Numeričko rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi

Vježbe

Zadatak

Neka je (x_k) niz koji zadovoljava

$$|\alpha - x_k| \leq a \frac{h^{2^k - 1}}{1 - h^{2^k}},$$

za neke $a > 0$ i $0 < h < 1$.
Pokažite da niz (x_k) konvergira prema α barem kvadratično.

Zadatak

Pretpostavite da je $f \in C^2(\mathbb{R})$ i f'' je Lipshitz neprekidna. Nadalje, neka je $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ i $f''(\alpha) \neq 0$
Pokažite da iterativna metoda

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

konvergira barem kvadratično prema α ukoliko je x_0 dovoljno blizu (ali ne jednak) α.

Zadatak

Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirana s

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 - 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Uočite da je $\zeta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ nultočka funkcije f.

Promatrajmo iteracije

$$x_{n+1} = x_n - A\,f(x_n), \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Pokažite da $x_n \to \zeta$ ukoliko je x_0 dovoljno blizu ζ.
(b) Pokažite da je konvergencija najmanje kvadratična.
(c) Jesu li ove iteracije ekvivalentne Newtonovoj metodi?

Zadatak

Primijenite metodu iz prethodnog zadatka na traženje nultočke funkcije

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)^2.$$

Odredite numerički red konvergencije.
Usporedite ovu metodu s Newtonovom metodom i metodom sekante.
Odredite numerički red konvergencije i za ove dvije metode na ovom primjeru.

Zadatak

Neka je $g \in C([a,b])$ kontrakcija na $[a,b]$. Tada postoji konstanta $m \in \mathbb{R}$ takva da je funkcija $\tilde{g} : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{g}(x) = g(x) + m,$$

kontrakcija na $[a,b]$ i $\tilde{g}([a,b]) \subseteq [a,b]$.

Može li se tvrdnja generalizirati na $\mathbb{R}^n$? Obrazložite odgovor.

Zadatak

Neka je (x_n) niz generiran jednostavnim iteracijama za neku funkciju g. Pretpostavimo da uz uvjete iz teorema o konvergenciji, funkcija g zadovoljava i $g'(x) < 0$ za sve $x \in [a, b]$. Neka je $x_0 < \alpha$ gdje je α (jedinstvena) fiksna točka funkcije g. Pokažite da za svaki $k \geq 0$ vrijedi

$$x_{2k} < \alpha < x_{2k+1}.$$

Zadatak

Neka je $a \in \mathbb{R}$ i neka je za dani $r > 0$ definiran segment $I = [a - r, a + r]$. Neka je $g \in C(I)$ takva da je

$$|g'(x)| \leq q, \quad \forall x \in I$$

i

$$|g(a) - a| \leq (1 - q)r.$$

Pokažite da za g postoji jedinstvena fiksna točka $\alpha \in I$ i da jednostavne iteracije konvergiraju za proizvoljan izbor početne vrijednosti $x_0 \in I$. Posebno vrijedi

$$|x_k - \alpha| \leq q^k |x_0 - \alpha|.$$

Zadatak

Promatrajmo nelinearnu jednadžbu $\exp x = \sin x$.

(a) Koristeći sam olovku i papir, pokažite da postoji jedno i samo jedno rješenje $\alpha \in \left(-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right)$.

(b) Pokažite da zapravo vrijedi da postoji jedno i samo jedno rješenje $\alpha \in \left(-\frac{5}{4}\pi, -\pi\right)$.

(c) Promotrimo sljedeće iterativne metode:

$$x_{k+1} = \ln\left(\sin x_k\right)$$

i

$$x_{k+1} = \sin^{-1}\left(\exp x_k\right),$$

gdje je inverz sinus funkcije prikladno i pažljivo definiran. Što možete reći o konvergenciji ovih metoda prema α?

(d) Da li bi Newtonova metoda konvergirala za svaku početnu točku $x_0 \in \left(-\frac{5}{4}\pi, -\pi\right)$? Obrazložite odgovor.

Zadatak

Pokažite da jednadžba

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\cos y, \\ y &= \frac{1}{2}\sin x \end{aligned}$$

ima jedinstveno rješenje. Nađite rješenje do na točnost od dva decimalna mjesta.