## V.2.1.2. METODE NUMERIČKOG RJEŠAVANJA HD JDŽBI

- teško je HD jdžbe riješiti analitički ⇒ moguće uz aprox
- ∃ više metoda, a osnovne 2 grupe su:

(1) METODA KONAČNIH RAZLIKA

(2) METODE RAZVOJA U RED ORTOG. FJA

a) SPEKTRALNA

b) METODA KONAČNIH ELEMENATA

- za ove metode u praksi su potrebna simultana motrenja koja to nisu pa se vrši asimilacija podataka, potrebna je i inicijalizacija

## V.2.1.2.1. METODA KONAČNIH RAZLIKA

- bit ove metode je aproksimacija (zamjena) diferencijala konačnim razlikama
- točnost te aproksimacije može se ilustrirati razvojem $f(x)$ u Taylorov red:

$$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{(\Delta x)^2}{2!} \pm f'''(x)\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots$$

- sada izrazim 1. derivaciju:

$$f'(x)\Delta x = f(x+\Delta x) - f(x) - f''(x)\frac{(\Delta x)^2}{2!} - f'''(x)\frac{(\Delta x)^3}{3!} - \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + R} \quad ; R = -f''(x)\frac{\Delta x}{2!} - f'''(x)\frac{(\Delta x)^2}{3!}$$

↳ pogreška odsijecanja (razdvajanja)

11.04.2004.
- tu sam stao

- npr. primijenimo to na hor. advektivnu jdžbu

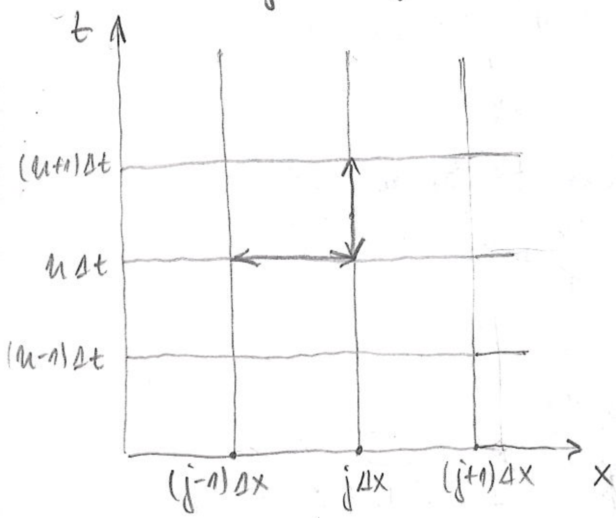
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \phi = \phi(x,t) \; ; \; c = const$$

- pp da su nam poznate vrijednosti $\phi$ u diskretnim točkama mreže $x_j$ u diskretnim vremenima $t_n$

$x_j = j \cdot \Delta x$ ; $j = 0, 1, \dots, N$ ; $\Delta x$ ... korak mreže (prostorni korak)

$t_n = n \cdot \Delta t$ ; $n = 0, 1, \dots$ ; $\Delta t$ ... vremenski korak

- oznaka : $\phi_j^n \Rightarrow$ vrijednost $\phi$ u točki $j\Delta x$ u vremenu $n\Delta t$




- advektivna jdžba u kon. razlikama:

$$\boxed{\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta t} + c\,\frac{\phi_j^n-\phi_{j-1}^n}{\Delta x} = 0} \quad ; \; c \geq 0$$

SHEMA

- pomnožim sa $\Delta t$:

$$\phi_j^{n+1}-\phi_j^n + c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\phi_j^n-\phi_{j-1}^n\right)=0$$

- pokrata: $\boxed{c\frac{\Delta t}{\Delta x}=\mu}$

$$\phi_j^{n+1}-\phi_j^n+\mu\phi_j^n-\mu\phi_{j-1}^n=0$$

⇒ dobije se prognostički oblik jdžbe:

$$\boxed{\phi_j^{n+1}=(1-\mu)\phi_j^n+\mu\phi_{j-1}^n}$$

- potrebna je konvergencija ove sheme, a UVJET KONVERGENCIJE je zadovoljen kada ova (i ostale) jdžbe teže u diferencijalne jdžbe kada $\Delta x, \Delta t \to 0$
- ako to nije ispunjeno, tada ova shema ne teži u dif. jdžbu i rješenje se ne može uzeti kao točno
- označimo točnu (egzaktnu) vrijednost za isti položaj sa: $\phi(j\Delta x, n\Delta t)$
- **usporedimo točno i numeričko rješenje**

$$\phi_j^n-\phi(j\Delta x, n\Delta t)=\Delta_{nn} \; \ldots \; \textbf{pogreška numeričkog rješenja}$$

- uvrstim li točno rješenje u našu jdžbu (shemu), na desnoj strani neću dobiti 0 jer naša shema pravi grešku (sjetimo se odsjecanja) ⇒ za svaku derivaciju (posebno po x, posebno po t), shema daje određeni ostatak R

$$\Rightarrow \frac{\phi[j\Delta x,(n+1)\Delta t]-\phi[j\Delta x, n\Delta t]}{\Delta t} + c\,\frac{\phi[j\Delta x, n\Delta t]-\phi[(j-1)\Delta x, n\Delta t]}{\Delta x}=0$$

R... pogreška sheme, superpozicija R-ova iz Tay. razvoja (kako on izgleda?)

- razvijemo svaku fju iz brojnika u svoj Tay. razvoj

$$\phi[j\Delta x,(n+1)\Delta t]=\phi[j\Delta x, n\Delta t]+\phi'[j\Delta x, n\Delta t]_t\,\Delta t+\phi''[j\Delta x, n\Delta t]_t\frac{(\Delta t)^2}{2!}+\ldots$$

$$\phi[(j-1)\Delta x, n\Delta t]=\phi[j\Delta x, n\Delta t]-\phi'[j\Delta x, n\Delta t]_x\,\Delta x+\phi''[j\Delta x, n\Delta t]_x\frac{(\Delta x)^2}{2!}-\ldots$$

- uvrstimo to sada u shemu

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\phi[j\Delta x, n\Delta t]}{\Delta t}}+\phi'[j\Delta x, n\Delta t]_t+\phi''[j\Delta x, n\Delta t]_t\frac{\Delta t}{2!}+\ldots-\cancel{\frac{\phi[j\Delta x, n\Delta t]}{\Delta t}}+$$

$$+c\left[\cancel{\frac{\phi[j\Delta x, n\Delta t]}{\Delta x}}-\left(\cancel{\frac{\phi[j\Delta x, n\Delta t]}{\Delta x}}-\phi'[j\Delta x, n\Delta t]_x+\phi''[j\Delta x, n\Delta t]_x\frac{\Delta x}{2!}-\ldots\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow \phi'[j\Delta x, n\Delta t]_t + c\,\phi'[j\Delta t, n\Delta t]_x = R = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\Delta t + \frac{1}{6}\frac{\partial^3\phi}{\partial t^3}(\Delta t)^2 + \dots + c\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Delta x - \frac{1}{6}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}(\Delta x)^2 + \dots\right)$$

$$\Rightarrow \text{dakle} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\Delta t + \frac{1}{6}\frac{\partial^3\phi}{\partial t^3}(\Delta t)^2 + \dots + c\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Delta x - \frac{1}{6}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}(\Delta x)^2 + \dots\right) = O(\Delta t) + O(\Delta x)}$$

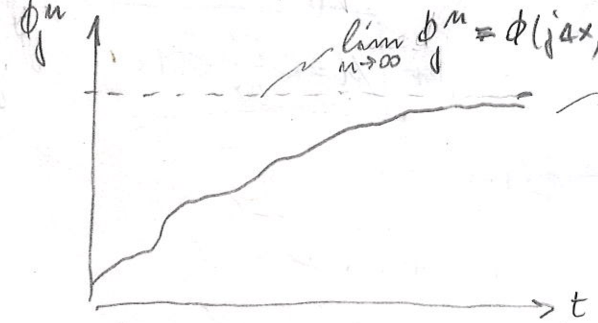
- konzistentnost: kada $\Delta x, \Delta t \to 0 \Rightarrow R \to 0$
- Def. RED TOČNOSTI SHEME → to je najniži stupanj od $\Delta t$ i $\Delta x$ koji se javlja u članovima pogreške odsijecanja
  ovaj naš $R$ ima 1. red točnosti
- uvjet konzistencije može biti zadovoljen ako je shema barem 1. reda točnosti

STABILNOST RJEŠENJA (SHEME) – usporedimo TOČNO I NUMERIČKO RJEŠENJE:

$$\phi_j^n - \phi(j\Delta x, n\Delta t) = \Delta_n$$ – pogreška numeričkog rješenja

- pitanje ⇒ kako se ponaša pogreška $\Delta_n$ kada su $\Delta x$ i $\Delta t$ stalni, a istovremeno broj vremenskih koraka raste?

⇒ kaže se da je numeričko rješenje $\phi_j^n$ stabilno ako pogreška $\Delta_n$ ostaje ograničena kako broj vremenskih koraka $n$ raste uz bilo koje poč. uvjete (ne bilo kakve!)
- dakle ako $n \to \infty$, $\Delta_n$ mora biti ograničeno i rješenje konvergira ka limesu




~ konvergencija rješenja ako konvergira pogreška

- ∃ mogućnost odabira koraka $(\Delta t, \Delta x)$ kako bi rješenje bilo stabilno
- ∃ više metoda takvog odabira

(Pr.) ENERGETSKA METODA
- zove se tako jer promatramo kvadrat naše fje, a ako je to vjetar → dobije se $E_k$
- promatramo sumu kvadrata svih rješenja odjednom ⇒ želimo da ta suma ukupno gledano ostane const

$$\sum_j (\phi_j^n)^2 \xrightarrow{?} \text{const}$$

- uzmimo prognostički oblik jdžbe, kvadriramo i sumiramo:

$$\sum_j (\phi_j^{n+1})^2 = \sum_j \left[(1-\mu)^2(\phi_j^n)^2 + 2\mu(1-\mu)\phi_j^n\phi_{j-1}^n + \mu^2(\phi_{j-1}^n)^2\right]$$

- def. rubne uvjete (neopravdano, Bog nam ih je dao) na rubovima područja integracije:

$$\boxed{\phi_0^n = \phi_N^n}$$

- uz ovu mogu pisati

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N}(\phi_{j-1}^n)^2 = (\phi_0^n)^2 + (\phi_1^n)^2 + \dots + (\phi_{N-1}^n)^2 = (\phi_N^n)^2 + (\phi_1^n)^2 + \dots + (\phi_{N-1}^n)^2 = \sum_{j=1}^{N}(\phi_j^n)^2}$$

- digresija: Schwartzova nejednakost (uz $\bar{x}=\bar{y}=0$):

$$\boxed{\sum x_i y_i \le \sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}} \quad + \text{ uvjet } \boxed{1-\mu \ge 0}$$

- iskoristi to:

$$\sum_j \phi_j^n \phi_{j-1}^n \le \sqrt{\sum_j (\phi_j^n)^2}\sqrt{\sum_j (\phi_{j-1}^n)^2} \overset{(*)}{=} \sum_j (\phi_j^n)^2$$

$\Rightarrow$ sada:

$$\sum_j (\phi_j^{n+1})^2 = \sum_j \left[(1-\mu)^2(\phi_j^n)^2 + 2\mu(1-\mu)\underbrace{\phi_j^n \phi_{j-1}^n}_{\le(\phi_j^n)^2} + \mu^2 \underbrace{(\phi_{j-1}^n)^2}_{=(\phi_j^n)^2}\right] \le$$

$$\le \sum_j \left[(1-\mu)^2 + 2\mu(1-\mu) + \mu^2\right](\phi_j^n)^2$$

$$\Rightarrow \sum_j (\phi_j^{n+1})^2 \le \left(1-\cancel{2\mu}+\cancel{\mu^2}+\cancel{2\mu}-\cancel{2\mu^2}+\cancel{\mu^2}\right)\sum_j(\phi_j^n)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_j (\phi_j^{n+1})^2 \le \sum_j (\phi_j^n)^2}$$

energija u narednom trenutku ne može nadmašiti onu u prethodnom
$\Rightarrow$ time smo pokazali stabilnost!

- ako želimo smanjiti $\Delta x$, moramo smanjiti i $\Delta t$ jer $\boxed{\mu = c\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1}$
- ovo je bilo za necentralnu shemu
- u praksi se često koriste CENTRALNE SHEME (bolje):

$$\boxed{\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}}{2\Delta t} + c\,\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0}$$

## V.2.1.2.2. METODA RAZVOJA U RED ORTOG. FJA

- te fje mogu biti teorijske ili empirijske
- mi vršimo separaciju varijabli $\Rightarrow$ odvajamo vremenski ovisni od prostorno ovisnog dijela $\Rightarrow$ od parc. dif. jdžbi dobivamo obične dif. jdžbe
- opći princip metode (gledamo 1D advektivnu jdžbu):

$\phi(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(t) e_m(x)$, ali mi se ograničavamo sa sumom do $M$ pa je:

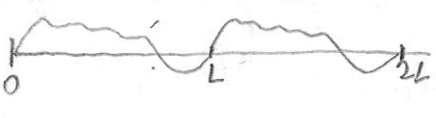
$$\boxed{\hat{\phi}(x,t) = \sum_{m=0}^{M} \phi_m(t) e_m(x)}$$

$\phi_m$ ... koef. razvoja (prostorne konstante)
$e_m$ ... fje razvoja (vremenske konstante)
$\rightarrow$ njih nađemo nekom metodom objektivne analize (za neki $t_0$ koji se dogodio)

$$\lim_{M\to\infty} \hat{\phi}(x,t) = \phi(x,t)$$

- budući su $e_m(x)$ ortogonalne fje (dodatno da su periodične s periodom $L$), vrijedi:

$$\int_0^L e_m(x) e_n(x)\,dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \ne n \end{cases}$$



- sada, s ovakvim zapisom naša jdžba postaje:

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{m=0}^{M} \frac{d\phi_m(t)}{dt} e_m(x) + c\sum_{m=0}^{M} \phi_m(t)\frac{de_m(x)}{dx} = R} \rightarrow (*)$$

- imam ostatak R jer M ~~→~~ ∞ pa u ostatak odlaze svi oni članovi koji ostaju nakon M-a
- parcijalni diferencijal $\partial \rightarrow d$ jer $\phi_m = \phi_m(t)$, a $e_m = e_m(x)$ → fje samo 1 varijable
- budući da $e_m(x)$-ove odabiremo sami, $\phi_m(t)$-ovi su nam nepoznanice!
- sada to treba riješiti, mi ćemo 2-ma metodama:

① METODA KOLOKACIJE
- nije baš najbolja, ali je najjednostavnija
- stavlja se R=0 i prelazi se u diskretni prostor:

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{d\phi_m(t)}{dt} e_m(x_j) + c\sum_{m=0}^{M} \phi_m(t)\left[\frac{de_m(x)}{dx}\right]_{x_j} = 0 \qquad j = 0, 1, 2, \dots, M$$

⇒ imamo M jdžbi ($\forall x_j$) za M nepoznanica $\phi_m(t)$; $m = 0, \dots, M$ ⇒ kad se to riješi dobijemo $\phi_m(t)$-ove

② GALERKINOVA METODA ORTOGONALNIH FJA
- bolja je od kolokacije
- on je uveo uvjet: $\boxed{\int_0^L R e_m(x)\,dx = 0}$; $m = 0, \dots, M$ — OBRAZLOŽITI! ⇒ u R-u žive sve fje razvoja za koje je $m > M$, pa je svaka od njih ⊥ na $e_m(x)$ za $m > M$!
- naš (*) pomnožimo sa $e_k(x)$ i integriramo $\int_0^L dx$:

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{d\phi_m(t)}{dt} e_m(x)e_k(x) + c\sum_{m=0}^{M} \phi_m(t)\frac{de_m(x)}{dx} e_k(x) = Re_k(x) \quad \Big/ \int_0^L dx$$

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{d\phi_m(t)}{dt} \underbrace{\int_0^L e_m(x)e_k(x)\,dx}_{\substack{=1,\ \text{za } m=k \\ =0,\ \text{za } k\neq m}} + c\sum_{m=0}^{M} \int_0^L \phi_m(t)\frac{de_m(x)}{dx} e_k(x)\,dx = \underbrace{\int_0^L Re_k(x)\,dx}_{0}$$

} preživi samo m-ti član

$$\frac{d\phi_k(t)}{dt} + c\sum_{m=0}^{M} \int_0^L \phi_m(t)\frac{de_m(x)}{dx} e_k(x)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi_k(t)}{dt} = -c\sum_{m=0}^{M} \int_0^L \phi_m(t)\frac{de_m(x)}{dx} e_k(x)\,dx \quad ; \ k = 0, 1, \dots, M$$

- opet imam M jdžbi sa M nepoznanica, a to su $\phi_m(t)$-ovi
- mogu derivacije razvit: $\dfrac{d\phi_m(t)}{dt} = \dfrac{\phi_m(t+\Delta t) - \phi_m(t)}{\Delta t}$ ; $m = 0, \dots, M$
- ovo općenito vrijedi za metode razvoja u red (i za spektralnu i za metodu konačnih elemenata!)

$$\boxed{\phi_m(t+\Delta t) = \phi_m(t) + \frac{d\phi_m(t)}{dt}\Delta t}$$

→ nakon što nađem derivaciju $\frac{d\phi_m(t)}{dt}$, mogu naći prognostičke koeficijente $\phi_m(t+\Delta t)$