbb{Z}$ . Na slici 11.8 obojeno su prikazane i prve tri parcijalne sume gornjeg reda.

**Primjer 516.** Neka je  $f$  na  $[-5, 5]$  zadana s  $f(x) = 1 + \frac{2}{5}x$  za  $x < 0$  i  $f(x) = 1 - \frac{2}{5}x$  za  $x \geq 0$ , vidimo da se radi o parnoj (neprekidnoj) funkciji, dakle su svi  $B_n = 0$  i u Fourierovom redu funkcije  $f$  pojavljuju se samo kosinusi. Ovdje je  $L = 5$  i  $\omega_n = \frac{n\pi}{5}$ .

Prvo izračunamo  $A_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) dx = 0$ . Dalje računamo  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

$$A_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \cos(\omega_n x) dx = \frac{1}{5} \left( \int_{-5}^0 \left(1 + \frac{2}{5}x\right) \cos(\omega_n x) dx + \int_0^5 \left(1 - \frac{2}{5}x\right) \cos(\omega_n x) dx \right).$$

Parcijalnom integracijom dobivamo:

$$A_n = 2 \cdot \frac{2 - \pi n \sin(\pi n) - 2 \cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}.$$

Za parne  $n$  je  $\sin(\pi n) = 0$  i  $\cos(\pi n) = 1$  pa je  $A_n = 0$ , a za neparne  $n$  je  $\cos(\pi n) = 0$  i  $\sin(\pi n) = -1$  pa je  $A_n = \frac{4+2\pi n}{n^2 \pi^2}$ . Dakle,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{5} = \\ &= \frac{4+2\pi}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{5} + \frac{4+6\pi}{9\pi^2} \cos \frac{3\pi x}{5} + \frac{4+10\pi}{25\pi^2} \cos(\pi x) + \frac{4+14\pi}{49\pi^2} \cos \frac{7\pi x}{5} + \dots \end{aligned}$$

Slika 11.8 sugerira da najbolje aproksimacije zadane periodične funkcije pomoću sinusa i kosinusa dobivamo tako da (kao i u slučaju aproksimacije polinomom temeljem Taylorovog reda) uzimamo parcijalne sume odgovarajućeg Fourierovog reda. No, dok je to za funkciju na toj slici točno, općenito to ne mora biti tako. Pravilan odabir je tako da biramo članove reda u redosljedu po njihovoj važnosti (njihovom doprinosu ukupnoj funkciji). Taj se pak redosljed iščitava iz spektra amplituda, koji je određen kompleksnim oblikom Fourierovog reda.

Kao što znamo iz odjeljka 1.4, za sve  $t \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Stoga, ako imamo razvoj funkcije  $f$  u Fourierov red (formula 11.3) i koristeći činjenicu  $\frac{1}{i} = -iz$ , možemo ga preoblikovati u

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(\omega_n x) + B_n \sin(\omega_n x)) = \\ &= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n (\exp(i\omega_n x) + \exp(-i\omega_n x)) - iB_n (\exp(i\omega_n x) - \exp(-i\omega_n x))) = \\ &= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} ((A_n - iB_n) \exp(i\omega_n x) + (A_n + iB_n) \exp(-i\omega_n x)) = \end{aligned}$$

(primijetimo da je  $\omega_{-n} = -\omega_n$ )

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{A_{-n} + iB_{-n}}{2} \exp(i\omega_{-n}x) + \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n - iB_n}{2} \exp(i\omega_nx) = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \phi_n(i\omega_nx),
 \end{aligned}$$

ako smo označili

$$\phi_n(x) = \exp(i\omega_nx)$$

i

$$c_0 = \frac{A_0}{2}, \quad c_n = \frac{A_n - iB_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{A_n + iB_n}{2} (n \in \mathbb{N}).$$

Zapis Fourierovog reda 11.3 u obliku

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \phi_n(i\omega_nx) \quad (11.6)$$

s gore definiranim koeficijentima  $c_n \in \mathbb{C}$  i (kompleksnim eksponencijalnim) funkcijama  $\phi_n$  naziva se **kompleksnim oblikom Fourierovog reda**. Još jednom napominjemo: za sve  $n$  je  $\omega_{-n} = -\omega_n$ .

Uočimo:

- Ako je  $f$  realna funkcija, za sve  $n$  vrijedi  $\overline{c_n} = c_{-n}$ .
- Ako je  $f$  realna i parna funkcija, svi  $B_n$  su 0 pa su svi koeficijenti  $c_n$  realni brojevi:

$$c_{\pm n} = \frac{A_n}{2}.$$

- Ako je  $f$  realna i neparna funkcija, svi  $A_n$  su 0 pa su svi koeficijenti  $c_n$  čisto imaginarni brojevi:

$$c_{\pm n} = \pm i \frac{B_n}{2}.$$

**Primjer 517.** Nastavimo primjer 516. Budući da se radilo o parnoj funkciji imamo da je  $c_n = 0$  za parne  $n \in \mathbb{Z}$ , a za neparne  $n$  je  $c_{\pm n} = \frac{2+\pi n}{n^2\pi^2}$ , odnosno kompleksni oblik Fourierovog reda za funkciju  $f$  je

$$f(x) = \dots + \frac{2+5\pi}{25\pi^2} \exp(-i\omega_5x) + \frac{2+3\pi}{9\pi^2} \exp(-i\omega_3x) + \frac{2+\pi}{\pi^2} \exp(-i\omega_1x) + \frac{2+\pi}{\pi^2} \exp(i\omega_1x) + \dots$$

Vezano za kompleksni oblik Fourierovog reda (formula 11.6), točnije, vezano za kompleksne Fourierove koeficijente  $c_n$ , definiraju se dva spektra funkcije  $f$ : spektar amplituda i fazni spektar. Za to je potrebno kompleksne Fourierove koeficijente  $c_n$  zapisati u eksponencijalnom obliku

$$c_n = |c_n|e^{i\varphi_n}.$$

Njihove apsolutne vrijednosti  $|c_n|$  čine spektar amplituda, a argumenti  $\varphi_n$  čine fazni spektar. Preciznije, **Spektar amplituda** periodične funkcije  $f$  je funkcija  $|c_n|$  u ovisnosti o kutnoj frekvenciji  $\omega_n$ , a **fazni spektar** je ovisnost  $\varphi_n$  o  $\omega_n$ .

**Napomena 42.** Formalno gledajući, kompleksni Fourierovi koeficijenti čine kompleksan niz  $(c_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ , tj.  $c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ . Ukoliko definiramo  $c(\omega_n) = c_n$  doduše formalno imamo drugu funkciju (domena joj je skup svih cjelobrojnih višekratnika od  $\pi/L$ ), no efektivno ništa bitno nismo promijenili.

**Primjer 518.** Nastavimo primjer 517 odnosno 516. Budući da je  $c_n = 0$  za parne  $n \in \mathbb{N}$ , a za neparne  $n$  su  $c_{\pm n} = \frac{2+\pi n}{n^2\pi^2}$  realni brojevi, imamo da je spektar amplituda definiran s

$$|c_{\pm n}| = \begin{cases} 0, & n \text{ paran}, n \in \mathbb{N}_0 \\ \frac{2+\pi n}{n^2\pi^2}, & n \text{ neparan}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Kako je uobičajeno spektre izražavati kao funkcije od  $\omega_n$ , a u našem je primjeru  $\omega_n = n\pi/5$ , vidimo da je

$$|c_{\pm n}| = \begin{cases} 0, & n \text{ paran}, n \in \mathbb{N}_0 \\ \frac{2+5\omega_n}{25\omega_n^2}, & n \text{ neparan}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Budući da za realne funkcije  $f$  vrijedi  $c_{-n} = \overline{c_n}$  i budući da kompleksan broj i njegov kompleksno konjugirani broj imaju istu apsolutnu vrijednost, slijedi važna i korisna činjenica:

**Propozicija 8.** Spektar amplituda realne funkcije uvijek je parna (realna, nenegativna) funkcija.

S druge strane, fazni spektar parnih realnih funkcija se od 0 i  $\pi$  (jer su tada koeficijenti  $c_n$  realni pa su im argumenti 0 ili  $\pi$ ), a za neparne realne funkcije fazni se spektar sastoji samo od  $\pm\pi/2$  (jer su tada koeficijenti  $c_n$  čisto imaginarni).

**Primjer 519.** Periodična funkcija opisuje intenzitete niza jednolikih impulsa: Svaki impuls traje konstantnim intenzitetom  $\frac{1}{20}$  s, a razmak između

početaka dva uzastopna impulsa iznosi  $\frac{1}{4}$  s. Dakle,  $T = \frac{1}{4}$  s (odnosno,  $L = \frac{1}{8}$  s i  $\omega_n = 8n\pi$ ). Zbog periodičnosti, odabir pozicije  $t = 0$  je proizvoljan pa ćemo ga podesiti tako da funkcija bude parna, jer znamo da su u tom slučaju računi jednostavniji. Stavimo dakle:

$$i(t) = \begin{cases} I, & -\frac{1}{8} < \frac{t}{s} < -\frac{1}{40}, \\ 0, & -\frac{1}{40} < \frac{t}{s} < -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Funkcija je parna pa je

$$c_{\pm n} = \frac{A_n}{2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{8}} \int_{-1/40}^{1/40} I \cos(\omega_n t) dt = 8I \int_0^{1/40} \cos(\omega_n x) dx,$$

$$c_0 = \frac{I}{5}, \quad c_n = \frac{1}{\omega_n} \sin \frac{\omega_n}{40} (n \neq 0).$$

Spektar amplituda je stoga jednak

$$|c_0| = \frac{I}{5}, \quad |c_n| = \frac{1}{\omega_n} \left| \sin \frac{\omega_n}{40} \right| (n \neq 0).$$

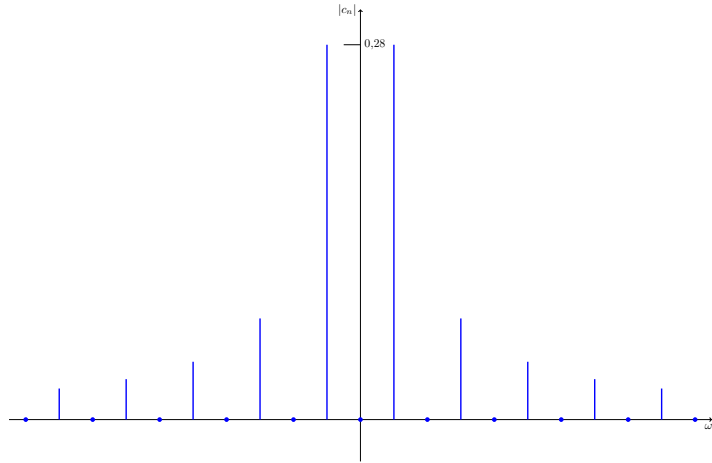
Za  $n \neq 0$  djeljiv s 5 amplitude su 0. Ako  $n$  pri dijeljenju s 5 daje ostatak 1 ili 4,  $|c_n| = \frac{1}{8n\pi} \sin \frac{\pi}{5} \approx 0,0234/n$ , a ako  $n$  pri dijeljenju s 5 daje ostatak 2 ili 3,  $|c_n| = \frac{1}{8n\pi} \sin \frac{2\pi}{5} \approx 0,0378/n$ .

Za našu svrhu odabira najbolje aproksimacije periodične funkcije  $f$  određenim brojem funkcije tipa  $c_n$  i  $s_n$  važniji je spektar amplituda. Naime, onukazuju koje od funkcija  $\phi_n$  u sumi najviše doprinose formiranju aproksimacije funkcije  $f$  putem Fourierova reda. Stoga, ako želimo odabrati aproksimaciju od  $f$  s nekim brojem članova Fourierovog reda, biramo toliko članova redom po iznosima  $|c_n|$ . Budući da je spektar realne funkcije paran, uvijek je  $|c_n| = |c_{-n}|$  pa bitne članove uzimamo u parovima s istim  $n$ .

**Primjer 520.** Recimo da smo funkciju iz primjera 516 htjeli aproksimirati s 6 članova Fourierovog reda s najvećim  $|c_n|$ . S obzirom na formulu iz primjera 518, vidimo da je  $y = |c_n|$  kao funkcija od  $o = \omega_n$  tipa  $y = \frac{2+5|o|}{25o^2}$ . Budući da je parna, dovoljno ju je gledati za  $o > 0$ . Imamo  $y' = \frac{-5x-4}{25x^3}$ , što je za pozitivne  $x$  negativno, dakle  $y$  pada za  $o > 0$ , odnosno  $|c_n|$  pada s porastom apsolutne vrijednosti neparnih  $n \in \mathbb{Z}$  (a za parne je 0). Spektar amplituda naše funkcije  $f$  prikazan je slikom 11.9.

Budući da smo ovdje imali  $c_{\pm n} = A_n/2$ , znači da su 6 članova koji najviše doprinose funkciji  $f$  iz primjera 516 oni s  $n = \pm 1$  (dva najveća  $|c_n|$ ), zatim s  $n = \pm 2$  i  $n = \pm 3$ . Dakle, tražena aproksimacija je

$$f(x) \approx \frac{2+5\pi}{25\pi^2} \exp(-i\omega_5 x) + \frac{2+3\pi}{9\pi^2} \exp(-i\omega_3 x) +$$



Slika 11.9: Primjer spektra amplituda realne funkcije.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2 + \pi}{\pi^2} \exp(-i\omega_1 x) + \frac{2 + \pi}{\pi^2} \exp(i\omega_1 x) + \frac{2 + 3\pi}{9\pi^2} \exp(i\omega_3 x) + \frac{2 + 5\pi}{25\pi^2} \exp(i\omega_5 x) = \\
 & = \frac{2 + \pi}{\pi^2} \exp(-i\omega_1 x) + \frac{2 + \pi}{\pi^2} \exp(i\omega_1 x) + \frac{2 + 3\pi}{9\pi^2} \exp(-i\omega_3 x) + \frac{2 + 3\pi}{9\pi^2} \exp(i\omega_3 x) + \frac{2 + 5\pi}{25\pi^2} \exp(-i\omega_5 x) + \frac{2 + 5\pi}{25\pi^2} \exp(i\omega_5 x) = \\
 & = \frac{2 + \pi}{\pi^2} \cdot 2 \cos(\omega_1 x) + \frac{2 + 3\pi}{9\pi^2} \cdot 2 \cos(\omega_3 x) + \frac{2 + 5\pi}{25\pi^2} \cdot 2 \cos(\omega_5 x) =
 \end{aligned}$$

**Napomena 43.** Kako su  $n \in \mathbb{Z}$ , slijedi da se radi diskretnim funkcijama te se ta dva grafa zovu i diskretni frekvencijski spektri ili linijski spektri (vidi sliku 11.9).

Primijetimo da će uvijek, kao u prethodnom primjeru, po dva člana kompleksnog oblika Fourierovog reda

$$c_{-n} \exp(-i\omega_n x) + c_n \exp(i\omega_n x)$$

dati po dva člana realnog Fourierovog reda

$$A_n \cos(\omega_n x) + B_n \sin(\omega_n x)$$

(u prethodnom su primjeru koeficijenti  $B_n$  bili 0 pa se zato činilo kao da smo iz dva člana kompleksnog oblika dobili samo jedan član realnog oblika reda). Iznimka je naravno  $n = 0$ .

### 11.3.3 Uvod u Fourierovu transformaciju

Vidjeli smo: Periodične funkcije se (uglavnom) mogu zapisati u obliku kompleksnog Fourierovog reda, koji je određen Fourierovim koeficijentima (i funkcijom i njezinim periodom).

Kompleksni Fourierovi koeficijenti čine niz  $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ , dakle funkciju  $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , preciznije, domena od  $c$  je  $\{\omega_n : n \in \mathbb{Z}\}$ . Razmaci između spektralnih linija su  $\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{T/2}$ .

Opću funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  možemo zamisliti kao funkciju s jako velikim periodom ( $T \rightarrow \infty$ ). Time se razmaci među spektralnim linijama smanjuju i linijski spektar prelazi u kontinuirani spektar (varijabla funkcije  $c$  iz diskretne  $\omega_n$  prelazi u kontinuiranu  $\omega$ ).

Fourierov red, kojeg možemo shvatiti kao sumaciju po  $\omega_n$ , pritom postaje integracija po  $d\omega$ :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n x} \rightsquigarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Gornje ideje dadu se provesti formalno i rezultiraju u:

**Definicija 103 (Fourierov transformat).** *Ako funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ima svojstvo da nepravi integral<sup>7</sup>  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$  konvergira, kažemo da je apsolutno integrabilna i za takvu funkciju  $f$  je s*

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

definirana kompleksna funkcija  $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  koja se zove Fourierov transformat od  $f$ , a njezina nezavisna varijabla je  $\omega$ . Funkcija  $\mathcal{F}$  koja apsolutno integrabilnoj funkciji  $f$  pridružuje njezin Fourierov transformat  $\mathcal{F}(f)$  naziva se Fourierova transformacija.

**Napomena 44.** *Kako je  $|e^{-i\omega t}| = 1$  za sve  $t$  i  $\omega$ , intuitivno se vidi (a može se i dokazati) da zahtjev apsolutne integrabilnosti na  $f$  povlači konvergenciju integrala kojim je  $\mathcal{F}(f)$  definirana.*

*Podsjetimo se i da  $f$  ne može biti apsolutno integrabilna ako joj  $x$ -os nije obostrana horizontalna asimptota, dakle Fourierov transformat nije definiran ni za koju funkciju  $f$  koja nema to svojstvo (npr. nema smisla tražiti Fourierov transformat polinoma koji nije nulfunkcija, sinusa, kosinusa, eksponencijalne ili logaritamske funkcije).*

---

<sup>7</sup>Formalno, ovo je kompleksni nepravi integral.

Dakle: Kao što je niz Fourierovih koeficijenata  $c$  funkcija s domenom  $\{\omega_n : n \in \mathbb{Z}\}$  pridružena periodičnoj funkciji  $f$ , tako je  $\mathcal{F}(f)$  funkcija s domenom  $\mathbb{R}$  (čije elemente označamo s  $\omega$ ) pridružena apsolutno integrabilnoj funkciji  $f$ . Općenito će fizikalna dimenzija varijable  $\omega$  Fourierovog transformata neke funkcije  $f$  biti recipročna jedinici varijable  $t$  od  $f$  (kao što to vrijedi i za  $\omega_n$ ). Tako imamo sljedeću tablicu fizikalnih dimenzija varijable od  $f$  i od  $\mathcal{F}(f)$  u nekim čestim primjenama:

| kontekst                   | varijabla funkcije $f$ | varijabla od $\mathcal{F}(f)$ |
|----------------------------|------------------------|-------------------------------|
| akustika, telekomunikacije | vrijeme $t$            | frekvencija $\nu$             |
| kvantna teorija            | pozicija $x$           | $\frac{p}{\hbar}$             |
| difrakcija                 | vektor $\vec{r}$       | vektor $\vec{s}^*$            |

Ako je  $f$  realna funkcija,  $\mathcal{F}(f)(\omega)$  je oblika  $a(\omega) + ib(\omega)$  s  $a$  parnom, a  $b$  neparnom realnom funkcijom. Preciznije:

**Teorem 66.** *Funkcija  $f$  je realna ako i samo ako njen Fourierov transformat  $\mathcal{F}(f)$  ima svojstvo da je za sve  $\omega \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{F}(f)(-\omega) = \overline{\mathcal{F}(f)(\omega)}.$$

Za Fourierovu transformaciju vrijedi kao i za Fourierove koeficijente: Ako je  $f$  parna i realna,  $\mathcal{F}(f)$  je realna, a ako je  $f$  neparna i realna,  $\mathcal{F}(f)$  je čisto imaginarna.

Fourierova transformacija  $\mathcal{F}$  apsolutno integrabilnoj funkciji  $f$  pridružuje njen Fourierov transformat  $\mathcal{F}(f)$  i ona je, zbog linearnost integriranja, linearan operator, tj. vrijedi:

$$\mathcal{F}(f + g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) + \mathcal{F}(g)(\omega),$$

$$\mathcal{F}(\alpha f)(\omega) = \alpha \mathcal{F}(f)(\omega),$$

za sve apsolutno integrabilne  $f, g$  i sve skalare  $\alpha$ . Uz svojstvo linearnosti, Fourierova transformacija ima niz drugih dobrih svojstava:

- **Svojstvo pomaka:** Pomak nezavisne varijable polazne funkcije za  $t_0$  rezultira skaliranjem odgovarajućeg Fourierovog transformata s  $e^{-i\omega t_0}$ . Također, skaliranje polazne funkcije s  $e^{i\omega_0 t}$  znači pomak za  $\omega_0$  za pripadni Fourierov transformat.
- **Skaliranje:** Ako je  $g(t) = f(\alpha t)$ , onda je  $\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ .
- **Promjena smjera:** Ako je  $g(t) = f(-t)$ , onda je  $\mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(-\omega)$ .



- **Simetrija:** Ako je  $g(t) = \mathcal{F}(f)(t)$ , onda je  $\mathcal{F}(g)(\omega) = 2\pi f(-\omega)$ .
- **Deriviranje:**  $\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega)$ ;
- **Modulacija:**  
Ako je  $g(t) = f(t) \cos \omega_0 t$ , onda je  $\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}(f)(\omega - \omega_0) + \mathcal{F}(f)(\omega + \omega_0))$ ;
- **Konvolucija obzirom na vrijeme:**  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ ;
- **Konvolucija obzirom na frekvenciju:**  $\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{F}(2\pi f(t)g(t))$ .

U posljednja dva svojstva spominje se dosad nedefinirani izraz konvolucija. Radi se o operaciji s funkcijama:<sup>8</sup>

**Definicija 104 (Konvolucija).** *Konvolucija dviju funkcija  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  (gdje je  $I$  neki, ne nužno ograničen, interval u  $\mathbb{R}$ ) je funkcija  $f * g$  definirana s:*

$$f * g(x) = \int_I f(t)g(x-t) dt.$$

Operacija  $*$  je komutativna, asocijativna, distributivna te kvaziasocijativna. Jedan način kako vizualizirati konvoluciju dvije funkcije je da zamislimo da se graf jedne giba u smjeru osi apscisa jednolikom brzinom preko grafa druge funkcije te da u svakom trenutku računamo površinu presjeka — iznos te površine je vrijednost njihove konvolucije u tom trenutku. Drugi način za vizualizaciju konvolucije je ovaj: Zamislite sliku koju niste dobro fokusirali. Dobivena „zamućena slika” je konvolucija točne slike s funkcijom „zamućivanja”. Pritom je za funkciju zamućivanja dovoljno opisati što bi se desilo sa slikom jedne jedine točke. Treći način je sljedeć: konvolucija nekog ograničenog uzorka (npr. sadržaja jedinične ćelije) sa jediničnim signalima u više točaka pravca, ravnine ili prostora (npr. u točkama kristalne rešetke) možemo zamisliti kao kopije te slike u svim tim točkama (u opisanom primjeru kristalnu strukturu).

Kao i Fourierov red, tako i Fourierov transformat funkcije određuje dva spektra funkcije: spektar amplituda i fazni spektar:

$$M(\omega) = |\mathcal{F}(f)(\omega)|,$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{b(\omega)}{a(\omega)}.$$

Često pitanje je: Ako znamo funkciju  $F$  i znamo da je ona Fourierova transformacija nepoznate funkcije  $f$ , kako odrediti  $f$ ? Odgovor na to daje sljedeći teorem.

---

<sup>8</sup>Konvolucija nije definirana za sve funkcije  $f$  i  $g$ , već za tzv. Schwartzove funkcije. Pojednostavljeno rečeno, to su funkcije koje teže u 0 kad  $x \rightarrow \pm\infty$  i to brže negoli ikoja potencija  $x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorem 67 (Inverzna Fourierova transformacija).** *Neka je  $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap A(\hat{\mathbb{R}})$ . Pretpostavimo da je  $F = \mathcal{F}(f)$  za neku  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Tada za sve  $t \in \mathbb{R}$  vrijedi*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Gornje ideje lako se poopćavaju na trodimenzionalni slučaj:

$$\mathcal{F}(f)(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) e^{i\pi \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

gdje je  $\mathbf{r}$  radij-vektor promatrane točke u  $\mathbb{R}^3$ , a  $\mathbf{s}$  je vektor u recipročnom prostoru (izomorfnom s  $\mathbb{R}^3$ ). Posjetimo se da je jedinica duljine u recipročnom prostoru recipročna jedinici duljine u direktnom prostoru — to je u skladu s već uočenom činjenicom da je jedinica varijable Fourierovog transformata (ovdje je to  $\mathbf{s}$ ) recipročna jedinici varijable osnovne funkcije  $f$  (ovdje je to  $\mathbf{r}$ ).

U standardnoj situaciji kakva se susreće u difrakcijskoj strukturnoj analizi,  $\mathbf{r}$  je radij-vektor nekog atoma ili iona u kristalu,  $f$  je funkcija elektronske gustoće (nepoznata), a  $\mathcal{F}(f)$  je rezultat dobiven difrakcijom na kristalu. Cilj je odrediti točke maksimuma funkcije elektronske gustoće, tj. pozicije atoma. Kako je difrakcijski uzorak ekvivalent Fourierovog transformata elektronske gustoće, teorem o inverznoj Fourierovoj transformaciji omogućuje rekonstrukciju funkcije elektronske gustoće — ali samo teoretski. Naime, zapravo se kao rezultat difrakcije dobiva samo spektar amplituda te se  $f$  ne može putem teorema o inverznoj Fourierovoj transformaciji direktno rekonstruirati. Taj problem se problemom faza. Njega se rješava na više različitih načina, primjerice Pattersonovom metodom ili tzv. direktnim metodama.



# Bibliografija

- [1] P. ATKINS, J. DE PAULA, Physical Chemistry. Oxford University Press, 2006.
- [2] T. CVITAŠ, materijali iz fizikalne kemije, [ftp://ftp.chem.pmf.hr/download/cvitas/Fiz\\_Kem/](ftp://ftp.chem.pmf.hr/download/cvitas/Fiz_Kem/), pristupljeno 2. listopada 2009.
- [3] P. DAWKINS, Paul's Online Math Notes. <http://tutorial.math.lamar.edu/>, pristupljeno 1. rujna 2017.
- [4] D. E. JOYCE, Dave's Short Course on Complex Numbers. <http://www.clarku.edu/~djoyce/complex/>, pristupljeno 1. rujna 2017.
- [5] G. JUST, D. OELSCHLÄGEL, Mathematik für Chemiker. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1981.
- [6] S. KUREPA, Matematička analiza 2. Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
- [7] R. G. MORTIMER, Mathematics for Physical Chemistry, 3rd ed., Elsevier, 2005.
- [8] G. PÓTA, Mathematical Problems for Chemistry Students. Elsevier, 2006.
- [9] E. A. REINSCH, Mathematik für Chemiker. Teubner, 2004.
- [10] V. SIMEON, Kemijska termodinamika, 1. poglavlje, primjerak za studentsku uporabu. Zagreb, 2004.
- [11] E. STEINER, The Chemistry Maths Book. Oxford University Press, 2008.
- [12] D. TIBLJAŠ, F. M. BRUECKLER, materijali iz Kristalografije. <http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/kristalografija.html>, pristupljeno 1. rujna 2017.

- [13] University of Cambridge: NRICH enriching mathematics.  
<http://nrich.maths.org/>, pristupljeno 1. rujna 2017.

# Kazalo

- $A^n$ , 286  
 $C(I)$ , 284  
 $M_{m,n}$ , 277  
 $V^2$ , 214  
 $V^2(O)$ , 214  
 $V^3$ , 214  
 $V^3(O)$ , 214  
 $\mathbb{C}$ , 17  
 $\nabla$ , 428  
 $e$ , 154, 470  
ćelija, jedinična, 330  
čestica u jednodimenzionalnoj kutiji, 212  
aditivnost, 300  
aditivnost deriviranja, 101, 157  
akceleracija, 98, 203  
ako, 9  
ako i samo ako, 9  
amplituda, 83  
antiderivacija, 169  
aplikata, 232  
aproksimacija afinom funkcijom, 417, 418  
aproksimacija kvadratnom funkcijom, 418  
apscisa, 14, 232  
apsolutna vrijednost, 12, 88, 99, 164, 416  
apsolutna vrijednost kompleksnog broja, 20  
argument kompleksnog broja, 25  
arkus-funkcije, 84  
arkus-kosinus, 84  
arkus-kotangens, 85  
arkus-sinus, 84  
arkus-tangens, 85  
Arrheniusova jednadžba, 415  
asimptota, 58  
asimptota, horizontalna, 58, 71, 154, 159, 160, 370, 371  
asimptota, kosa, 159  
asimptota, vertikalna, 59, 149, 160  
asocijativnost, 10  
azimut, 426  
baza, 220, 221, 232, 289, 297  
baza eksponencijalne funkcije, 70  
baza vektorskog prostora, 304, 305  
baza, desna, 229  
baza, direktna, 230, 330  
baza, kanonska, 291, 297  
baza, kristalografska, 222  
baza, lijeva, 229  
baza, ortogonalna, 222, 224, 225, 230, 297  
baza, ortonormirana, 222, 224, 225, 230, 232, 235, 297  
baza, recipročna, 234, 235, 242, 246, 332  
Beer-Lambertov zakon, 273  
Bernoullijeva diferencijalna jednadžba, 361  
bijekcija, 41, 68, 317  
bitni prekid, 165  
Bohrov radijus, 71  
Bolzano-Weierstraßov teorem, 182, 206

- Bornova interpretacija valne funkcije, 210, 371, 442  
 broj, čisto imaginaran, 17  
 broj, kompleksan, 17, 283, 285  
 broj, realan, 17  
 broj, recipročni, 24  
 brojnost, 8  
 brzina, 95, 134, 201  
 brzina kemijske reakcije, 356  
 brzina reakcije, 96  
 Cauchyjev kriterij, 477  
 centar mase, 208, 219  
 cikloida, 134  
 cilindar, parabolični, 392  
 cilindričke koordinate, 425, 427  
 Clairautova diferencijalna enadžba, 350  
 Cramerov sustav, 270, 330  
 Cramerovo pravilo, 329, 375, 418  
 D’Alambertov kriterij, 477  
 de Moivre-ova formula, 27  
 de Moivreova formula, 33  
 decimalni zapis, 11, 474  
 degenerirana svojstvena vrijednost, 335, 338  
 derivabilne funkcije, 145  
 derivabilnost, 97, 98, 182  
 derivacija, 93–95, 139, 144, 145, 164, 393, 450  
 derivacija inverzne funkcije, 103, 104  
 derivacija kompozicije funkcija, 102  
 derivacija kvocijenta funkcija, 102  
 derivacija produkta funkcija, 102, 185  
 derivacija, druga, 98, 112, 117  
 derivacija, parcijalna, 393–396, 428, 450  
 deriviranje, 396  
 deriviranje, implicitno, 132  
 deriviranje, logaritamsko, 103  
 determinanta, 336, 407, 427  
 determinanta matrice, 323  
 diferencijal, 396, 453, 454  
 diferencijal skalarne funkcije, 455  
 diferencijal varijable, 453  
 diferencijal, egzaktn, 455, 458  
 diferencijali, 453  
 diferencijalna enadžba sa separiranim varijablama, 357  
 diferencijalna enadžba, egzaktna, 456  
 diferencijalna enadžba, homogena linearna, 358, 362  
 diferencijalna enadžba, linearna, 358, 362, 364  
 diferencijalna enadžba, linearna s konstantnim koeficijentima, 362  
 diferencijalna enadžba, obična, 347, 348  
 diferencijalna enadžba, parcijalna, 347  
 diferencijalne enadžbe sa separiranim varijablama, 352  
 dijagonala matrice, 268, 278  
 dijagonalizacija operatora, 339  
 dijagonalna matrica, 339  
 dijeljenje kompleksnih brojeva, 24  
 dimenzija, 289, 304, 305  
 dipolni moment, 219  
 diskriminanta, 17, 52, 369  
 divergencija, 428, 429  
 divergencija vektorskog polja, 431  
 divergencija, nepravog integrala, 195, 197  
 domena, 35, 386  
 domena, prirodna, 127, 386  
 doseg reakcije, 395  
 drugi glavni stavak termodinamike, 457  
 drugi Newtonov zakon, 348  
 dužina, orijentirana, 214  
 dualna baza, 230  
 duljina krivulje, 445

- duljina vektora, 215
- e, 71, 77
- eksponencijalni oblik kompleksnog broja, 31
- eksponencijalni proces, 354
- ekstrem funkcije više varijabli, 417
- ekstrem, globalni, 120, 122
- ekstrem, lokalni, 114
- ekstremi, 114
- ekstremi, globalni, 123, 124
- ekstremi, lokalni, 115–118
- elektrostatika, 429, 431
- element, 9
- element matrice, 277
- element skupa, 9
- elementarne transformacije, 266, 268, 269, 292, 326
- elipsa, 134
- energija nulte točke, 371
- energija, Gibbsova, 124, 395
- energija, unutrašnja, 205
- entalpija, 458
- entalpije, 205
- entropija, 457
- Eulerov kriterij egzaktnosti, 456
- Eulerov multiplikator, 456
- Eulerov uvjet, 433
- Eulerova formula, 31
- Eulerovo cikličko pravilo, 397
- formula, Lagrangeova, 229
- Fourierov transformat, 504
- Fourierova transformacija, 504, 505
- frekvencija, kutna, 83, 494
- Fubinijev teorem, 437, 441
- fundamentalni skup rješenja, 363, 364
- fundamentalni zakon recipročne rešetke, 247
- funkcija, 35
- funkcija gustoće vjerojatnosti, 126, 210
- funkcija stanja, 205, 451, 452, 456
- funkcija više varijabli, realna, 385
- funkcija više varijabli, skalarna, 385
- funkcija zadana po dijelovima, 87, 166
- funkcija, afina, 47, 54, 256, 463
- funkcija, algebarska, 46, 64, 70
- funkcija, apsolutno integrabilna, 504
- funkcija, derivabilna, 98
- funkcija, eksponencijalna, 31, 70, 71, 162, 365, 366, 370
- funkcija, elementarna, 46, 69, 86, 165
- funkcija, eksponencijalna, 373
- funkcija, implicitno zadana, 131
- funkcija, integrabilna, 180, 295
- funkcija, inverzna, 67, 68
- funkcija, kompleksna, 32, 209, 295
- funkcija, konkavna, 112
- funkcija, konstantna, 47, 54
- funkcija, konveksna, 111, 112
- funkcija, kvadratna, 51, 54
- funkcija, Lagrangeova, 412
- funkcija, linearna, 47, 299
- funkcija, logaritamska, 75
- funkcija, monotona, 40
- funkcija, neparna, 41, 177
- funkcija, neprekidna, 123, 164, 174, 207, 284
- funkcija, ograničena, 178
- funkcija, padajuća, 182
- funkcija, padajuća, 40, 95
- funkcija, parna, 40, 177
- funkcija, periodična, 32, 79, 493
- funkcija, po dijelovima neprekidna, 184, 207
- funkcija, podintegralna, 171, 180
- funkcija, prava racionalna, 190
- funkcija, racionalna, 57, 151, 154, 155, 190
- funkcija, rastuća, 182
- funkcija, rastuća, 39, 95
- funkcija, realna, 36



- funkcija, Riemann-integrabilna, 180  
 funkcija, skalarna, 388, 423  
 funkcija, transcendentna, 69  
 funkcija, transcendentna, 46, 86  
 funkcija, trigonometrijska, 79, 369, 373  
 funkcija, valna, 24, 371  
 funkcija, vektorska, 422  
 funkcija, zadana po dijelovima, 184  
 funkcije, ciklometrijske, 84  
 funkcije, trigonometrijske, 31, 33  
 funkcional, linearni, 301, 326  
  
 gama-funkcija, 200  
 Gaußov zakon, 429  
 Gaußova metoda eliminacija, 266, 267, 273  
 Gibbs-Helmholtzova relacija, druga, 458  
 Gibbsova energija, 457  
 glavna minora matrice, 407  
 globalni maksimum, 406  
 globalni minimum, 405  
 gradijent, 400, 401, 403, 404, 422, 428, 431, 433  
 graf funkcije, 36, 135, 388, 403  
 granična vrijednost, 141  
 granice određenog integrala, 180  
 greška aproksimacije, 416  
 greška aproksimacije, 416  
 gustoća, 208  
 gustoća vjerojatnosti, Maxwell-Boltzmannova, 126, 127  
  
 Hamiltonijan, 333, 335, 371  
 harmonijski oscilator, 379  
 harmonijski oscilator, 368, 369, 372  
 harmonijski oscilator s trenjem, 369, 370  
 harmonijski oscilator, kvantnoteorijski model, 370  
 Heineova karakterizacija neprekidnosti, 471  
  
 Henderson-Hasselbalchova jednadžba, 78  
 hermitska matrica, 340  
 hermitski konjugirana matrica, 325  
 hermitski operator, 340  
 Hesso zakon, 285  
 hiperbolne funkcije, 73  
 homogene diferencijalne jednadžbe, 353  
 homogeni sustav linearnih jednadžbi, 260, 286, 320, 336  
 homogeni sustav linearnih jednadžbi, 260, 262, 271  
 homogenost, 300  
 homogenost deriviranja, 101, 157  
 Hookeov zakon, 368  
 horizontalna asimptota, 84  
 identiteta, 36, 47  
 imaginarna jedinica, 17  
 imaginarna os, 18  
 imaginarni dio kompleksnog broja, 17  
 infinitezimalni račun, 93  
 injekcija, 41, 68  
 integrabilnost, 182  
 integral, dvostruki, 435, 437, 440  
 integral, krivuljni, 1. vrste, 447  
 integral, krivuljni, 2. vrste, 449, 451, 454  
 integral, neodređeni, 171, 184, 201  
 integral, nepravilni, 194, 197, 210, 371, 438, 477  
 integral, određeni, 174, 178, 180, 183, 184, 194, 203, 210  
 integral, Riemannov, 180  
 integral, trostruki, 440  
 integral, višestruki, 424, 435  
 integralni kriterij, 477  
 integriranje, 349  
 integriranje racionalnih funkcija, 190  
 intimit, 435  
 invarijante operatora, 337

- invertibilna matrica, 316  
 inverz funkcije, 67  
 inverz matrice, 322  
 inverzija, 302  
 inverzna Fourierova transformacija, 507  
 inverzna funkcija, 315  
 inverzna matrica, 316, 329, 427  
 ishodište, 214, 232, 234  
 ishodište, 14  
 izjednačavanje kemijske jednadžbe, 261  
 iznos geometrijskog vektora, 214, 223, 225  
 iznos vektora, 296  
 izobara, 389  
 izohora, 389  
 izomorfizam vektorskih prostora, 293  
 izoterma, 389  
  
 Jacobijeva matrica, 429, 433  
 Jakobijan, 424, 427, 439  
 jakost struje, 203  
 jedinična ćelija, 222, 229  
 jedinični operator, 306  
 jedinica integrala, 182  
 jedinica, mjerna, 8  
 jedinice u derivacijama, 96  
 jedinice u integralima, 207  
 jednadžba pravca, implicitna, 257  
 jednadžba ravnine, 402  
 jednadžba stanja idealnog plina, 385, 389  
 jednadžba, diferencijalna, 286  
 jednadžba, kvadratna, 17, 369  
 jednadžba, linearna, 233, 320  
 jednadžba, Schrödingerova, 333, 371  
 jednadžba pravca, 233  
 jednadžba stanja idealnog plina, 7, 8, 38, 49, 60  
 jednadžba tangente na graf funkcije, 95  
 jednadžba, diferencijalna, drugog reda, 107  
 jednadžba, diferencijalna, prvog reda, 107  
 jednadžba, Helmholtzova, 432  
 jednadžba, kvadratna, 52  
 jednadžba, Laplaceova, 432  
 jednadžba, linearna, 255, 257, 258  
 jednadžba, Schrödingerova, 432  
 kanonska baza, 394  
 kanonski oblik jednadžbe pravca, 241  
 karakteristična jednadžba, 365, 366, 369  
 karakteristična jednadžba operatora, 337  
 Kartezijev list, 132  
 kemijska kinetika, 202, 356, 378, 421  
 kinetika, kemijska, 48, 109  
 Kirchhoffov zakon, drugi, 110, 361, 372  
 kodomena, 35  
 koeficijent brzine reakcije, 96, 357  
 koeficijent smjera, 47  
 koeficijent, Fourierov, 497  
 koeficijent, vodeći (kvadratna f.), 51  
 koeficijent, vodeći (polinoma), 54  
 koeficijenti polinoma, 54  
 Kohlrauschov zakon, 64  
 kolinearni vektori, 216  
 kolinearnost, 287  
 kombinacija, linearna, 259  
 komplanarnost, 221, 229, 287  
 kompleksne funkcije, 19  
 kompleksni oblik Fourierovog reda, 499, 500  
 kompleksno konjugirani broj, 21  
 kompozicija, 303, 313, 450  
 kompozicija funkcija, 66, 102  
 komutativnost, 10  
 komutator, 314

- konkavnost, 111–113
- konstanta, 7
- konstanta integracije, 172
- konveksnost, 111–113
- konvergenција, nepravog integrala, 195, 197
- konvolucija, 506
- koordinate, 14, 217, 220, 221, 290, 297, 304, 306
- koordinate vektora, 260, 290
- koordinate, cilindrične, 427
- koordinate, polarne, 427
- koordinate, sferne, 427
- koordinatne funkcije, 423
- koordinatne osi, 14, 232
- koordinatne ravnine, 232, 234
- koordinatni sustav, 232
- koordinatni sustav, Kartezijev, 14, 232
- korijen, 63
- korijeni, 68
- korjenovanje, 10
- korjenovanje kompleksnih brojeva, 29, 30
- kose asimptote, 159
- kosinus, 81–83, 493
- kosinus hiperbolni, 73
- kotangens, 83
- kotangens hiperbolni, 73
- kratnost nultočke polinoma, 54
- kristalni sustav, triklinski, 222
- kriterij uspoređivanja, 477
- krivulja, 232, 233, 444
- krivulja u prostoru, 241
- krivulja u ravnini, 130, 133, 401
- krivulja u ravnini, implicitno zadana, 131
- krivulja, implicitno zadana, 387
- krivulja, integralna, 350
- krivulja, parametarski zadana, 133
- krivulja, zatvorena, 444, 452
- kružnica, 132, 134, 137, 386
- kut između vektora, 227
- kut između dva vektora, 224
- kut između ravnina, 238
- kut između vektora, 220
- kutna frekvencija, 369
- kvadranti, 14
- kvadratna jednadžba, 18, 22
- kvantna teorija, 209
- L'Hôpital-ovo pravilo, 161, 162
- L'Hospital-ovo pravilo, 161, 162
- Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti, 170
- Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, 105
- lančanica, 73
- lančano pravilo, 104, 132, 396, 450, 458
- lančano pravilo, 102, 188
- Laplaceov razvoj, 324
- Leibnizov kriterij, 477
- lemniskata, Bernoullijeva, 138
- limes, 141
- limes funkcije, 142
- limes funkcije u beskonačnosti, 153, 155
- limes funkcije u točki, 142, 143
- limes kompozicije funkcija, 157
- limes kvocijenta funkcija, 156
- limes niza, 467, 468, 470
- limes produkta funkcija, 156
- limes razlike funkcija, 156
- limes slijeva, 145
- limes zbroja funkcija, 156
- limes zdesna, 145
- limes, beskonačan, 468
- limes, beskonačni, 148
- limes, jednostrani, 145
- linearan operator, 311, 505
- linearizacija neafine ovisnosti, 419
- linearna algebra, 213

- linearna diferencijalna jednađba, 372
- linearna diferencijalna jednađba, homogena, 353, 369
- linearna jednađba, 299
- linearna kombinacija, 285
- linearna nezavisnost, 288, 292, 297, 363
- linearna supstitucija, 193
- linearna zavisnost, 288
- linearni funkcional, 306, 311, 453
- linearni operator, 316
- linearnost deriviranja, 101, 172, 363
- linearnost integriranja, 172, 184
- ln, 77
- log, 77
- logaritam, dekadski, 77
- logaritam, prirodni, 77
- logistička jednađba, 355
- logistički proces, 355
- lokalni maksimum, 405, 407
- lokalni minimum, 405
- lokalni minimum, 407
- maksimum, globalni, 120
- maksimum, lokalni, 114
- matrica, 277, 424
- matrica linearnog operatora, 305, 306, 310, 311, 323, 336, 339
- matrica sustava, 266, 268, 320
- matrica sustava linearnih jednađbi, 277
- matrica, antihermitska, 280
- matrica, antisimetrična, 280
- matrica, dijagonalna, 326
- matrica, gornjetrokutasta, 326
- matrica, hermitska, 279
- matrica, hermitski konjugirana, 279
- matrica, Hesseova, 399, 407
- matrica, invertibilna, 335
- matrica, Jacobijeva, 424, 427
- matrica, jedinična, 306, 315
- matrica, kompleksna, 277
- matrica, kvadratna, 278, 306, 424
- matrica, ortogonalna, 297, 309, 319
- matrica, realna, 277
- matrica, simetrična, 279
- matrica, skalarna, 306
- matrica, suprotna, 280
- matrica, transponirana, 279
- matrica, unitarna, 297, 319
- matrica-redak, 278
- matrica-stupac, 278, 311
- Maxwell-Boltzmannova funkcija gustoće, 492
- Maxwellove formule termodinamike, 458
- međumrežni razmak, 245, 247, 250
- metoda Lagrangeovih multiplikatora, 411
- metoda najmanjih kvadrata, 415
- metoda neodređenih koeficijenata, 373, 374
- metoda separacije varijabli, 358
- metoda supstitucije (integrali), 188
- metoda supstitucije (sustavi linearnih jednađbi), 264
- metoda supstitucije za integrale, 188, 189
- metoda varijacije konstante, 358, 375
- Millerovi indeksi, 237
- mimoilazni pravci, 243
- minimum, globalni, 120
- minimum, lokalni, 114
- minora matrice, 407
- minore, 407
- mjerne jedinice u derivacijama, 94
- množenje geometrijskih vektora skalarom, 216, 222
- množenje matrica, 311, 313
- množenje matrice skalarom, 281
- množenje vektora skalarom, 283
- množenje kompleksnih brojeva, 24

- molekulska particijska funkcija, 474  
 monom, 53, 285  
 multiplikator, Lagrangeov, 411  
 nabla-operator, 428, 430–432  
 nehomogeni sustav linearnih jednadžbi, 260  
 nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog, 226  
 nejednakost trokuta, 21  
 neodređeni izrazi kod limesa, 152  
 neodređeni izrazi u limesima, 161  
 neprekidna funkcija, 471  
 neprekidnost, 182  
 neprekidnost u točki, 164  
 neutralni element, 10  
 Newton-Leibnizova formula, 183, 452  
 Newtonov zakon hlađenja, 359  
 Newtonov zakon, drugi, 361, 368, 369, 372  
 nivo-krivulja, 387, 390, 401  
 nivo-krivulje, 387  
 niz, 461  
 niz, aritmetički, 463, 469  
 niz, divergentan, 468  
 niz, Fibonaccijev, 462  
 niz, geometrijski, 463, 469, 473  
 niz, konstantan, 462  
 niz, konvergentan, 468  
 niz, ograničen, 466  
 niz, padajući, 467  
 niz, rastući, 467  
 norma, 445  
 norma vektora, 296, 302  
 normala, 403  
 normalna ravnina, 445  
 normiranost funkcije gustoće, 210  
 nužan uvjet konvergencije reda, 476  
 nulfunkcional, 301  
 nulmatrica, 280, 315  
 nuloperator, 301, 306  
 nultočka funkcije, 128  
 nultočke funkcije, 38  
 nulvektor, 215, 217, 218, 228, 283, 306  
 očekivana vrijednost slučajne varijable, 210  
 obična diferencijalna jednadžba 1. reda, 352  
 određivanje globalnih ekstrema, 123  
 oduzimanje geometrijskih vektora, 218  
 oduzimanje matrica, 281  
 oduzimanje vektora, 283  
 Ohmov zakon, 372  
 okomitost praca na ravninu, 244  
 okomitost pravaca, 243  
 okomitost ravnina, 237  
 opća jednadžba ravnine, 234  
 operator simetrije, 302, 304, 306, 336  
 operator skaliranja, 299, 301, 306, 319, 333, 334  
 operator, jedinični, 301, 302, 334  
 operator, Laplaceov, 431  
 operator, linearan, 430  
 operator, linearni, 300, 333  
 operator, ortogonalni, 302, 336  
 operator, unitarni, 336  
 operatori simetrija, 334  
 optimizacija, 114, 124  
 orbitala, 209  
 orbitala, 1s, 71  
 orbitala, atomska, 211  
 ordinata, 14, 232  
 orijentacija krivulje, 445  
 ortogonalna matrica, 329  
 ortogonalna projekcija, 226  
 ortogonalnost, 495  
 ortogonalnost funkcija, 212  
 ortogonalnost vektora, 296  
 osna simetrija, 300

- osnovni teorem infinitezimalnog računa, 183
- označavanje osi, 15
- $p[H]$ , 78
- pad s otporom zraka, 361
- parabola, 51
- paraboloid, rotacijski, 391
- paralelnost pravaca, 243
- paralelnost pravca i ravnine, 244
- paralelnost ravnina, 236
- parametarske jednadžbe pravca, 240
- parametarske jednadžbe ravnine, 238
- parametri baze, 220, 221
- parcijalna integracija, 185, 186
- parcijalna suma reda, 473
- parcijalne derivacije drugog reda, 398
- period, 79
- period, temeljni, 80
- periodičnost, 79, 83
- Planckov zakon, 491
- plin, idealni, 125
- ploha, 232, 233, 241, 388, 402
- po dijelovima neprekidna funkcija, 167, 175
- početak krivulje, 444
- početni uvjet, 201, 350
- početni uvjeti, 108
- područje integriranja, 174, 180
- područje konvergencije, 479, 480
- podskup, 36
- polarna os, 135
- polarna udaljenost, 135, 426
- polarne koordinate, 425, 427, 438
- polarne koordinate u ravnini, 135
- polarni koordinatni sustav u ravnini, 135
- polarni kut, 135
- polinom, 53, 54, 101, 191, 285, 291, 366, 373, 480
- polinom, Taylorov, 481, 484
- polje, vektorsko, 431
- polovište dužine, 233
- pomak, fazni, 83
- potencija, opća, 79
- potencijal, Lennard-Jonesov, 121
- potencijal, termodinamički, 124
- potenciranje, 10
- potprostor vektorskog prostora, 286
- potprostor, pravi, 287
- potprostor, svojstveni, 333, 334
- potprostor, trivijalni, 287
- površina paralelograma, 227
- pravokutni koordinatni sustav, 14
- prekid, 175
- prekid prve vrste, 165
- prikaz vektora u bazi, 290
- primitivna funkcija, 169
- prirodna domena, 36
- problem površine, 173, 178
- proces, eksponencijalni, 358
- produkt, mješovita, 230
- produkt, mješoviti, 229, 231
- produkt, skalarni, 223, 224, 311, 449, 495
- produkt, vektorski, 231
- promjena baze, 291
- promjena koordinata, 425, 432
- promjena orijentacije krivulje, 445
- proporcionalnost, 47
- proporcionalnost, obrnuta, 56
- prosječna vrijednost funkcije, 206, 442
- prostor, direktni, 230
- prostor, recipročni, 230, 246
- prostor, unitarni, 294
- prvi glavni stavak termodinamike, 457
- računske operacije, 10
- racionalne funkcije, 151
- rad, 125, 203, 448, 456
- rad, električni, 205
- rad, mehanički, 204

- rad, volumni, 205
- radij-vektor, 19, 214
- radijan, 81
- radijus konvergenije, 480
- radioaktivni raspad, 354
- rang matrice, 292
- rastav na parcijalne razlomke, 190–192, 202
- ravnina, 232, 235, 402
- ravnina, mrežna, 236, 245
- ravnina, tangencijalna, 403, 404
- rešetka, 233, 323
- rešetka, kristalografska, 233
- reakcija drugog reda, 109, 163, 202
- reakcija nultog reda, 48
- reakcija prvog reda, 49, 95
- reakcijski gradijent, 395
- reakcijski mehanizmi, 378
- realna funkcija jedne varijable, 36
- realna os, 18
- realni dio kompleksnog broja, 17
- recipročna baza, 230
- red, 472, 473
- red diferencijalne jednačbe, 348
- red funkcija, 478
- red matrice, 277
- red potencija, 479
- red reakcije, 356, 421
- red rotacije, 303
- red veličine, 13
- red, apsolutno konvergentan, 477
- red, binomni, 487
- red, divergentan, 476
- red, Fourierov, 497
- red, geometrijski, 474, 477
- red, harmonijski, 476
- red, konvergentan, 473, 475
- red, Maclaurinov, 485, 486
- red, Taylorov, 484
- red, trigonometrijski, 496
- refleksija, 303
- regularna matrica, 316
- reprezentant vektora, 214
- restrikcija funkcije, 68
- rješenje diferencijalne jednačbe, 106, 348
- rješenje obične diferencijalne jednačbe, 362
- rješenje, partikularno, 321, 373
- rješenje, trivijalno, 260
- rješenje diferencijalne jednačbe, opće, 349
- rješenje diferencijalne jednačbe, singularno, 349
- rješenje diferencijalne jednačbe, partikularno, 349
- rješenje linearne jednačbe, 255, 257, 258
- rješenje sustava linearnih jednačbi, 260
- rotacija, 27, 303, 310, 323, 334
- rotacija ravnine, 308
- rotacija vektorskog polja, 428, 429, 431
- rotoinverzija, 303
- rotorefleksija, 303, 313
- Sarrusovo pravilo, 323
- Schwartzov teorem, 431
- Schwarzov teorem, 399
- sedlasta točka, 408
- segmentni oblik jednačbe ravnine, 239
- sekanta, 144
- sekularne jednačbe, 414
- separacija varijabli, 352
- sfera, 403
- sferne koordinate, 426, 427, 432, 441
- signum, 175
- sila, konzervativna, 204
- simetričan operator, 340
- simetrična matrica, 340

- simetrija, centralna, 20, 302, 303, 306, 335  
 simetrija, osna, 22, 303, 334  
 simetrija, rotacijska, 137  
 simetrije, 302  
 sinus, 81, 83, 493  
 sinus hiperbolni, 73  
 SIR-model, 377  
 skalar, 213, 216, 281, 282  
 skalarna funkcija, 423  
 skalarni produkt, 294  
 skaliranje funkcije, 42  
 skalrana funkcija, 431  
 skok, 165, 167  
 skup, 9  
 skup cijelih brojeva, 10  
 skup kompleksnih brojeva, 17  
 skup prirodnih brojeva, 9  
 skup racionalnih brojeva, 10  
 skup realnih brojeva, 10  
 slika funkcije, 37  
 slobodni član, 47, 51, 54, 257–259  
 slobodni pad, 350  
 slučajna varijabla, diskretna, 208  
 slučajna varijabla, kontinuirana, 208, 210  
 slučajna varijabla, kotinuirana, 210  
 spajanje krivulja, 446  
 spektar amplituda, 501, 502, 506  
 spektar linearnog operatora, 365  
 spektar operatora, 334  
 spektar, fazni, 501, 506  
 spirala, Arhimedova, 137  
 spirala, hiperbolična, 137  
 stacionarna točka, 117, 406  
 standardna koncentracija, 51  
 stehiometrija, 261  
 stehiometrijski koeficijent, 96, 261  
 stopa pada, 354  
 stopa rasta, 354  
 strujni krug, 361, 372  
 stupanj polinoma, 53  
 subdivizija, 178  
 suma reda, 473, 489  
 suma, integralna, 179  
 suprotni vektor, 218  
 supstitucija, linearna, 188  
 surjekcija, 41, 68  
 sustav jednadžbi, 260  
 sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi, 379  
 sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi, homogeni, 365  
 sustav linearnih jednadžbi, 262, 264, 321, 363  
 sustav linearnih jednadžbi, 260  
 sustav običnih diferencijalnih jednadžbi, 377  
 sustav, Cramerov, 321, 368  
 sustavi bez rješenja, 271  
 sustavi s beskonačno mnogo rješenja, 271  
 sustavi s jedinstvenim rješenjem, 270  
 svojstva određenog integrala, 176  
 svojstvena vrijednost, 336, 381  
 svojstveni potprostor, 337  
 svojstveni vektor, 336, 381  
 tablično integriranje, 172  
 tablica derivacija, 97  
 tangencijalni vektor, 445  
 tangens, 83, 136  
 tangens hiperbolni, 73  
 tangenta, 94, 99, 131, 134, 139, 402, 403, 482  
 temeljni zakon recipročne rešetke, 247  
 tenzor, metrički, 331  
 teorem o implicitnoj funkciji, 131, 387  
 teorem o sendviču, 157  
 teorem srednje vrijednosti za integrale, 206  
 teorem, Binet-Cauchyjev, 329



- teorem, Bolzano-Weierstraß-ov, 123  
 teorem, Bolzano-Weierstraßov, 167, 178  
 teorem, Dirichletov, 497  
 teorem, Lagrangeov srednje vrijednosti, 207  
 teorem, Taylorov, 486  
 termodinamički potencijal, 457  
 termodinamika, 395, 397, 447, 451, 455, 456, 459  
 termodinamika, kemijska, 205  
 termodinamika, statistička, 126  
 tip matrice, 277  
 točka infleksije, 117  
 točka, kritična, 118  
 točka, stacionarna, 99, 116, 117  
 točke, kritične, 116  
 točno ako, 9  
 točka infleksije, 113  
 točka prekida, 164  
 točka, kritična, 116  
 točka, stacionarna, 116  
 tok funkcije, 127  
 toplina, 456  
 toplinski kapacitet, 125, 397  
 toplinski kapacitet, izohorni, 396  
 trag, 336, 429  
 trag matrice, 301, 323  
 transformacije grafova, 41  
 translacija, 19, 301  
 translacija grafa funkcije, 44  
 transponirana matrica, 325  
 trenje, 369  
 trigonometrijske funkcije, 81  
 trigonometrijski oblik kompleksnog broja, 25  
 ubrzanje, 203  
 udaljenost dvije točke, 233  
 udaljenost točke do ravnine, 249  
 udaljenost točke od ravnine, 248  
 uklonjivi prekid, 165  
 ultraljubičasta katastrofa, 492  
 unitarna matrica, 329  
 unutrašnja energija, 457  
 unutrašnja energija, 457  
 uređeni par, 14  
 uvjetni ekstremi, 411  
 valna duljina, 80  
 valna funkcija, 443  
 valna jednadžba, 432  
 varijabla, 7  
 varijabla, diskretna, 8  
 varijabla, kontinuirana, 8  
 varijabla, nezavisna, 7, 14, 35  
 varijabla, zavisna, 7, 14, 35  
 vektor, 213, 282, 283  
 vektor normale, 235  
 vektor smjera pravca, 240  
 vektor, euklidski, 213  
 vektor, geometrijski, 213, 214, 291, 401, 402  
 vektor, jedinični, 215  
 vektor, suprotni, 215  
 vektor, svojstveni, 333  
 vektorski prostor, 282, 283  
 vektorski prostor, beskonačnodimenzijski, 289  
 vektorski prostor, kompleksan, 283, 289, 295  
 vektorski prostor, konačnodimenzijski, 289  
 vektorski prostor, realan, 283, 289, 295  
 vektorski prostor, realni, 213  
 vektorsko polje, 422–425, 432  
 vektorsko polje, konzervativno, 432, 433, 451  
 veličina, skalarna, 213  
 veličina, vektorska, 213  
 vertikalna asimptota, 84  
 veza derivabilnosti i neprekidnosti, 164

višestruka nultočka polinoma, 54, 192  
virijalna jednažba stanja plina, 490  
vjerojatnosni prostor, 208  
vjerojatnost, 126, 208, 209, 442, 492  
volumen paralelepipeda, 229  
vrijednost, svojstvena, 333

Weissovi parametri, 239  
Wronskijan, 364, 366, 375

zadatak miješanja, 359  
zakon brzine reakcije, 109, 202, 356,  
378, 421  
zakon brzine reakcije, integrirani, 109  
zakon očuvanja energije, 205  
zakon, Arrheniusov, 91  
zakon, drugi Kirchhoffov, 110  
zakon, drugi Newtonov, 107, 204  
zakon, Ostwaldov, 90  
zamjena varijabli u dvostrukom inte-  
gralu, 438  
zamjena varijabli u višestrukom inte-  
gralu, 441  
zaokruživanje, 13  
zatvorena krivulja, 447  
zbrajanje geometrijskih vektora, 217,  
222  
zbrajanje matrica, 280  
zbrajanje vektora, 283  
značajne znamenke, 12  
znanstvena notacija, 12  
zrcaljenje, 303  
zrcaljenje grafa funkcije, 42  
zrcaljenje prostora, 308  
zrcaljenje ravnine, 308  
zrcalna simetrija, 308