Metode za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi

Sustavi nelinearnih jednadžbi:

Uvod

Neka je zadana nelinearna funkcija

$$f : I \to \mathbb{R},$$

gdje je I neki interval. Tražimo $x \in I$ za koji je

$$f(x) = 0.$$

Takve točke x zovu se

- rješenja ili korijeni pripadne jednadžbe,
- ili nultočke funkcije f.

Za sustave nelinearnih jednadžbi je $I \subset \mathbb{R}^n$.

Nelinearna jednadžba može imati više rješenja. Numeričke metode ne garantiraju pronalazak svih rješenja.

Neprekidnost funkcije f

Minimalni zahtjev na funkciju f je da je ona neprekidna na I.

Neprekidnost npr. garantira da iz uvjeta

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

slijedi da f ima nultočku na intervalu $[a, b]$.

Metoda bisekcije (raspolavljanja)

Najjednostavnija metoda nalaženja nultočaka funkcije je **metoda bisekcije** ili **raspolavljanja**.

Osnovna pretpostavka za početak algoritma bisekcije je da postoje točke $a, b \in I$ takve da vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

To znači da f ima na (a, b) **barem jednu** nultočku.

- Najbolja aproksimacija nultočke je sredina intervala:

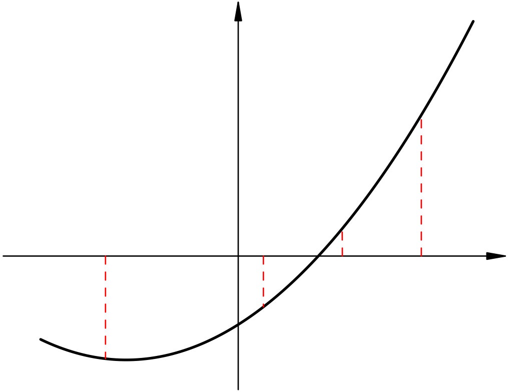
$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

- Ako je $f(x_0) = 0$ pronašli smo nultočku.

- Ako je $f(a) \cdot f(x_0) < 0$ nultočka je u intervalu (a, x_0)
- Ako je $f(a) \cdot f(x_0) > 0$ nultočka je u intervalu (x_0, b)
- Ponovimo postupak na intervalu (a, x_0) ili (x_0, b)

Metoda bisekcije grafički

Grafički, metoda bisekcije izgleda ovako



Konvergencija metode

Tvrdnja. Ako vrijede startne pretpostavke za metodu raspolavljanja, ona će konvergirati prema nekoj nultočki iz intervala $[a, b]$.

Iz konstrukcije metode, lako se izvodi pogreška n-te aproksimacije x_n nultočke α. Vrijedi:

$$\begin{aligned} |\alpha - x_n| &\leq b_n - x_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \\ &= \cdots = \frac{1}{2^{n+1}}(b - a). \end{aligned}$$

Sada je

$$\lim_{n \to \infty} |\alpha - x_n| = 0.$$

odnosno

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha.$$

Završne napomene

- Za primjenu metode bisekcije mora biti zadovoljeno
$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$
- Ako je
$$f(a) \cdot f(b) > 0,$$
to ne mora značiti da f nema nultočku unutar $[a, b]$.
- Može postojati nultočka parne višestrukosti (bez promjene predznaka).
- Može biti više nultočki s a da im je ukupna višestrukost paran broj.
- Boljom separacijom nultočaka možemo ćemo postići da je $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- Nultočke parnog reda nemoguće je direktno naći metodom bisekcije.
- Umjesto f, treba raditi s funkcijom f/f'.

Brzina konvergencije

Definirajmo sada brzinu konvergencije niza iteracija. Te iteracije mogu, ali ne moraju biti iteracije za računanje nultočke funkcije.

Definicija. Niz iteracija $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ **konvergira** prema točki α

- s **redom konvergencije** p, $p \geq 1$,

ako je p najveći broj takav da vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq c\,|\alpha - x_{n-1}|^p, \quad n \in \mathbb{N}$$

za neki $c > 0$.

Ako je $p = 1$, kažemo da niz konvergira **linearno** prema α. U tom je slučaju nužno da je $c < 1$ i obično se c naziva **faktor linearne konvergencije**. □

Prethodna definicija, katkad, nije zgodna za linearne iterativne algoritme.

Ako u prethodnoj formuli upotrijebimo indukciju za $p = 1$, $c < 1$, onda dobivamo da je

$$|\alpha - x_n| \leq c^n |\alpha - x_0|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Katkad će biti mnogo lakše pokazati ovu relaciju, nego onu iz definicije. I u ovom slučaju reći ćemo da niz iteracija konvergira linearno s faktorom c.

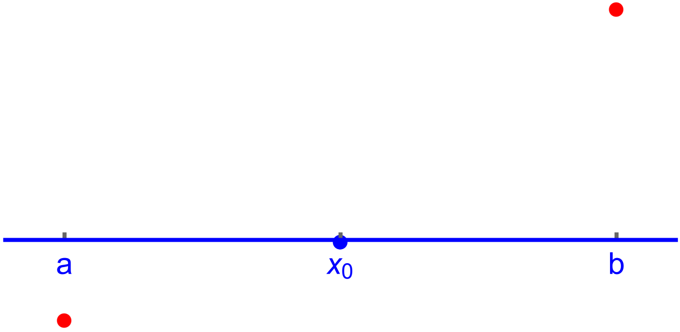
Metoda bisekcije konvergira linearno prema ovoj definiciji.

Regula falsi

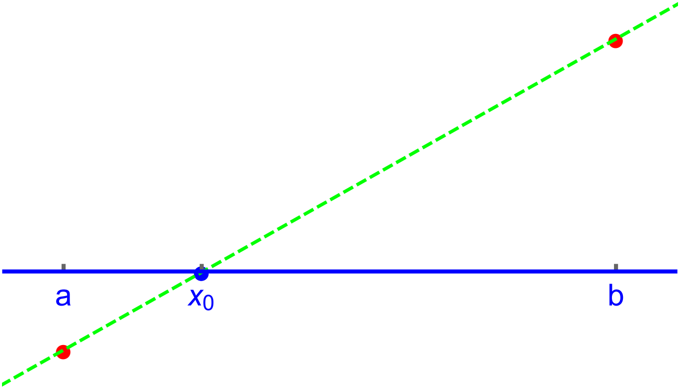
(metoda pogrešnog položaja)

Gdje se nalazi nultočka?

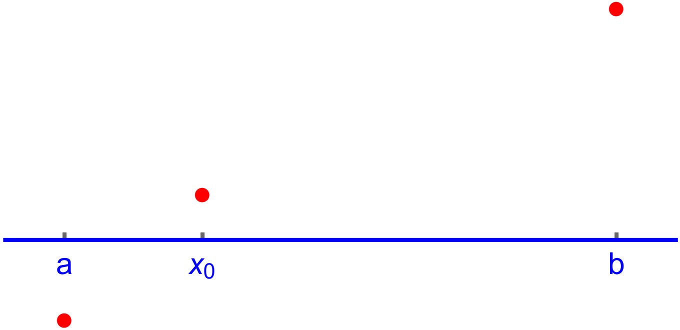
Metoda bisekcije:



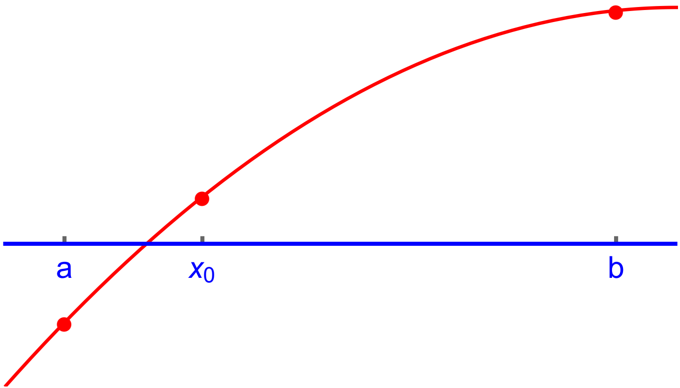
Možda ovako:



Sada nastavimo s a i x_0:

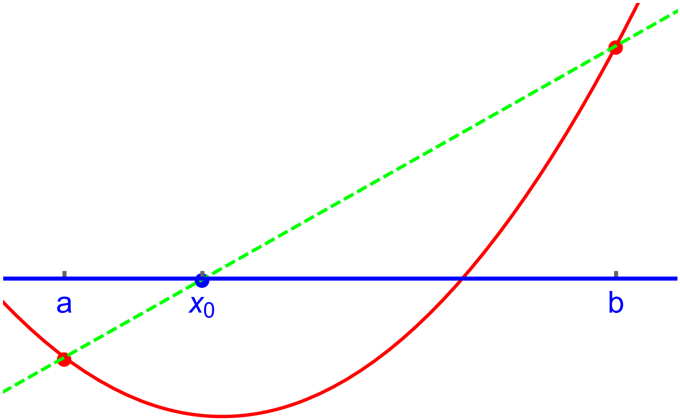


Funkcija izgleda ovako



Dobili smo manji interval nego s metodom bisekcije.

Ali je funkcija mogla izgledati i ovako



U ovom slučaju bi metoda bisekcije dala bolji rezultat.

Regula falsi (metoda pogrešnog položaja)

Pretpostavimo da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

- neprekidna na intervalu $[a, b]$
- u rubovima intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Ideja metode:
Aproksimiramo funkciju f pravcem koji prolazi točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

Traženu nultočku α tada možemo aproksimirati nultočkom tog pravca:

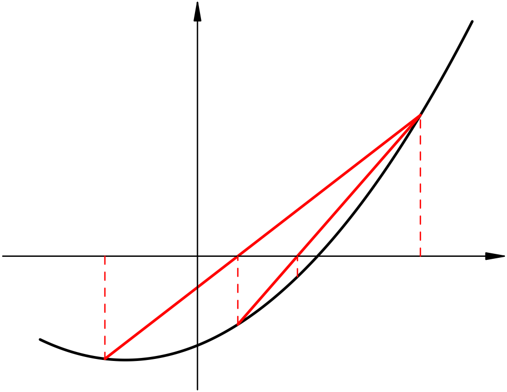
$$x_0 = b - f(b)\,\frac{b - a}{f(b) - f(a)}.$$

Nakon toga,

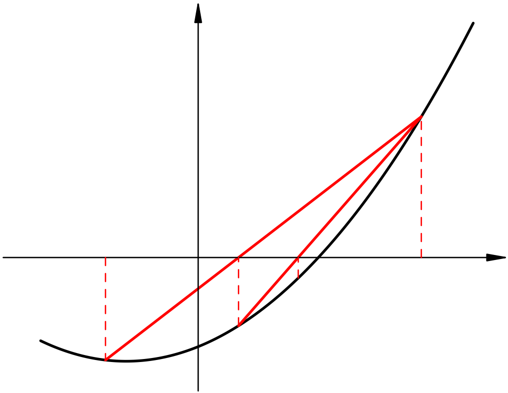
- pomaknemo ili točku a, ili točku b u točku x_0,
- ali tako da je nultočka ostala unutar novodobivenog intervala (test predznaka, kao kod raspolavljanja).

Postupak ponavljamo sve dok nismo postigli željenu točnost.

Grafički, regula falsi ili metoda pogrešnog položaja izgleda ovako



Uočite da širina intervala a_n, b_n u ovom slučaju ne ide u 0 iako niz aproksimacija konvergira (vjerojatno).



Regula falsi — osnovne ideje

Osnovne ideje metode su:

- aproksimacija pravcem
- i “zatvaranje” nultočke u određeni — sve manji interval.
- Iz slike zaključujemo da je to sasvim dobra ideja,
  za monotone i konveksne (ili konkavne) funkcije.

Nažalost, postoje ozbiljni problemi i s ovom metodom.

- Konvergencija je i dalje **linearna**, kao kod raspolavljanja.
- Može biti vrlo spora — sporija nego kod raspolavljanja.

Newtonova metoda (Metoda tangente, Newton-Raphsonova metoda)

Ideja metode: Za danu točku x_0

- povući tangentu na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$,

i definirati novu aproksimaciju x_1

- u točki gdje ta tangenta siječe os x.

Drugi pristup:

Funkciju f aproksimiramo u točki x_n Taylorovim polinomom 1. stupnja:

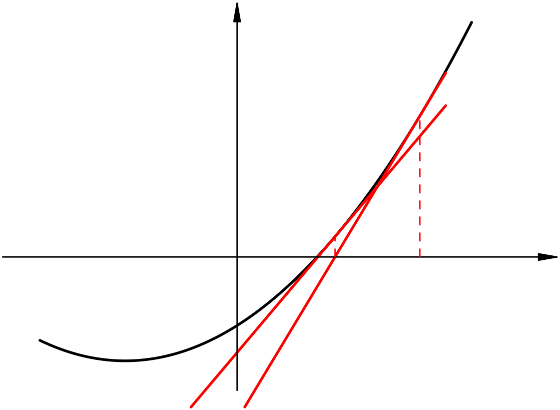
$$P(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Nultočku funkcije f aproksimiramo s nultočkom polinoma P:

$$P(x_{n+1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

Za računanje je dovoljno pretpostaviti da $f'(x_n)$ postoji (neprekidnost nije bitna) i da je $f'(x_n) \neq 0$ u svim točkama x_n.

Newtonova metoda



Konvergencija Newtonove metode

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i pretpostavimo da je $f \in C^2(I)$ na nekom segmentu I koji sadrži nultočku α.

Ako niz aproksimacija x_n generiran Newtonovom metodom konvergira prema α,

- onda je brzina konvergencije (barem) kvadratna,

i na limesu vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Dokaz. Za $x \in I$, dobivamo

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2,$$

pri čemu je ξ_n između x i x_n, tj. $\xi_n \in I$.

Uvrštavanjem nultočke $x = \alpha \in I$, dobivamo

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2.$$

Primjer divergencije Newtonove metode

Newtonova metoda ne garantira konvergenciju!

Primjer. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s $f(x) = \mathrm{arctg} x$. Tada je $\alpha = 0$ rješenje jednadžbe $f(x) = 0$.

Newtonove iteracije su definirane s

$$x_{m+1} = x_n - \left(1 + x_n^2\right) \mathrm{arctg} x.$$

Ako izaberemo x_0 tako da je

$$\mathrm{arctg}|x_0| > \frac{2|x_0|}{1 + x_0^2}$$

tada niz $(|x_n|)$ divergira:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty.$$

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Uz pretpostavku $f'(x_n) \neq 0$, slijedi

$$\begin{aligned} \alpha &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \\ &= x_{n+1} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \end{aligned}$$

Za greške u susjednim iteracijama vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

s tim da je ξ_n između x_n i α.

Po pretpostavci, niz x_n konvergira prema α.
Onda mora vrijediti i $\xi_n \to \alpha$.

Iz $f \in C^2(I)$ slijedi da su f' i f'' neprekidne na I, pa dobivamo

$$f'(x_n) \to f'(\alpha), \quad f''(\xi_n) \to f''(\alpha).$$

Na kraju, iz pretpostavke da je α jednostruka nultočka, slijedi $f'(\alpha) \neq 0$.

Prijelazom na limes $x_n \to \alpha$ dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

$\square$

Odavdje vidimo da je Newtonova metoda, **kad konvergira**,

- (barem) kvadratno konvergentna.

Ako je $f''(\alpha) = 0$, konvergencija može biti i brža od kvadratne!

Zaključak vrijedi

- samo ako je $f'(\alpha) \neq 0$, tj. α je jednostruka nultočka.

Za višestruke nultočke ovo ne vrijedi, jer

- konvergencija može biti i samo linearna (malo kasnije).

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i neka je

$$I_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| \leq \varepsilon\}$$

segment radijusa ε oko α.

Pretpostavimo da je $f \in C^2(I_\varepsilon)$ za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$. Definiramo brojeve

$$m_1(\varepsilon) := \min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|, \quad M_2(\varepsilon) := \max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|,$$

i, na kraju,

$$M(\varepsilon) := \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}.$$

Ako je ε toliko mali da vrijedi

$$2\varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

onda je, za bilo koju startnu točku $x_0 \in I_\varepsilon$,

- Newtonova metoda dobro definirana,
- i konvergira barem kvadratno prema jedinoj nultočki $\alpha \in I_\varepsilon$.

Napomena. Teorem kaže da postoji okolina I_ε oko nultočke α takva da je metoda konvergentna za svaki izbor $x_0 \in I_\varepsilon$ (uz uvjet da je $f'(\alpha) \neq 0$).

Dokaz. Zato što je α jednostruka nultočka, slijedi $f'(\alpha) \neq 0$. To znači

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{M_2(\varepsilon)}{m_1(\varepsilon)} = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right| < \infty,$$

pa postoji dovoljno mali $\varepsilon > 0$, takav da je $2\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

- Uočimo da je $f'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I_\varepsilon$ (jer je $M_2(\varepsilon)\, m_1(\varepsilon) < \infty$).
- α je jedina nultočka funkcije f u I_ε.
  $f' \neq 0$ pa je f strogo monotona.

Neka je $x_n \in I_\varepsilon$ bilo koja aproksimacija.

Onda je $f'(x_n) \neq 0$, i korak Newtonove metode je dobro definiran

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Relacija za greške dviju susjednih iteracija glasi

$$\alpha - x_{?n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

gdje je ξ_n između x_n i α, pa vrijedi i $\xi_0 \in I_\varepsilon$.

Za drugi faktor na desnoj strani onda vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Sada

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{n+1}| &\leq |\alpha - x_n|^2 \, M(\varepsilon) = (\text{ iskoristimo } |\alpha - x_n| \leq \varepsilon) \\ &\leq |\alpha - x_n| \, \varepsilon M(\varepsilon) = (\text{ zbog } \varepsilon M(\varepsilon) < 1/2 < 1) \\ &< |\alpha - x_0| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} \in I_\varepsilon.$$

Indukcijom slijedi da ako je $x_0 \in I_\varepsilon$ onda je i $x_n \in I_\varepsilon, \ \forall n$.

Preostaje još samo dokazati konvergenciju niza x_n prema α.

Relacija za greške dviju susjednih iteracija je

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

gdje je ξ_n između x_n i α, pa je $\xi_n \in I_\varepsilon$.

Za drugi faktor na desnoj strani opet vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Sada redom dobivamo

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{n+1}| &\leq |\alpha - x_n|^2 M(\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon M(\varepsilon) |\alpha - x_n| \\ &\leq \ldots \text{(induktivno spuštamo } n \text{ do nule)} \\ &\leq \big(\varepsilon M(\varepsilon)\big)^{n+1} |\alpha - x_0|. \end{aligned}$$

Zbog

$$\varepsilon M(\varepsilon) < 1/2 < 1$$

odavde slijedi da

$$x_n \to \alpha \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

$\square$

Globalna konvergencija Newtonove metode

U analizi konvergencije i ocjenama greške koristili smo pretpostavku da je

- f strogo monotona na $[a, b]$,
- tj. da prva derivacija f' ima fiksni predznak na $[a, b]$.

Ako i druga derivacija ima fiksni predznak na tom intervalu, onda možemo dobiti i

- globalnu konvergenciju Newtonove metode,
- uz odgovarajući izbor startne točke x_0,

slično kao kod regule falsi.

Teorem. Neka je $f \in C^2[a, b]$ i neka je $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ako prva i druga derivacija f' i f'' nemaju nultočku u $[a, b]$, tj.

- ako f' i f'' imaju konstantan predznak na $[a, b]$,

onda Newtonova metoda konvergira prema

- jedinstvenoj jednostrukoj nultočki α funkcije f u $[a, b]$,

i to za svaku startnu aproksimaciju $x_0 \in [a, b]$, za koju vrijedi

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Dokaz. Gledamo samo jedan od četiri moguća slučaja za predznake f' i f''.

BSO $f' > 0$ i $f'' > 0$ na $[a, b]$, tj. f je monotono rastuća i konveksna na $[a, b]$.

Zbog $f'' > 0$, startna aproksimacija x_0 mora zadovoljavati

$$f(x_0) > 0 \quad \text{tj.} \quad \alpha < x_0$$

jer f raste.

Neka je $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ niz iteracija generiran Newtonovom metodom iz bilo koje startne točke x_0 za koju je $f(x_0) > 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Indukcijom pokažimo da je

$$\alpha < x_{n+1} \leq x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Jer je $f(x_n) > 0$ i $f' > 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$$

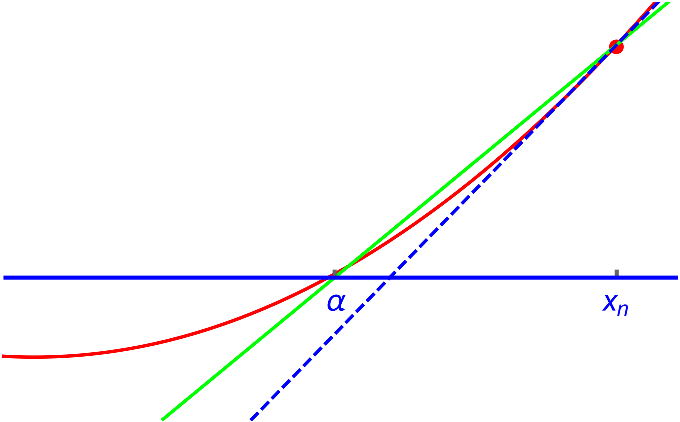
što pokazuje da niz (x_n) monotono pada.

Neka je $x_n > \alpha$. Tada

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \alpha &= x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \\ &= x_n - \alpha - \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha} \frac{x_n - \alpha}{f'(x_n)} \\ &= (x_n - \alpha) \left[1 - \frac{\frac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha}}{f'(x_n)} \right] \end{aligned}$$

Argument: slično kao u regula falsi, koeficijent smjera sekante manji je od koeficijenta smjera tangente:

$$\frac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha} < f'(x_n) \quad \text{tj.} \quad 1 - \frac{\frac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha}}{f'(x_n)} > 0.$$



Tangenta je strmija od sekante:

$$0 < \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha} < f'(x_n)$$

Sada je

$$x_{n+1} - \alpha = (x_n - \alpha)\left[1 - \frac{\frac{f(x_n)-f(\alpha)}{x_n-\alpha}}{f'(x_n)}\right] > 0$$

tj.

$$x_{n+1} > \alpha.$$

(x_n) padajući i odozdo ograničen s α

$\Rightarrow$ (x_n) konvergentan

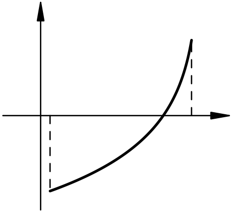
$\Rightarrow$ (prije dokazano) $\lim_n x_n = \alpha$. $\square$

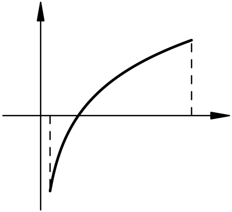
Izbor startne točke za Newtonovu metodu

Ako pogledamo graf funkcije f na $[a, b]$, startnu točku x_0

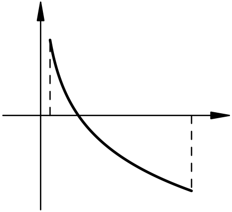
- treba odabrati na "strmijoj" strani grafa funkcije.

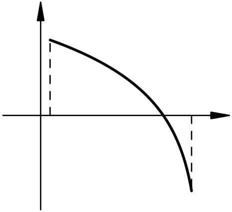
Izbor startne točke x_0 ako je $f' > 0$.





Izbor startne točke x_0 ako je $f' < 0$.





Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Pretpostavimo da sve iteracije x_n leže unutar intervala $[a, b]$.
Onda možemo dobiti i ocjenu

- lokalne greške susjednih iteracija u Newtonovoj metodi,

u terminima veličina M_2 i m_1.

Iz ranije relacije za grešku

$$\alpha - x_n = -(\alpha - x_{n-1})^2 \, \frac{f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})},$$

gdje je ξ_{n-1} između nultočke α i x_{n-1}, odmah slijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} \, (\alpha - x_{n-1})^2.$$

Ova ocjena nije naročito korisna za praksu, jer nultočku α ne znamo.
Tražimo ocjenu preko veličina koje znamo izračunati.

Za dvije susjedne iteracije x_{n-1} i x_n u Newtonovoj metodi vrijedi

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \\ &\qquad + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2, \end{aligned}$$

pri čemu je ξ_{n-1} između x_{n-1} i x_n.

Jer je

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

slijedi

$$f(x_n) = \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Iz $x_{n-1}, x_n \in [a, b]$, pa onda i $\xi_{n-1} \in [a, b]$ dobivamo

$$|f(x_n)| \leq \frac{M_2}{2}\,(x_n - x_{n-1})^2.$$

Kao i kod metode bisekcije, ako je $m_1 > 0$, vrijedi ocjena

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Kombinacijom ovih ocjena dobivamo

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}\,(x_n - x_{n-1})^2.$$

Ako je ε tražena točnost, onda zahtjev

$$\frac{M_2}{2m_1}\,(x_n - x_{n-1})^2 \leq \varepsilon$$

garantira da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, do na greške zaokruživanja.
Uz ovaj, možemo koristiti i raniji test zaustavljanja

$$|f(x_n)| \leq m_1\varepsilon.$$

Metoda sekante

- U Newtonovoj metodi koristimo **tangentu** u točki x_0 kao aproksimaciju funkcije f.
- Ako umjesto tangente koristimo **sekantu** u točkama x_0 i x_1 $\longrightarrow$ metoda sekante
- Za razliku od metode regula falsi, ne provjeravamo predznake!
- Dakle. zadnje dvije aproksimacije definiraju sekantu i nova aproksimacija je nultočka sekante.

Iz početnih x_0 i x_1 generiramo niz (x_n).

Sekanta definirana s x_{n-1} i x_n je

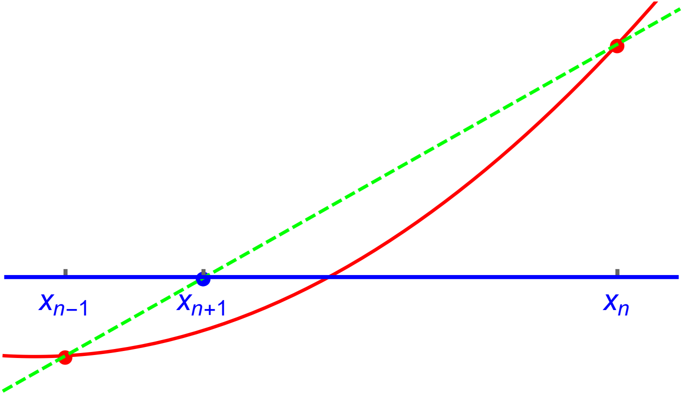
$$P(x) = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n).$$

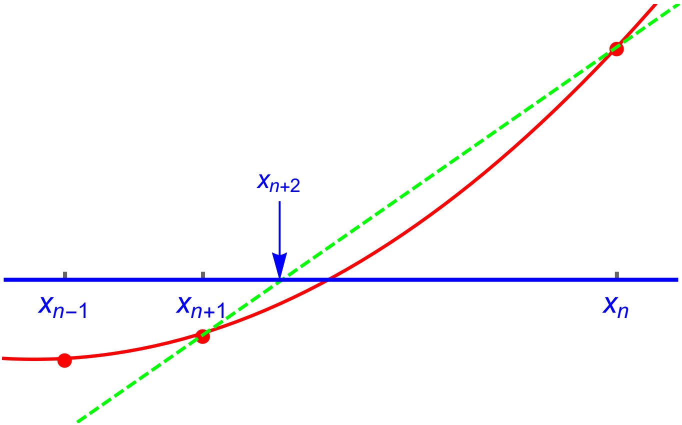
Nova aproksimacija je nultočka sekante.

Metoda sekante:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n > 1.$$

Metoda sekante — grafički





Primijetite da je nultočka ne nalazi u intervalu $[x_{n+1}, x_{n+2}]$.

Red konvergencije metode sekante

Red konvergencije metode sekante je

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$$

Između linearne i kvadratične konvergencije.

- Newtonova metoda - $p = 2$ uz računanje vrijednosti funkcije i derivacije
- metoda sekante - $p = 1.618$ uz jedno računanje vrijednosti funkcije
- u dva koraka metode sekante dva puta računamo funkciju $\to$ približno ista složenost kao Newtonova metoda.
- U dva koraka metode sekante dobijemo red $q^2 = q + 1 = 2.618$ - bolje nego Newtonova metoda!

Sustavi nelinearnih jednadžbi - Newtonova metoda

Izvor: J. Stoer, R. Bulirsch,
'Introduction to Numerical Analysis', 2nd ed.,Springer-Verlag

Neka su $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ dane funkcije.

Tražimo rješenje sustava jednadžbi

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0.
\end{aligned}
$$

Sustav možemo zapisati u obliku:

$$F(x) = 0,$$

gdje je

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}.$$

Jacobijan

Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je diferencijabilna u točki $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ako postoji $n \times n$ matrica A za koju je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

$A \;\to\;$ Jacobijeva matrica Df (J_f) u x_0.

$$Df(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i,j}$$

Lema. Ako Df postoji za svaki x iz konveksnog područja $C_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ i ako postoji konstanta γ za koju je

$$\|Df(x) - Df(y)\| \leq \gamma \|x - y\| \quad \forall x, y \in C_0,$$

tada za svaki $x, y \in C_0$ vrijedi ocjena

$$\|f(x) - f(y) - Df(y)(x - y)\| \leq \frac{\gamma}{2} \|x - y\|^2 .$$

Newtonova metoda za sustav jednadžbi

Funkciju f u točki x_k aproksimiramo s

$$P(x) = f(x_k) + Df(x_k)\,(x - x_k).$$

Nova aproksimacija x_{k+1} je nultočka funkcije P:

$$x_{k+1} = x_k - [Df(x_k)]^{-1}\, f(x_k).$$

Ovo je **Newtonova metoda** za sustav nelinearnih jednadžbi.

Napomena. U iteracijama ne računamo inverz matrice $Df(x_n)$ već rješavamo sustav

$$Df(x_k)\,(x - x_k) = -f(x_k).$$

Kvadratična konvergencija

Teorem. Neka je $C \subseteq \mathbb{R}^n$ dan otvoren skup. Nadalje, neka je C_0 konveksni skup i $\bar{C}_0 \subset C$ te neka je $f : C \to \mathbb{R}^n$ funkcija koja je diferencijabilna na C_0 i neprekidna na C. Neka su za neki $x_0 \in C_0$ dane pozitivne konstante sa sljedećim svojstvima:

$$\begin{aligned} S_r(x_0) &= \{x \mid \| x - x_0 \| < r\} \subseteq C_0, \\ h &= \frac{\alpha\beta\gamma}{2} < 1, \\ r &= \frac{\alpha}{1-h}, \end{aligned}$$

i neka $f(x)$ zadovoljava

a) $\|Df(x) - Df(y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C_0,$

b) $Df(x)^{-1}$ postoji i zadovoljava $\left\|Df(x)^{-1}\right\| \leq \beta, \quad \forall x \in C_0$

c) $\left\|Df(x_0)^{-1} f(x_0)\right\| \leq \alpha.$

Tada

1. Počevši od x_0, svaka točka
$$x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1} f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$
je dobro definirana i zadovoljava $x_k \in S_r(x_0)$ za sve $k \geq 0$.

2. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha$ postoji i zadovoljava $\alpha \in \overline{S_r(x_0)}$ i $f(\alpha) = 0$.

3. Za sve $k \geq 0$ je
$$\|x_k - \alpha\| \leq \alpha \frac{h^{2k-1}}{1 - h^{2k}}.$$
Jer je $0 < h < 1$, Newtonova metoda je konvergentna najmanje kvadratično.

Uz malo jače uvjete, nultočka je jedinstvena.

Teorem. (Newton-Kantorovich) Neka je dana funkcija $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i konveksni skup $C_0 \subseteq C$ te neka je f neprekidno diferencijabilna na C_0 i zadovoljava uvjete

a) $\|Df(x) - Df(y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C_0,$

b) $\left\|Df(x_0)^{-1} f(x_0)\right\| \leq \alpha$

c) $\left\|Df(x_0)^{-1}\right\| \leq \beta,$

za neki $x_0 \in C_0$. Definirajmo

$$\begin{aligned} h &= \alpha\beta\gamma, \\ r_{1,2} &= \frac{1 \mp \sqrt{1 - 2h}}{h}\alpha. \end{aligned}$$

Ako je $h \leq \frac{1}{2}$ i $\overline{S_{r_1}(x_0)} \subset C_0$ tada se niz (x_k) definiran s

$$x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1} f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

nalazi u $S_{r_1}(x_0)$ i konvergira k jedinstvenoj nultočki funkcije f u $C_0 \cap S_{r_2}(x_0)$.

Jednostavne iteracije

Osnovna ideja:

Jednadžbu

$$f(x) = 0$$

zapišemo u ekvivalentnom obliku obliku

$$x = \varphi(x).$$

Ekvivalentno znači: $f(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \varphi(\alpha)$.

Metoda jednostavnih iteracija: Za zadani x_0 definiramo niz

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0.$$

Osnovno pitanje: kada niz (x_n) konvergira i da li je $\lim_n x_n = \alpha$'

Primjer. Reformulirajmo problem

$$x^2 - a = 0, \quad a > 0$$

u oblik jednostavne iteracije.

Na primjer, to možemo napraviti na jedan od sljedećih načina:

1. $x = x^2 + x - a$, ili općenitije $x = x + c(x^2 - a)$ za neki $c \neq 0$,
2. $x = a/x$,
3. $x = 0.5\,(x + a/x)$.

Primjer. Newtonova metoda, također, pripada klasi jednostavnih iteracija, jer je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Osnovni teoremi

Rješenje jednadžbe

$$x = \varphi(x).$$

se naziva fiksna točka.

Lema. Neka je funkcija φ neprekidna na $[a, b]$ i neka je

$$\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$$

Tada problem $x = \varphi(x)$ ima barem jedno rješenje na $[a, b]$.

Dokaz. Za neprekidnu funkciju $\varphi(x) - x$ na $[a, b]$ zbog $a \leq \varphi(x) \leq b, \quad \forall x \in [a, b]$, vrijedi

$$\varphi(a) - a \geq 0, \quad \varphi(b) - b \leq 0.$$

Dakle, funkcija $\varphi(x) - x$ je promijenila predznak na $[a, b]$, a to može samo prolaskom kroz nultočku (neprekidna je!).

Lema. (Banachov teorem o fiksnoj točki) Neka je funkcija φ neprekidna na $[a, b]$ i neka je

$$\varphi([a, b]) \subseteq [a, b].$$

Nadalje, pretpostavimo da postoji konstanta q, takva da je $0 < q < 1$ i vrijedi

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q\,|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Tada $x = \varphi(x)$ ima jedinstveno rješenje α unutar $[a, b]$. Također, niz iteracija

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0$$

konvergira prema α za proizvoljni $x_0 \in [a, b]$.

Napomena. Za funkciju φ koja zadovoljava

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q\,|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}.$$

kažemo da je Lipshitz neprekidna ili da zadovoljava Lipshitzov uvjet.

Ukoliko je $q \in [0, 1)$ tada kažemo da je φ **kontrakcija**.

Dokaz. Prema prethodnoj lemi, postoji barem jedno rješenje $\alpha \in [a, b]$.

Kada bi postojalo i drugo rješenje $\beta \neq \alpha$

$$\varphi(\alpha) = \alpha \quad \text{i} \quad \varphi(\beta) = \beta,$$

tada bi

$$|\alpha - \beta| = |\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)| \leq q|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|.$$

što je kontradikcija.

Rješenje je jedinstveno.

Konvergencija. Neka je $x_0 \in [a, b]$ proizvoljan.

Jednostavnom indukcijom slijedi

$$|\alpha - x_n| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x_{n-1})| \leq q|\alpha - x_{n-1}| \leq \ldots \leq q^n|\alpha - x_0|,$$

za $n \geq 1$.

Ako pustimo $n \to \infty$, onda $q^n \to 0$, pa vrijedi $x_n \to \alpha$. $\square$

Primijetimo da posljednja formula znači da jednostavna iteracija konvergira linearno s faktorom q.

Lema vrijedi i na $\mathbb{R}^n$!

Ako je φ derivabilna na $[a, b]$, onda je

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y), \quad \xi \text{ između } x \text{ i } y,$$

za sve $x, y \in [a, b]$. Definiramo

$$q := M_1 = \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)|,$$

onda možemo pisati

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad \forall x \in [a, b].$$

Ukoliko je $q < 1$ možemo primijeniti prethodnu lemu.

Teorem. Neka je $\varphi \in C^1[a,b]$ takva da je $\varphi([a,b]) \subseteq [a,b]$ i neka je

$$q := M_1 = \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)| < 1.$$

Tada vrijedi:

1. $x = \varphi(x)$ ima točno jedno rješenje $\alpha \in [a,b]$,
2. za proizvoljni $x_0 \in [a,b]$ i jednostavne iteracije $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \geq 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= \alpha, \\
|\alpha - x_n| &\leq q^n |\alpha - x_0| \\
\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} &= \varphi'(\alpha).
\end{aligned}$$

Dokaz. Jednostavno iz prethodne leme.

Ocjena greške

Za dvije susjedne iteracije vrijedi

$$\begin{aligned}
|x_n - x_{n-1}| &= |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})| \\
&= |\varphi'(\xi_{n-1})|\,|x_{n-1} - x_{n-2}| \\
&\leq q|x_{n-1} - x_{n-2}| \\
&\vdots \\
&\leq q^{n-1}|x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

pri čemu je $\xi_{n-1} \in I[x_{n-2}, x_{n-1}]$.

Sada promatrajmo ponašanje sljedećeg niza

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - \cdots + x_{n+1} - x_n| \\
&\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq q^p |x_n - x_{n-1}| + \cdots + q|x_n - x_{n-1}| \\
&= q\frac{1-q^p}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = (\text{vrijedi } 1 - q^p \leq 1) \\
&\leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|.
\end{aligned}
$$

Na limesu za $p \to \infty$ vrijedi $x_{n+p} \to \alpha$, pa

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

Teorem o konvergenciji možemo napisati i malo drugačije.

Teorem. Neka je α rješenje problema $x = \varphi(x)$ i neka je φ neprekidno diferencijabilna na nekoj okolini od α i neka je $|\varphi'(\alpha)| < 1$. Tada vrijede svi rezultati prethodnog teorema, uz pretpostavku da je x_0 dovoljno blizu α.

Dokaz. Po pretpostavci postoji $\varepsilon > 0$ i $I = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ takav da je

$$\max_{x \in I} |\varphi'(x)| \leq q < 1.$$

Tada je $\varphi(I) \subseteq I$, jer $|\alpha - x| \leq \varepsilon$ povlači

$$|\alpha - \varphi(x)| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x)| = |\varphi'(\xi)||\alpha - x| \leq q|\alpha - x| \leq \varepsilon.$$

Sada možemo primijeniti prethodni teorem za $[a, b] = I$. $\square$

Primjer iteracijskih funkcija

Primjer. Za problem $x^2 - a = 0$, $a > 0$ definirali smo tri jednostavne iteracijske funkcije:

1. $x = x^2 + x - a$, ili općenitije $x = x + c(x^2 - a)$ za neki $c \neq 0$,

   $\varphi(x) = x^2 + x - a \quad \to \quad \varphi'(x) = 2x + 1$ i u nultočki $\alpha = \sqrt{a}$ je
   $$\varphi'(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a} + 1 > 1,$$
   - iteracijska funkcija neće konvergirati.

   U općenitijem je slučaju $\varphi(x) = x + c(x^2 - a)$, pa je
   $$\varphi'(x) = 1 + 2cx \quad \to \quad \varphi'(\sqrt{a}) = 1 + 2c\sqrt{a}.$$
   Da bismo osigurali konvergenciju, mora biti
   $$-1 < 1 + 2c\sqrt{a} < 1, \quad \text{odnosno} \quad -\frac{1}{\sqrt{a}} < c < 0.$$

2. $x = a/x$,

$$\varphi(x) = a/x \quad \to \quad \varphi'(x) = -a/x^2, \quad \text{pa je}$$

$$\varphi'(\sqrt{a}) = -1,$$

- iteracijska funkcija neće konvergirati.

3. $x = 0.5\,(x + a/x)$.

$$\varphi(x) = 0.5\,(x + a/x) \quad \to \quad \varphi'(x) = 0.5\,(1 - a/x^2), \quad \text{pa je}$$

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 0,$$

- iteracijska funkcija konvergira u okolini nultočke $\alpha = \sqrt{a}$.

Posljednja iteracijska funkcija je Newtonova metoda za $x^2 - a = 0$, a poznavali su ju još Babilonci.

Primjeri
Numerički red konvergencije

Red konvergencije niza iteracija $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ koji konvergira prema nultočki α je najveći eksponent p, $p \geq 1$, za koji vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - x_{n-1}|}{|\alpha - x_{n-2}|^p} = c > 0,$$

gdje je x_n niz iteracija generiran nekom metodom, uz neki start dovoljno blizu nultočke.

Kako iz niza (x_n) procijeniti p?

α je nepoznat.

Ako smo dovoljno blizu nultočke α (k dovoljno velik),

$$|\alpha - x_k| \approx c|\alpha - x_{k-1}|^p,$$

U usporedbi tri aproksimacij x_{n-2}, x_{n-1} i x_n je $\alpha \approx x_n$ pa vrijedi i

$$
\begin{aligned}
|x_n - x_{n-1}| &= c_n |x_n - x_{n-2}|^{p_n}, \\
|x_n - x_{n-2}| &= c_n |x_n - x_{n-3}|^{p_n},
\end{aligned}
$$

- očekujemo da je $p_n \approx p$ i $c_n \approx c$ za dovoljno velike n.

Podijelimo

$$
\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|} = \left(\frac{|x_n - x_{n-2}|}{|x_n - x_{n-3}|} \right)^{p_n},
$$

i

$$
p_n = \frac{\log |x_n - x_{n-1}| - \log |x_n - x_{n-2}|}{\log |x_n - x_{n-2}| - \log |x_n - x_{n-3}|}.
$$

Numerički primjer

Primjer 1. Tražimo nultočku funkcije

$$f(x) = x^3 - 1.5.$$

Nije teško locirati nultočku $\alpha \in [1, 2]$:

$$f(1) = -0.5 < 0, \quad f(2) = 6.5 > 0.$$

f strogo rastuća, po dijelovima konveksna/konkavna, jedinstvena nultočka

Svo računanje je provedeno u preciznosti `extended`.

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$

$$z := f(a_n) \cdot f(x_n).$$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	z_n
0	1.000000000	2.000000000	1.500000000	1.875000000	< 0
1	1.000000000	1.500000000	1.250000000	0.453125000	< 0
2	1.000000000	1.250000000	1.125000000	-0.076171875	> 0
3	1.125000000	1.250000000	1.187500000	0.174560547	< 0
4	1.125000000	1.187500000	1.156250000	0.045806885	< 0
5	1.125000000	1.156250000	1.140625000	-0.016017914	> 0
6	1.140625000	1.156250000	1.148437500	0.014684200	< 0
7	1.140625000	1.148437500	1.144531250	-0.000719249	> 0
8	1.144531250	1.148437500	1.146484375	0.006969355	< 0
9	1.144531250	1.146484375	1.145507813	0.003121776	< 0
10	1.144531250	1.145507813	1.145019531	0.001200444	< 0
11	1.144531250	1.145019531	1.144775391	0.000240393	< 0
12	1.144531250	1.144775391	1.144653320	-0.000239479	> 0
13	1.144653320	1.144775391	1.144714355	0.000000444	< 0

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$

n	a	b	x	$f(x)$	z
14	1.144653320	1.144714355	1.144683838	-0.000119521	> 0
15	1.144683838	1.144714355	1.144699097	-0.000059539	> 0
16	1.144699097	1.144714355	1.144706726	-0.000029548	> 0
17	1.144706726	1.144714355	1.144710541	-0.000014552	> 0
18	1.144710541	1.144714355	1.144712448	-0.000007054	> 0
19	1.144712448	1.144714355	1.144713402	-0.000003305	> 0
20	1.144713402	1.144714355	1.144713879	-0.000001431	> 0
21	1.144713879	1.144714355	1.144714117	-0.000000493	> 0
22	1.144714117	1.144714355	1.144714236	-0.000000025	> 0
23	1.144714236	1.144714355	1.144714296	0.000000210	< 0
24	1.144714236	1.144714296	1.144714266	0.000000092	< 0
25	1.144714236	1.144714266	1.144714251	0.000000034	< 0
26	1.144714236	1.144714251	1.144714244	0.000000005	< 0
27	1.144714236	1.144714244	1.144714240	-0.000000010	

Izračunata rješenja su (ispisane sve znamenke):

- za točnost 10^{-8} rješenje je $x_{27} = 1.14471423998475075$,
- za točnost 10^{-18} rješenje je $x_{50} = 1.14471424255333210$.

Na prethodne dvije folije:

- vidi se spora konvergencija metode (broj vodećih nula u $f(x_n)$ se, uglavnom, linearno povećava),
- ponegdje, kao u x_{13}, dolazi do čudnog povećanja broja vodećih nula u $f(x_n)$.

  Objašnjenje: slučajno smo u raspolavljanju stigli blizu nultočke, iako je duljina intervala još uvijek prevelika.

Uočite broj iteracija potreban za odgovarajuću točnost!

Newtonova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	0.541666666666667
1	1.458333333333333	1.601490162037037	0.251009070294785
2	1.207324263038549	0.259834330619978	0.059419284771986
3	1.147904978266562	0.012578134527712	0.003181874908824
4	1.144723103357739	0.000034833084971	0.000008860735819
5	1.144714242621919	0.000000000269625	0.000000000068587
6	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
7	1.144714242553332	0.000000000000000	

Nultočka ispisana na sve izračunate znamenke je
$x_7 = 1.1447142425533187$.

Newtonova metoda, kvadratna konvergencija

Gledamo li korekcije napisane u znanstvenoj notaciji, vidimo područje kvadratne konvergencije, gdje se broj točnih znamenki u svakom koraku udvostručava.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E+00	5.416666667E−01
1	1.4583333333333333	1.60149016204E+00	2.510090703E−01
2	1.2073242630385487 5	2.59834330620E−01	5.941928477E−02
3	1.1479049782665624 5	1.25781345277E−02	3.181874909E−03
4	1.1447231033577387 0	3.48330849709E−05	8.860735819E−06
5	1.1447142426219193 3	2.69625000386E−10	6.858746179E−11
6	1.1447142425533318 7	1.08420217249E−19	2.758003708E−20
7	1.1447142425533318 7	1.08420217249E−19	

Isti smo zaključak mogli vidjeti i bez znanstvene notacije — pogledajte kako se povećava broj vodećih nula u korekciji.

Newtonova m., numerički red konvergencije

n	x	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.4583333333333333	—	—
2	1.2073242630385487	—	—
3	1.1479049782665624	1.63738	4.03440E−01
4	1.1447231033577387	1.84894	5.34225E−01
5	1.1447142426219193	1.97750	7.64767E−01
6	1.1447142425533318	1.99937	8.67206E−01
7	1.1447142425533318	—	—

Metoda sekante, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za metodu sekante potrebne su dvije startne točke i to su $x_0 = 2$ i $x_1 = 1.5$, a izračunata nultočka x_{10} ima sve znamenke jednake aproksimaciji x_7 izračunatoj Newtonovom metodom.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	
1	1.500000000000000	1.875000000000000	0.202702702702703
2	1.297297297297297	0.683325765502537	0.116233090792778
3	1.181064206504520	0.147481413791545	0.031991044609771
4	1.149073161894749	0.017200732670849	0.004223722208545
5	1.144849439686204	0.000531537856385	0.000134683664909
6	1.144714756021295	0.000002018501023	0.000000513407324
7	1.144714242613971	0.000000000238377	0.000000000060639
8	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
9	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
10	1.144714242553332	0.000000000000000	

M. sekante, numerički red konvergencije

Red konvergencije metode sekante je $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.6180$, a numerički red konvergencije ga dobro aproksimira.

n	x	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.5000000000000000	—	—
2	1.2972972972972973 0	—	—
3	1.1810642065045196 2	1.07039	3.94966E−01
4	1.1490731618947491 0	1.77904	9.54986E−01
5	1.1448494396862038 9	1.49493	6.02649E−01
6	1.1447147560212947 4	1.63923	9.97717E−01
7	1.1447142426139705 0	1.60467	8.29830E−01
8	1.1447142425533319 0	1.62274	9.74858E−01
9	1.1447142425533318 7	1.61618	8.86501E−01
10	1.1447142425533318 7	—	—

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Primjer 2. Nultočka funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

je $x = 0$, ali Newtonova metoda neće konvergirati iz svake startne točke x_0.

- Sigurnu konvergenciju ne možemo osigurati, jer f'' mijenja znak baš u nultočki.

Naći ćemo točku β za koju vrijedi

$$\begin{cases} |x_0| < |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ konvergira,} \\ |x_0| > |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ divergira,} \\ |x_0| = |\beta| \Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ ciklira.} \end{cases}$$

Kako ćemo naći točku “cikliranja”? Funkcija $f(x) = \text{arctg}x$ je neparna, pa je dovoljno da

- tangenta na f u točki β presiječe os x u točki $-\beta$.

Jednadžba tangente na arctg u točki β je

$$y - \text{arctg}\beta = \frac{1}{1+\beta^2}(x-\beta),$$

pa će tangenta sjeći os x u $-\beta$, ako je

$$\text{arctg}\beta = \frac{2\beta}{1+\beta^2},$$

čime smo dobili nelinearnu jednadžbu po β.

Zbog neparnosti, postoje dva rješenja, suprotnih predznaka, i možemo ih izračunati metodom bisekcije

$$\beta = \pm 1.39174520027073489.$$

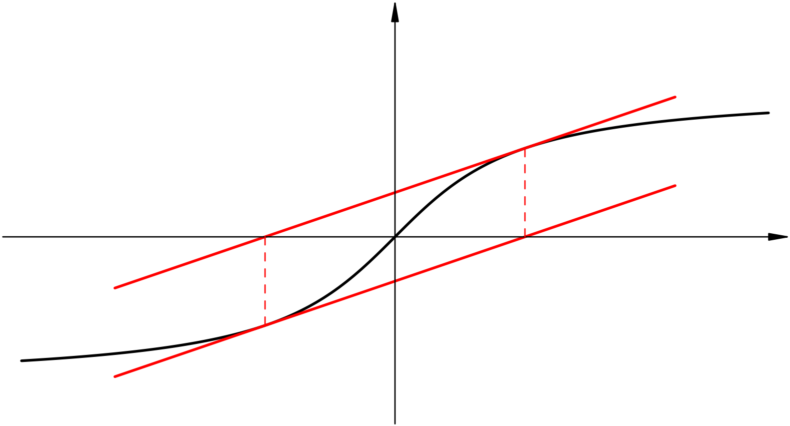
Pokažimo ponašanje Newtonove metode ako je startna točka

$$x_0 = \beta, \quad 1, \quad 1.5,$$

a zaustavljamo se, ili ako postignemo točnost 10^{-10}, ili nakon najviše 10 iteracija.

Primjer cikliranja Newtonove metode

Za $x_0 = \beta$ graf je



Primjer cikliranja Newtonove metode (nast.)

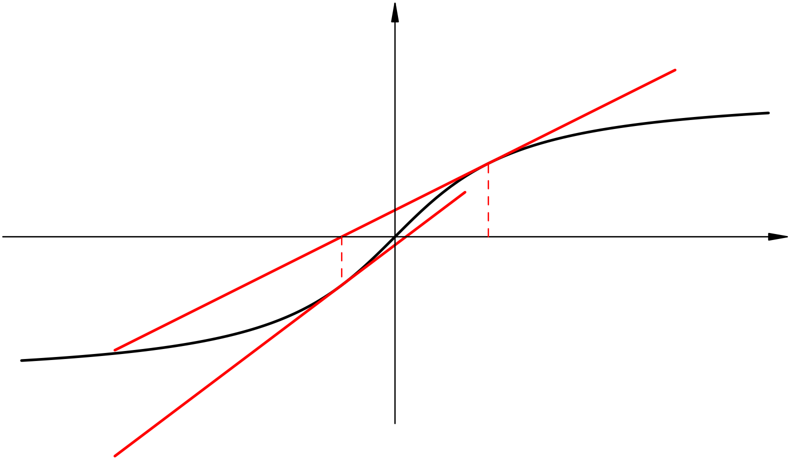
Točnost nije postignuta nakon 10 iteracija.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541470
1	−1.391745200270735	−0.947747133516990	−2.783490400541470
2	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541469
3	−1.391745200270734	−0.947747133516990	−2.783490400541468
4	1.391745200270734	0.947747133516990	2.783490400541466
5	−1.391745200270732	−0.947747133516989	−2.783490400541459
6	1.391745200270727	0.947747133516988	2.783490400541440
7	−1.391745200270713	−0.947747133516983	−2.783490400541391
8	1.391745200270678	0.947747133516971	2.783490400541262
9	−1.391745200270584	−0.947747133516939	−2.783490400540922
10	1.391745200270337	0.947747133516939	

Zbog malih grešaka zaokruživanja metoda bi konvergirala.

Primjer konvergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1$ graf je



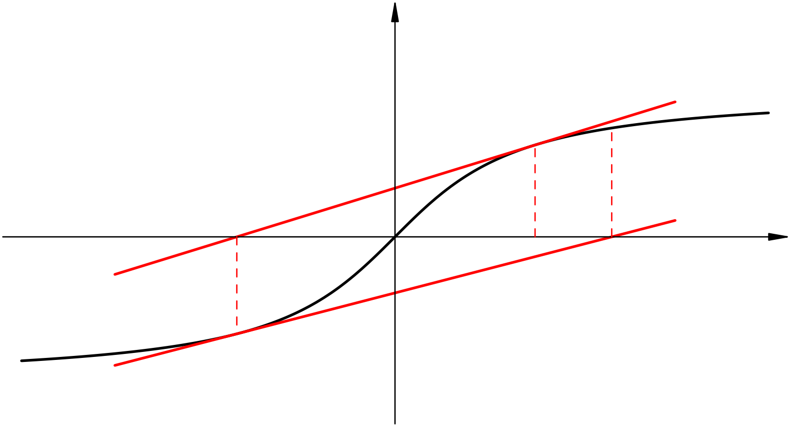
Točnost se postiže nakon 6 iteracija.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.000000000000000	0.785398163397448	1.570796326794897
1	−0.570796326794897	−0.518669369255017	−0.687656230793810
2	0.116859903998913	0.116332265113896	0.117920926115958
3	−0.001061022117045	−0.001061021718890	−0.001061022913354
4	0.000000000796310	0.000000000796310	0.000000000796310
5	−0.000000000000000	−0.000000000000000	−0.000000000000000
6	0.000000000000000	−0.000000000000000	

Metoda kvadratno konvergira, ali ne konvergira monotono prema nultočki.

Primjer divergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1.5$ graf je



Metoda divergira, ali $f(x)$ konvergira prema $\pm\frac{\pi}{2}$.

n	x	$f(x)$	korekcija
0	1.5000000000E+000	0.9827937232473	3.1940796006E+000
1	−1.6940796006E+000	−1.0375463591379	−4.0152065620E+000
2	2.3211269614E+000	1.1640020424220	7.4352147982E+000
3	−5.1140878368E+000	−1.3776945287028	−3.7409771751E+001
4	3.2295683914E+001	1.5398423269080	1.6076126347E+003
5	−1.5753169508E+003	−1.5701615339901	−3.8965513247E+006
6	3.8949760078E+006	1.5707960700539	2.3830292869E+013
7	−2.3830288974E+013	−1.5707963267949	−8.9202801611E+026
8	8.9202801611E+026	1.5707963267949	1.2499045994E+054
9	−1.2499045994E+054	−1.5707963267949	−2.4539946375E+108
10	2.4539946375E+108	1.5707963267949	