Vježbe iz nuklearne fizike

Matko Milin i Ivica Friščić
Fizički odsjek
Prirodoslovno-matematički fakultet
Sveučilišta u Zagrebu

verzija: 30. rujna 2013.

Ova skripta nastala je u okviru kolegija "Nuklearna fizika", koji je obavezan na četvrtoj godini studija fizike (istraživački smjer) na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Sve eventualne greške, komentare i sugestije molimo slati na matko.milin@phy.hr. Porukom na istu adresu može se zatražiti i (besplatna) posljednja verzija skripte.

Sadržaj

1

Simetrije u nuklearnoj fizici i algebra momenta impulsa

1.1 Infinitezimalne rotacije u klasičnoj mehanici

U trodimenzionalnom euklidskom prostoru rotacije se opisuje realnom, ortogonalnom matricom $\mathbf{R}$ dimenzije 3×3:

$$\boldsymbol{V'} = \mathbf{R}\boldsymbol{V} \quad ,$$

gdje su $\boldsymbol{V}$ i $\boldsymbol{V'}$ trodimenzionalni vektori prije i poslije rotacije:

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \qquad\qquad \boldsymbol{V'} = \begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{pmatrix}$$

Za takve matrice vrijedi:

$$RR^T = R^T R = 1 \quad ,$$

gdje je R^T oznaka za transponiranu matricu, tj. matricu za koju vrijedi:

$$\left[R^T\right]_{ij} = [R]_{ji} \quad .$$

Zbog ortonormiranosti matrice rotacije vrijedi:

$$\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{V'^2_x + V'^2_y + V'^2_z} \quad .$$

Da bi eksplicitno zapisali marticu rotacije $\mathbf{R}$, postavimo koordinatni sustav tako da se z-os poklapa s osi rotacije. Rotirat ćemo tijelo, a ne koordinatni sustav (takav pristup obično se naziva "aktivna rotacija"). Kut rotacije ϕ uzet ćemo kao pozitivan ako se rotacija u xy-ravnini odvija u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu (gledano iz smjera pozitivnog dijela osi z). Tada za matricu rotacije vrijedi:

$$\mathbf{R_z}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{1.1}$$

Indeksom "z" naglašeno je da se rotacija vrši oko osi z.

Kada je kut rotacije ϕ vrlo (infinitezimalno) malen, matrica rotacije može se napisati ovako:

$$\mathbf{R_z}(\phi) = \begin{pmatrix} 1-\frac{\phi^2}{2} & -\phi & 0 \\ \phi & 1-\frac{\phi^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{1.2}$$

gdje su svi članovi višeg reda (ϕ^3, ϕ^4, ...) zanemareni. Posve se analogno za rotacije oko osi x i y može zapisati (cikličnim permutacijama $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$ u izrazu 1.2):

$$\mathbf{R_x}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{\phi^2}{2} & -\phi \\ 0 & \phi & 1-\frac{\phi^2}{2} \end{pmatrix} \quad , \tag{1.3}$$

$$\mathbf{R_y}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1-\frac{\phi^2}{2} & 0 & \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\phi & 0 & 1-\frac{\phi^2}{2} \end{pmatrix} \quad . \tag{1.4}$$

Pogledajmo sad efekt infinitezimalne rotacije oko x-osi nakon koje slijedi infinitezimalna rotacija oko y-osi:

$$\begin{aligned} \mathbf{R_y}(\phi)\mathbf{R_x}(\phi) &= \begin{pmatrix} 1-\frac{\phi^2}{2} & 0 & \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\phi & 0 & 1-\frac{\phi^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{\phi^2}{2} & -\phi \\ 0 & \phi & 1-\frac{\phi^2}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-\frac{\phi^2}{2} & \phi^2 & \phi \\ 0 & 1-\frac{\phi^2}{2} & -\phi \\ -\phi & \phi & 1-\frac{\phi^2}{2} \end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Analogno, za infinitezimalnu rotaciju oko y-osi nakon koje slijedi infinitezimalna rotacija oko x-osi dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{R_x}(\phi)\mathbf{R_y}(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{\phi^2}{2} & -\phi \\ 0 & \phi & 1-\frac{\phi^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\frac{\phi^2}{2} & 0 & \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\phi & 0 & 1-\frac{\phi^2}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-\frac{\phi^2}{2} & 0 & \phi \\ \phi^2 & 1-\frac{\phi^2}{2} & -\phi \\ -\phi & \phi & 1-\frac{\phi^2}{2} \end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Zaključujemo da infinitezimalne rotacije oko različitih osi **ne komutiraju** ako u obzir uzmemo i članove reda ϕ^2 (i više):

$$\mathbf{R_x}(\phi)\mathbf{R_y}(\phi) - \mathbf{R_y}(\phi)\mathbf{R_x}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & -\phi^2 & 0 \\ \phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{R_z}(\phi^2) - \mathbf{1} \quad . \tag{1.7}$$

Budući da se jedinična matrica $\mathbf{1}$ može zapisati kao rotacija za kut 0° oko *bilo koje* osi:

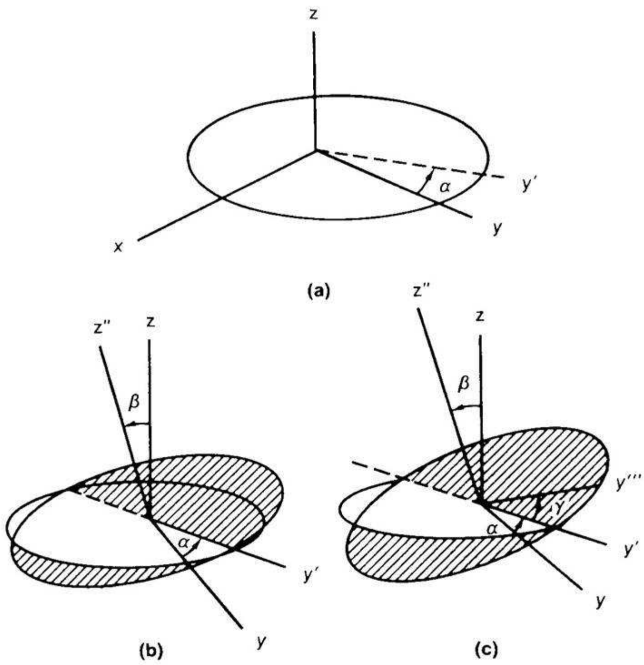
$$\mathbf{1} = \mathbf{R_{any}}(0) \quad ,$$

izraz 1.7 se može zapisati u obliku koji će biti pogodniji za kasnije povlačenje analogije s algebrom momenta impulsa:

$$\mathbf{R_x}(\phi)\mathbf{R_y}(\phi) - \mathbf{R_y}(\phi)\mathbf{R_x}(\phi) = \mathbf{R_z}(\phi^2) - \mathbf{R_{any}}(0) \quad . \tag{1.8}$$

1.1.1 Eulerovi kutovi

U klasičnoj mehanici rotacija tijela se najopćenitije opisuje Eulerovim kutovima α, β i γ koji se svaka rotacija razlaže na sljedeće korake:
i) rotacija oko z-osi za kut α;
ii) rotacija oko (nove) y'-osi za kut β;
iii) rotacija oko (nove) z"-osi za kut γ;
sve navedene rotacije po dogovoru se vrše u smjeru obrnutom od kazaljke na satu. U kvantnoj mehanici svakom setu Eulerovih kutova pridružit ćemo tzv. *D-funkciju* (detalji će biti dani u poglavlju 1.4).



Slika 1.1: Uz definiciju Eulerovih kutova: (a) rotacija za kut α oko z-osi; (b) rotacija za kut β oko nove y'-osi; (c) rotacija za kut γ oko nove z"-osi.

1.2 Infinitezimalne rotacije u kvantnoj mehanici

Rotaciji opisanoj matricom $\mathbf{R}$ u kvantnoj mehanici pridružujemo operator $D(\mathbf{R})$ tako da vrijedi:

$$|\alpha\rangle_R = D(\mathbf{R})|\alpha\rangle \quad ,$$

gdje s $|\alpha\rangle$ opisujemo stanje sustava prije rotacije, a s $|\alpha\rangle_R$ njegovo stanje nakon rotacije. Treba naglasiti da ortogonalna matrica $\mathbf{R}$ dimenzije 3×3 djeluje na stupčanu matricu (klasični vektor), dok je $D(\mathbf{R})$ operator koji djeluje na vektore stanja. No, kao i svaki drugi operator, $D(\mathbf{R})$ se može reprezentirati matricom čija dimenzija ovisi o dimenziji N prostora stanja $|\alpha\rangle$. Tako je npr. za opisivanje sistema spina 1/2, N=2 i $D(\mathbf{R})$ se opisuje matricom dimenzije 2×2. Za spin 1, N=3 i $D(\mathbf{R})$ se opisuje matricom dimenzije 3×3 itd.

Pogledajmo opet slučaj rotacije za infinitezimalno malen kut ϕ. U kvantnoj mehanici *svaki* se infinitezimalni operator može napisati ovako:

$$U_\epsilon = 1 - iG\epsilon \quad ,$$

gdje je G neki hermitski operator, a ϵ odgovarajući infinitezimalni pomak; hermitski operator je onaj koji se reprezentira hermitskom matricom, tj. matricom za koju vrijedi:

$$[A]_{ij} = \overline{[A]_{ji}} \quad . \tag{1.9}$$

Po Noetherinom teoremu svaki zakon sačuvanja vezan je za neku simetriju te postoji operator koji generira odgovarajuće infinitezimalne pomake. Npr. za translaciju (u x-smjeru) u kvantnoj se mehanici odgovarajući operator dobiva ovako:

$$G \to \frac{p_x}{\hbar} \quad , \quad \epsilon \to dx \quad , \tag{1.10}$$

dok su za evoluciju sustavu u vremenu potrebne zamjene:

$$G \to \frac{H}{\hbar} \quad , \quad \epsilon \to dt \quad .$$

Znajući da je u klasičnoj mehanici moment impulsa generator rotacije, u kvantnoj mehanici *definiramo* operator moment impulsa J_k na takav način da se operator infinitezimalne rotacije oko k-te osi za kut dϕ može dobiti uz zamjenu:

$$G \rightarrow \frac{J_k}{\hbar} \quad , \quad \epsilon \rightarrow d\phi \quad . \tag{1.11}$$

Uvrštavanjem u izraz 1.2 i uz standarnu oznaku za operator rotacije, dobiva se:

$$D(k, d\phi) = 1 - i\frac{J_k}{\hbar}d\phi \quad . \tag{1.12}$$

Ako je $\hat{n}$ jedinični vektor u smjeru k-te osi, ovaj se izraz može napisati i ovako:

$$D(\hat{n}, d\phi) = 1 - i\frac{\mathbf{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}d\phi \quad .$$

Rotacija za konačan kut dobiva se kao sukcesivan niz infinitezimalnih rotacija oko iste osi. Npr. za rotaciju oko z-osi:

$$D(z, \phi) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - i\frac{J_z}{\hbar}\frac{\phi}{N}\right) = \exp\left(\frac{-iJ_z\phi}{\hbar}\right) = 1 - \frac{iJ_z\phi}{\hbar} - \frac{J_z^2\phi^2}{2\hbar^2} + \dots \quad ;$$

Dakle, svakoj klasičnoj rotaciji (opisanoj matricom $\mathbf{R}$) u kvantnoj mehanici se pridružuje operator $D(\mathbf{R})$ koji ima ista grupna svojstva kao i sama matrica $\mathbf{R}$. Zbog toga i izraz 1.7 mora biti zadovoljen ako svaku matricu zamjenimo operatorom:

$$\begin{aligned}&\left(1 - \frac{iJ_x\phi}{\hbar} - \frac{J_x^2\phi^2}{2\hbar^2}\right)\left(1 - \frac{iJ_y\phi}{\hbar} - \frac{J_y^2\phi^2}{2\hbar^2}\right) - \\ &-\left(1 - \frac{iJ_y\phi}{\hbar} - \frac{J_y^2\phi^2}{2\hbar^2}\right)\left(1 - \frac{iJ_x\phi}{\hbar} - \frac{J_x^2\phi^2}{2\hbar^2}\right) \approx 1 - i\frac{J_z\phi^2}{\hbar} - 1 \quad ,\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}&\left(1 - \frac{iJ_x\phi}{\hbar} - \frac{iJ_y\phi}{\hbar} - \frac{J_x^2\phi^2}{2\hbar^2} - \frac{J_y^2\phi^2}{2\hbar^2} - \frac{J_xJ_y\phi^2}{\hbar^2}\right) - \\ &-\left(1 - \frac{iJ_y\phi}{\hbar} - \frac{iJ_x\phi}{\hbar} - \frac{J_y^2\phi^2}{2\hbar^2} - \frac{J_x^2\phi^2}{2\hbar^2} - \frac{J_yJ_x\phi^2}{\hbar^2}\right) \approx -i\frac{J_z\phi^2}{\hbar} \quad ,\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$-\frac{J_xJ_y\phi^2}{\hbar^2} - (-)\frac{J_yJ_x\phi^2}{\hbar^2} = -i\frac{J_x\phi^2}{\hbar} \quad ,$$

$$J_xJ_y - J_yJ_x = i\hbar J_z \quad ,$$

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \quad .$$

(u gornjim jednadžbama zanemareni su članovi trećeg i viših redova).
Dakle, definicija operatora momenta impulsa kao generatora rotacije vodi na osnovne relacije komutativnosti za iste. Općenitije se može napisati:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \quad ,$$

gdje je:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{za parnu permutaciju i, j, k} \\ 0 & \text{za bilo koja 2 indeksa i, j, k jednaka} \\ -1 & \text{za neparnu permutaciju i, j, k} \end{cases} \quad .$$

1.3 Algebra momenta impulsa

U prošlom smo poglavlju definirali moment impulsa kao generator rotacije, te uz pomoć infinitezimalne analize dobili osnovnu komutacijsku relaciju:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \quad . \tag{1.15}$$

Definiramo nadalje:

$$\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \quad , \tag{1.16}$$

$$J^+ = J_x + iJ_y \quad , \tag{1.17}$$

$$J^- = J_x - iJ_y \quad . \tag{1.18}$$

Zadatak 1.1
Dokažite:

$$\left[J_x, J^2\right] = 0 \quad .$$

Rješenje 1.1
Koristeći izraz 1.16 dobivamo:

$$\left[J_x, J^2\right] = \left[J_x, J_x^2\right] + \left[J_x, J_y^2\right] + \left[J_x, J_z^2\right] \quad .$$

Iskoristimo li sljedeću matematičku relaciju:

$$[A, BC] = [A, B]\,C + B\,[A, C] \quad , \tag{1.19}$$

dobivamo (uz B=C za svaki od tri člana na desnoj strani izraza 1.19):

$$\begin{aligned}
\left[J_x, J^2\right] &= [J_x, J_x]\,J_x + J_x\,[J_x, J_x] + [J_x, J_y]\,J_y + J_y\,[J_x, J_y] + \\
&\quad + [J_x, J_z]\,J_z + J_z\,[J_x, J_z] = \\
&= 0 + 0 + (i\hbar J_z)\,J_y + J_y\,(i\hbar J_z) + (-i\hbar J_y)\,J_z + J_z\,(-i\hbar J_y) = \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Zadatak 1.2
Pokažite da je J^- definiran u izrazu 1.18 operator poništavanja (spuštanja), tj. da vrijedi:

$$J^-|j\,m\rangle = c|j\,m-1\rangle \quad , \tag{1.20}$$

gdje je c neka konstanta, a z-os ona os za koju vrijedi:

$$J_z|j\,m\rangle = \hbar m|j\,m\rangle \quad . \tag{1.21}$$

Rješenje 1.2
Izračunajmo što se dobiva djelovanjem operatora J_z na stanje $J^-|j\,m\rangle$:

$$J_z J^- |j\, m\rangle = J_z \left(J_x - iJ_y\right) |j\, m\rangle \quad ,$$

$$J_z J^- |j\, m\rangle = \left(J_z J_x - iJ_z J_y\right) |j\, m\rangle \quad .$$

Uvrstimo li ovdje izraze dobivene iz komutacijskih relacija 1.15:

$$J_z J_x = J_x J_z + i\hbar J_y \quad , \quad J_z J_y = J_y J_z - i\hbar J_x \quad ,$$

dobivamo:

$$J_z J^- |j\, m\rangle = \left[\left(J_x J_z + i\hbar J_y\right) - i\left(J_y J_z - i\hbar J_x\right)\right] |j\, m\rangle \quad .$$

Znamo kako operator J_z djeluje na stanje $|j\, m\rangle$ (izraz 1.21), pa dobivamo:

$$J_z J^- |j\, m\rangle = \left[\left(\hbar m J_x + i\hbar J_y\right) - i\left(i\hbar m J_y - i\hbar J_x\right)\right] |j\, m\rangle \quad .$$

Grupiranjem dobivamo:

$$J_z J^- |j\, m\rangle = \hbar(m-1)\left(J_x - iJ_y\right) |j\, m\rangle \quad ,$$

$$J_z J^- |j\, m\rangle = \hbar(m-1) J^- |j\, m\rangle \quad . \tag{1.22}$$

S druge strane, napišemo li izraz 1.21 za stanje $|j\, m-1\rangle$, dobivamo:

$$J_z |j\, m-1\rangle = \hbar(m-1) |j\, m-1\rangle \quad . \tag{1.23}$$

Usporedbom izraza 1.22 i 1.23 vidimo da mora vrijediti:

$$J^- |j\, m\rangle = c_- |j\, m-1\rangle \quad , \tag{1.24}$$

gdje je c_- za sada neodređena konstanta; može se pokazati (vidi npr. *Sakurai* str. 192) da vrijedi:

$$c_- = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\hbar \quad .$$

Analogno, J^+ je operator stvaranja ili podizanja i za njega vrijedi:

$$J^+ |j\, m\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\hbar |j\, m+1\rangle \quad . \tag{1.25}$$

1.4 D-funkcija

U klasičnoj mehanici rotacije smo opisivali Eulerovim kutovima opisanim u poglavlju 1.1.1. U kvantnoj mehanici rotacija se opisuje s tri nezavisne konstante gibanja koje čine tzv. D-funkciju ("D" dolazi od njemačkog izraza za rotaciju: *Drehung*). Neko stanje se pri rotaciji (klasično opisanoj matricom $\mathbf{R}$) transformira ovako:

$$|jm\rangle \rightarrow D(\mathbf{R})|jm\rangle \quad . \tag{1.26}$$

D-funkcija je vlastita funkcija operatora momenta impulsa, tj. rotacijska valna funkcija. Njome se, dakako, također opisuju transformacije između različitih koordinatnih sistema.

Ovisno o području fizike, koriste se razne konvencije što se tiče faze i predznaka - u okviru ove skripte koristit će se standard uveden od Bohra i Mottelsona.

Za rotaciju klasično opisanu Eulerovim kutovima α, β i γ, D-funkcije se definira ovako:

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z/\hbar} e^{-i\beta J_{y'}/\hbar} e^{-i\gamma J_{z''}/\hbar} \quad . \tag{1.27}$$

Matrica rotacije $D^J_{M\,M'}$ (ili tzv. *Wignerova D-matrica*) dobiva se ovako:

$$\langle jm'|D(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle = D^j_{m'\,m}(\alpha,\beta,\gamma) \quad , \tag{1.28}$$

Dakle, vrijedi:

$$D(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle = \sum_{m'} D^j_{m'\,m}(\alpha,\beta,\gamma)|jm'\rangle \quad . \tag{1.29}$$

Reducirana matrica rotacije definira se ovom relacijom:

$$d^j_{m'\,m}(\beta) = \langle jm'|e^{-i\beta J_{y'}/\hbar}|jm\rangle \quad ; \tag{1.30}$$

veza između reducirane i nereducirane matrice rotacije dana je dakle s:

$$D^j_{m'\,m}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\alpha m'/\hbar} d^j_{m'\,m}(\beta) e^{-i\gamma m/\hbar} \quad . \tag{1.31}$$

Ako je transformacija nekog stanja opisanog kvantnim brojem j i m dana izrazom 1.26, onda se očekivana vrijednost vektorskog operatora V transformira ovako:

$$\begin{aligned} \langle jm'|V_i|jm\rangle \quad \rightarrow \quad & \langle jm'|D^*(\mathbf{R})V_i D(\mathbf{R})|jm\rangle = \\ & = \sum_i R_{ij}\langle jm'|V_j|jm\rangle \quad , \end{aligned} \tag{1.32}$$

(s D^* označili smo kompleksno konjugiranu transponiranu matricu; ponekad se koristi i oznaka $D^\dagger$) Transformacija tenzorskih operatora bit će diskutirana kasnije.

1.4.1 Svojstva Wignerovih D-matrica

Kao prvo, treba još jednom naglasiti da D-funkcija ne mijenja vrijednost momenta impulsa (jer se isti jednostavno rotira - J se pri tome ne mijenja, a M kao projekcija dakako može):

$$\begin{aligned} J^2 D(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle &= D(\alpha,\beta,\gamma)J^2|jm\rangle = \\ &= j(j+1)\left[D(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle\right] \quad . \end{aligned}$$

Nadalje, D-matrice se također pojavljuju kao koeficijenti reprezentacije grupa rotacija:

$$Y_{jm}(\theta,\phi) = \sum_{m'} D^j_{m'\,m}(\alpha,\beta,\gamma) Y_{jm'}(\theta',\phi') \quad . \tag{1.33}$$

Štoviše, između D-matrica i kuglinih funkcija postoji vrlo jednostavna veza (vidi *Sakurai*, str. 203):

$$Y_l^{m*}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D^l_{m0}(\alpha=\phi,\beta=\theta,\gamma=0) \quad . \tag{1.34}$$

Kad je m=0, veza se još više pojednostavljuje:

$$d^l_{00}(\beta) = P_l(\cos\theta) \quad . \tag{1.35}$$

Reducirana matrica rotacije je posve realna i ima sljedeća svojstva:

$$d^j_{m'\,m}(\beta) = (-1)^{m-m'} d^j_{m\,m'}(\beta) \quad , \tag{1.36}$$

$$d^j_{-m'\,-m}(\beta) = d^j_{m'\,m}(\beta) \quad , \tag{1.37}$$

$$d^j_{m'\,m}(\pi-\beta) = (-1)^{j-m'} d^j_{m'\,m}(\beta) \quad , \tag{1.38}$$

$$\int_{-1}^{1} d^j_{m'\,m}(\beta) d^{j'}_{m'\,m}(\beta) d(\cos\beta) = \frac{2}{2j+1}\delta_{j\,j'} \quad . \tag{1.39}$$

Elementi reducirane Wignerove matrice direktno se mogu izračunati iz sljedećeg izraza:

$$\begin{aligned} d^j_{m'\,m}(\beta) &= \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}\,\cdot \\ &\cdot \sum_k \frac{(-1)^{k-m+m'}(\cos\beta/2)^{2j+m-m'-2k}(\sin\beta/2)^{m'-m+2k}}{(j-m'-k)!(j+m-k)!(k+m'-m)!k!} \quad . \end{aligned} \tag{1.40}$$

Izvod ovog izraza (tzv. Wignerove formule) je posve netrivijalan i može se naći u *Sakurai, str. 220.*

Osim "grubom silom" pomoću izraza 1.40, D-matrice se mogu odrediti i na druge načine. Na primjer, za spin 1/2 produkt operatora rotacije

$$D(\alpha,\beta,\gamma) = D_z(\alpha)D_y(\beta)D_z(\gamma)$$

se u reprezentaciji matricama 2×2 svodi na:

$$e^{-i\sigma_3\alpha/2}e^{-i\sigma_2\beta/2}e^{-i\sigma_3\gamma/2} \quad ,$$

a to se može raspisati kao:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta/2 & -\sin\beta/2 \\ \sin\beta/2 & \cos\beta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\beta/2 & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\beta/2 \\ e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\beta/2 & e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\beta/2 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{1.41}$$

Zadatak 1.3

Pomoću Wignerove formule (izraz 1.40) izračunajte d^2_{00}!

Rješenje 1.3

Uvrštavanjem u Wignerovu formulu dobivamo:

$$d^2_{00} = \sqrt{(2+0)!(2-0)!(2+0)!(2-0)!}\sum_k \frac{(-1)^k(\cos\beta/2)^{4-2k}(\sin\beta/2)^{2k}}{(2-k)!(2-k)!k!k!} \quad .$$

Argument faktorijele ne može biti negativan pa mora vrijediti $0 \leq k \leq 2$.

$$\begin{aligned} d^2_{00} &= 4\left[\frac{1}{4}(\cos\beta/2)^4 - (\cos\beta/2\sin\beta/2)^2 + \frac{1}{4}(\sin\beta/2)^4\right] = \\ &= (\cos\beta/2)^4 - 4(\cos\beta/2\sin\beta/2)^2 + (\sin\beta/2)^4 = \\ &= \left[\cos\beta/2)^2 - (\sin\beta/2)^2\right]^2 - 2(\cos\beta/2\sin\beta/2)^2 = \\ &= (\cos\beta)^2 - 1/2(\sin\beta)^2 = \\ &= \cos^2\beta - 1/2(1-\cos^2\beta) = \\ &= \frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1) \quad . \end{aligned} \tag{1.42}$$

Zadatak 1.4
Vlastita stanja momenta impulsa $|j, m = m_{max} = j\rangle$ zarotirana su za infinitezimalni kut ϵ oko osi y. Bez upotrebe eksplicitnog izraza za $d^J_{M'\,M}$, izračunajte vjerojatnost da se novo, rotirano stanje nalazi u originalnom stanju do na kvadratične članove u kutu ϵ.

Rješenje 1.4
Zarotirano stanje dano je s:

$$\begin{aligned}|j,j\rangle_R &= \mathbf{R}(\epsilon,\hat{y})|j,j\rangle = d^j(\epsilon)|j,j\rangle = \\ &= e^{-iJ_y\epsilon/\hbar}|j,j\rangle = \\ &= \left(1-\frac{iJ_y\epsilon}{\hbar}+\frac{(-i)^2\epsilon^2J_y^2}{2\hbar^2}\right)|j,j\rangle \quad .\end{aligned}$$

Uvrstimo ovdje J_y izražen preko operatora stvaranja i poništavanja, izrazi 1.17 i 1.18:

$$J_y = \frac{J^+ - J^-}{2i}$$

Dobivamo (zadržavajući samo članove do kvadratičnog):

$$|j,j\rangle_R = \left(1-\frac{\epsilon}{2\hbar}(J^+-J^-)+\frac{\epsilon^2}{8\hbar^2}(J^+-J^-)^2\right)|j,j\rangle \quad . \tag{1.43}$$

Iskoristimo poznate relacije 1.24 i 1.25:

$$J^+|j\,,\,m\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\hbar|j\,,\,m+1\rangle \quad ,$$

$$J^-|j\,,\,m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\hbar|j\,,\,m-1\rangle \quad ,$$

pa dobivamo za svaki član u izrazu 1.43:

$$J^+|j\,,\,j\rangle = 0 \quad ,$$

$$J^-|j\,,\,j\rangle = \hbar\sqrt{2j}|j\,,\,j-1\rangle \quad ,$$

$$\left(J^+-J^-\right)|j\,,\,j\rangle = -J^-|j\,,\,j\rangle = -\hbar\sqrt{2j}|j\,,\,j-1\rangle \quad ,$$

$$\begin{aligned}\left(J^+-J^-\right)^2|j\,,\,j\rangle &= -\hbar\sqrt{2j}\left(J^+-J^-\right)|j\,,\,j-1\rangle = \\ &= -\hbar\sqrt{2j}\left(J^+|j\,,\,j-1\rangle - J^-|j\,,\,j-1\rangle\right) = \\ &= -\hbar\sqrt{2j}\left(\sqrt{2j}|j\,,\,j\rangle - \sqrt{2(j-1)}|j\,,\,j-2\rangle\right) \quad .\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u izraz 1.43, dobivamo:

$$\begin{aligned}|j,j\rangle_R &= |j,j\rangle + \frac{\epsilon}{2}\sqrt{2j}|j,j-1\rangle - \frac{\epsilon^2}{8}2j|j,j\rangle + \frac{\epsilon^2}{8}\sqrt{j(j-1)}|j\,,\,j-2\rangle = \\ &= \left(1-\frac{\epsilon^2}{4}j\right)|j,j\rangle + \frac{\epsilon}{2}\sqrt{2j}|j,j-1\rangle + \frac{\epsilon^2}{4}\sqrt{j(j-1)}|j\,,\,j-2\rangle \quad .\end{aligned}$$

Dakle, vjerojatnost da rotirano stanje nađemo u originalnom dana je s:

$$|\langle j\,,\,j|j\,,\,j\rangle_R|^2 = \left|1 - \frac{\epsilon^2}{4}j\right|^2 = 1 - \frac{\epsilon^2}{2}j \quad .$$

Zadatak 1.5
Izračunajte:

$$\sum_{m=-j}^{j} \left|d^j_{m'\,m}(\beta)\right|^2 m$$

za svaku vrijednost j. Provjerite rezultat za $j = 1/2$.

Rješenje 1.5
Raspisujemo:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-j}^{j} \left|d^j_{m'\,m}(\beta)\right|^2 m &= \sum_{m=-j}^{j} m \left|\langle j\,m|e^{-iJ_y\beta/\hbar}|j\,m'\rangle\right|^2 = \\
&= \sum_{m=-j}^{j} m\langle j\,m|e^{-iJ_y\beta/\hbar}|j\,m'\rangle\langle j\,m|e^{-iJ_y\beta/\hbar}|j\,m'\rangle^* = \\
&= \sum_{m=-j}^{j} m\langle j\,m|e^{-iJ_y\beta/\hbar}|j\,m'\rangle\langle j\,m'|e^{iJ_y\beta/\hbar}|j\,m\rangle = \\
&= \sum_{m=-j}^{j} \langle j\,m'|e^{iJ_y\beta/\hbar}m|j\,m\rangle\langle j\,m|e^{-iJ_y\beta/\hbar}|j\,m'\rangle = \\
&= \langle j\,m'|e^{iJ_y\beta/\hbar}\left(\sum_{m=-j}^{j} m|j\,m\rangle\langle j\,m|\right)e^{-iJ_y\beta/\hbar}|j\,m'\rangle = \\
&= \frac{1}{\hbar}\langle j\,m'|e^{iJ_y\beta/\hbar}J_z e^{-iJ_y\beta/\hbar}|j\,m'\rangle = \\
&= \frac{1}{\hbar}\langle j\,m'|D^*(\beta,\hat{y})J_z D(\beta,\hat{y})|j\,m'\rangle \quad .
\end{aligned} \tag{1.44}$$

S druge strane, moment impulsa je vektorski operator pa je pravilo za njegovo rotiranje dano izrazom 1.32; stoga vrijedi:

$$D^*(\beta,\hat{y})J_z D(\beta,\hat{y}) = \sum_j \mathbf{R}_{zj}(\beta,\hat{y})J_j \quad ,$$

gdje je (vidi izraz 1.4):

$$\mathbf{R_y}(\beta,\hat{y}) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Uvrštavanjem u izraz 1.44, dobivamo:

$$\begin{aligned}\sum_{m=-j}^{j}\left|d^{j}_{m'\,m}(\beta)\right|^{2} m &= \frac{1}{\hbar}\left(-\sin\beta\langle j\,m'|J_x|j\,m'\rangle+\cos\beta\langle j\,m'|J_z|j\,m'\rangle\right)= \\ &= \frac{1}{\hbar}\left(-\sin\beta\langle j\,m'|\frac{J^{+}+J^{-}}{2}|j\,m'\rangle+\cos\beta m'\hbar\right)= \\ &= m'\cos\beta \quad . \end{aligned} \tag{1.45}$$

Provjerimo dobiveni rezultat za specijalan slučaj j=1/2, za koji znamo (vidi izraz 1.41):

$$d^{1/2}_{m'\,m}(\beta)=\begin{pmatrix}\cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2)\\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2)\end{pmatrix}$$

Kvantni broj m' kada je j=1/2 može poprimiti vrijednosti +1/2 i -1/2; pogledajmo svaki od ta dva slučaja zasebno:

I) za m'= 1/2 imamo:

$$\begin{aligned}\sum_{m=-1/2}^{1/2}\left|d^{1/2}_{1/2\,m}(\beta)\right|^{2} m &= -1/2|d^{1/2}_{1/2\;-1/2}(\beta)|^2+1/2|d^{1/2}_{1/2\;1/2}(\beta)|^2= \\ &= -\frac{1}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}= \\ &= \frac{1}{2}\cos\beta=m'\cos\beta \quad .\end{aligned}$$

II) za m'= -1/2 imamo:

$$\begin{aligned}\sum_{m=-1/2}^{1/2}\left|d^{1/2}_{-1/2\,m}(\beta)\right|^{2} m &= -1/2|d^{1/2}_{-1/2\;-1/2}(\beta)|^2+1/2|d^{1/2}_{-1/2\;1/2}(\beta)|^2= \\ &= -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}= \\ &= -\frac{1}{2}\cos\beta=m'\cos\beta \quad .\end{aligned}$$

Dakle, u oba slučaja dobiven je isti rezultat kao i u općenito dobivenom rješenju (izraz 1.45).

Zadatak 1.6

Izračunajte reduciranu Wignerovu matricu za j=1, tj.

$$d^{1}_{m'\,m}(\beta) \quad .$$

Rješenje 1.6

Za j=1 moramo koristiti matričnu reprezentaciju 3×3 (jer projekcija m može poprimiti tri različite vrijednosti).

Budući da računamo samo reduciranu Wignerovu matricu (dakle d, a ne D), trebamo samo y-komponentu operotora momenta impulsa, J_y. Zato, kao i u zadatku 1.3 koristimo:

$$J_y = \frac{J^+ - J^-}{2i} \quad .$$

Također kao u zadatku 1.3, koristimo i:

$$\langle j' \,,\, m'|J^{\pm}|j \,,\, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\hbar\delta_{jj'}\delta_{m'\,m\pm1} \quad ,$$

Izračunajmo matrične elemente od J_y^1. Npr. pogledajmo matrični element za m=0 i m'=1:

$$\langle 11|J^{\pm}|10\rangle = \sqrt{(1 \mp 0)(1 \pm 0 + 1)}\hbar\delta_{11}\delta_{1\;0\pm1} \quad ,$$

$$\langle 11|J^{+}|10\rangle = \sqrt{(1 - 0)(1 + 0 + 1)}\hbar\delta_{11}\delta_{1\;0+1} = \sqrt{2}\hbar \quad ,$$

$$\langle 11|J^{-}|10\rangle = \sqrt{(1 + 0)(1 - 0 + 1)}\hbar\delta_{11}\delta_{1\;0-1} = 0 \quad ,$$

$$J_y = \frac{J^+ - J^-}{2i} = \frac{\sqrt{2}\hbar - 0}{2i} = -i\sqrt{2}\frac{\hbar}{2} \quad .$$

Analogno se dobiva svih 9 matričnih elemenata za 3×3 mogućih kombinacija m i m'. Njihovim stavljanjem u matricu dobivamo:

$$J_y^1 = \frac{\hbar}{2}\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m' = 1 \\ m' = 0 \\ m' = -1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} m=-1 & m=0 & m=1 \end{array} & \end{array} \quad .$$

Sljedeći korak je razvoj u red $e^{-iJ_y\beta/\hbar}$ koji se pojavljuje u definiciji reducirane Wignerove matrice:

$$e^{-iJ_y\beta/\hbar} = 1 - \frac{iJ_y\beta}{\hbar} + \frac{1}{2!}\left(\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)^3 + \cdots \tag{1.46}$$

Matricu J_y^1 smo već odredili, no u gornjem razvoju se pojavljuju i njene više potencije pa ćemo sada izračunati njih. Izračunajmo prvo $\left(J_y^1\right)^2$:

$$\begin{aligned} \left(J_y^1\right)^2 &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{1.47}$$

Izračunajmo sada $\left(J_y^1\right)^3$:

$$
\begin{aligned}
\left(J_y^1\right)^3 &= \left(J_y^1\right)^2 \cdot J_y^1 = \\
&= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\hbar}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^3 \begin{pmatrix} 0 & -i4\sqrt{2} & 0 \\ i4\sqrt{2} & 0 & -i4\sqrt{2} \\ 0 & i4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \hbar^2 \left(\frac{\hbar}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \hbar^2 J_y^1 \quad .
\end{aligned}
$$

Dakle, treća potencija od J_y^1 je do na konstantu ($\hbar^2$) jednaka prvoj; četvrta će stoga biti jednaka drugoj itd. Sve neparne potencije moći će se svesti na J_y^1, a sve parne na $\left(J_y^1\right)^2$. Razvoj u red (izraz 1.46) sada postaje:

$$
\begin{aligned}
e^{-iJ_y\beta/\hbar} &= 1 - \frac{iJ_y\beta}{\hbar} + \frac{1}{2!}\left(\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)^4 + \cdots = \\
&= 1 - \frac{iJ_y\beta}{\hbar} + \frac{1}{2!}\left(\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)^2 - \frac{1}{3!}\frac{J_y(i\beta)^3}{\hbar} + \frac{1}{4!}\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 (i\beta)^4 + \cdots = \\
&= 1 - \frac{J_y}{\hbar}\left(i\beta + \frac{(i\beta)^3}{3!} + \cdots\right) + \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{(i\beta)^2}{2!} + \frac{(i\beta)^4}{4!} + \cdots\right) = \\
&= 1 - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right) i\sin\beta + \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 (\cos\beta - 1) \quad .
\end{aligned}
$$

Dakle:

$$
\begin{aligned}
d^1(\beta) &= 1 - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \sin\beta + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} (\cos\beta - 1) = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \cos\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\beta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \frac{1}{2}(1+\cos\beta) \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}
$$

1.5 Zbrajanje dva momenta impulsa

Zbrajamo dva operatora momenta impulsa ($\hat{j}_1$,$\hat{j}_2$) koji zadovoljavaju uobičajene komutacijske relacije (dakako, u različitim potprostorima):

$$\hat{J} = \hat{j}_1 + \hat{j}_2 \quad , \tag{1.48}$$

$$[j_{1i}, j_{1j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}j_{1k} \quad ,$$

$$[j_{2i}, j_{2j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}j_{2k} \quad .$$

Za bilo koji par operatora iz različitih potprostora vrijedi:

$$[j_{1i}, j_{2j}] = 0 \quad .$$

Ako su sve gornje relacije ispunjene, tada i sumirani moment impulsa zadovoljava iste komutacijske relacije:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \quad ,$$

Moguća su dva izbora baze čitavog sistema:

$$\diamond \; j_1^2 \;,\; j_2^2 \;,\; j_{1z} \;,\; j_{2z} \quad ,$$

$$\diamond \; J^2 \;,\; j_1^2 \;,\; j_2^2 \;,\; J_z \quad .$$

Zanima nas unitarna transformacija koja povezuje dvije baze (govorimo o tzv. Clebsh-Gordonovom problemu):

$$\boxed{\begin{array}{rcl} |j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle & \equiv & |j_1\, m_1\rangle\, |j_2\, m_2\rangle \\ & \Rightarrow & \\ |J\, M\rangle & \equiv & |j_1\, j_2\, J\, M\rangle \end{array}}$$

Pomoću relacije:

$$|J\, M\rangle \equiv \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\, J\, M\rangle |j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle \tag{1.49}$$

definiramo tzv. Clebsh-Gordonove koeficijente $\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\, J\, M\rangle$.

Clebsh-Gordonovi koeficijenti su nedefinirani do na fazu, u nuklearnoj fizici se standardno bira:

$$\langle j_1\, j_1\, j_2\, j_2\,|\, J\, J\rangle \geq 0 \quad \text{(i realan)},$$

Prelazak između dvije baze u suprotnom smjeru dan je s:

$$|j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^{J} \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\, J\, M\rangle |J\, M\rangle \quad . \tag{1.50}$$

Krećući od operatora stvaranja i poništavanja, može se izvesti i rekurzijska relacija za Clebsh-Gordonove koeficijente, kojom se u praksi isti i računaju (detalji se mogu vidjeti u *Sakurai, str. 320*). Za potrebe ovog kolegija, Clebsh-Gordonove koeficijente dovoljno je iščitavati iz tablica ili računati pomoću web-kalkulatora.

1.5.1 Svojstva Clebsh-Gordonovih koeficijenata

Najvažnija svojstva Clebsh-Gordonovih koeficijenata su:

1. za $m_1 + m_2 \neq M$ vrijedi:
$$\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\, J\, M\rangle = 0 \quad ; \tag{1.51}$$
2. za $J < |j_1 - j_2|$ ili $J > j_1 + j_2$ također vrijedi:
$$\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\, J\, M\rangle = 0 \quad ;$$
3. vrijedi: $\langle j\, m\, 0\, 0\,|\, j\, m\rangle = 1 \quad ;$
4. vrijedi: $\langle j_1\, j_1\, j_2\, j_2\,|\, j_1 + j_2\, j_1 + j_2\rangle = 1 \quad ;$
5. vrijedi:
$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\, J\, M\rangle \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\, J'\, M'\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'} \quad ;$$
6. vrijedi:
$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\, J\, M\rangle \langle j_1\, m_1'\, j_2\, m_2'\,|\, J\, M\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'} \quad .$$

1.5.2 3j-simboli

U nuklearnoj fizici tradicionalno se koriste i koeficijenti principijelno ekvivalentni Clebsh-Gordonovim, tzv. 3j-simboli. Razlozi su prvenstveno povijesni (3j-simboli su uvedeni u ranoj fazi nuklearne fizike). 3j-simbole preko Clebsh-Gordonovih koeficijenata definiramo ovako:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \equiv \frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}} \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 \,|\, J\, M \rangle \quad . \tag{1.52}$$

Ovako definirani 3j-simboli pokazuju sljedeća svojstva (simetrije):

1. pri parnoj permutaciji stupaca vrijedi:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \quad ; \tag{1.53}$$

2. pri neparnoj permutaciji stupaca vrijedi:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} \quad ; \tag{1.54}$$

3. pri promijeni predznaka u čitavom redu vrijedi:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad . \tag{1.55}$$

4. relacije ortogonalnosti:

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{2j_3+1} \delta_{j_3 j_3'} \delta_{m_3 m_3'}$$

$$\sum_{j_3=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m_3=-j_3}^{j_3} (2j_3+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3 \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

Zadatak 1.7

Krećući od definicije 3j-simbola "prevedite" njihova gornja svojstva 1-3 na Clebsch-Gordonove koeficijente!

Rješenje 1.7

Krenimo od izraza 1.53 i zamijenimo 3j-simbole s Clebsch-Gordonovim koeficijentima preko definicije (izraz 1.52); uz $j_3 = J$ i $m_3 = -M$ dobivamo:

$$\frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}} \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 \,|\, J\, M \rangle = \frac{(-1)^{J-j_1+m_2}}{\sqrt{2j_2+1}} \langle J\, -M\, j_1\, m_1 \,|\, j_2\, -m_2 \rangle \quad ,$$

$$\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 \,|\, J\, M \rangle = \frac{(-1)^{J+j_2-m_1}\sqrt{2J+1}}{\sqrt{2j_2+1}} \langle J\, -M\, j_1\, m_1 \,|\, j_2\, -m_2 \rangle \quad .$$

Krećući od 1.54 dobivamo (uz $j_3 = J$ i $m_3 = -M$):

$$\frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}}\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\,J\,M\rangle = (-1)^{j_1+j_2+J}\frac{(-1)^{j_2-j_1+M}}{\sqrt{2J+1}}\langle j_2\, m_2\, j_1\, m_1\,|\,J\,M\rangle \quad ,$$

$$\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\,J\,M\rangle = (-1)^{j_1+j_2+J}\langle j_2\, m_2\, j_1\, m_1\,|\,J\,M\rangle \quad .$$

I na kraju, za treće svojstvo (izraz 1.55) uz $j_3 = J$ i $m_3 = -M$ dobivamo:

$$\frac{(-1)^{j_1-j_2-M}}{\sqrt{2J+1}}\langle j_1\, -m_1\, j_2\, -m_2\,|\,J\, -M\rangle = (-1)^{j_1+j_2+J}\frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}}\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\,J\,M\rangle \quad ,$$

$$\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\,J\,M\rangle = (-1)^{j_1+j_2+J}\langle j_1\, -m_1\, j_2\, -m_2\,|\,J\, -M\rangle \quad .$$

Zadatak 1.8

Dokažite:

$$\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\,J\,M\rangle = (-1)^{-J+j_2-m_1}\sqrt{\frac{2J+1}{2j_2+1}}\langle j_1\, -m_1\, J\,M\,|\,j_2\, m_2\rangle \quad .$$

Rješenje 1.8

Zadatak ćemo riješiti koristeći svojstva simetrije 3j-simbola (uz zamjenu $j_3 = J$ i $m_3 = -M$). Clebsh-Gordanov koeficijent koji se pojavljuje na desnoj strani jednakosti koju treba dokazati očito ima zamjenjene J i M s j_2 i m_2, te uz to promijenjene predznake pred kvantnim brojevima m; krenimo stoga od trećeg svojstva za 3j-simbole (izraz 1.55):

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+J}\begin{pmatrix} j_1 & j_1 & J \\ -m_1 & -m_2 & M \end{pmatrix} \quad ,$$

te ga kombinirajmo s drugim svojstvom za 3j-simbole (izraz 1.54):

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ -m_1 & -m_2 & M \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+J}\begin{pmatrix} j_1 & J & j_2 \\ -m_1 & M & -m_2 \end{pmatrix} \quad ,$$

da bi dobili:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & J & j_2 \\ -m_1 & M & -m_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Uvrstimo u ovu jednakost definiciju 3j-simbola (izraz 1.52); dobivamo:

$$\frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}}\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\,J\,M\rangle = \frac{(-1)^{j_1-J+m_2}}{\sqrt{2j_2+1}}\langle j_1\, -m_1\, J\,M\,|\,j_2\, m_2\rangle \quad .$$

Sređivanjem se dobiva:

$$\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2\,|\,J\,M\rangle = (-1)^{j_1-J+m_2-(j_1-j_2+M)}\frac{\sqrt{2J+1}}{\sqrt{2j_2+1}}\langle j_1\, -m_1\, J\,M\,|\,j_2\, m_2\rangle \quad ,$$

te uz $m_1 + m_2 = M$ konačno dobivamo traženu jednakost:

$$\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 \,|\, J\, M\rangle = (-1)^{-J+j_2-m_1}\sqrt{\frac{2J+1}{2j_2+1}}\langle j_1\; -m_1\, J\, M \,|\, j_2\, m_2\rangle \quad .$$

1.5.3 Računanje 3j-simbola

3j-simbole je, kao i Clebsh-Gordonove koeficijente, trivijalno izračunati u nekim specijalnim slučajevima (a ostali se računaju iz rekurzivnih relacija).

Primjer 1: ako projekcije m_1 i m_2 poprimaju maksimalne vrijednosti, tj. ako vrijedi:

$$m_1 = j_1 \quad , \quad m_2 = j_2 \quad .$$

Tada je automatski ispunjeno i:

$$M = J = j_1 + j_2 \quad .$$

Dalje imamo:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_1+j_2 \\ j_1 & j_2 & -(j_1+j_2) \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2+j_1+j_2}}{\sqrt{2(j_1+j_2)+1}}\langle j_1\, j_1\, j_2\, j_2 \,|\, j_1+j_2\, j_1+j_2\rangle = \\ = \frac{1}{\sqrt{2(j_1+j_2)+1}} \quad .$$

Primjer 2: pogledajmo slučaj da je j_2=0 (što nužno povlači i da je m_2=0):

$$j_2 = 0 \;\; , \;\; m_2 = 0 \;\; , \;\; j_1 = j \;\; , \;\; m_2 = 0 \;\; , \;\; \Rightarrow \;\; , \;\; M = m \;\; i \;\; J = j \quad .$$

Tada imamo:

$$\begin{pmatrix} j & 0 & j \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j-0+m}}{\sqrt{2j+1}}\langle j\, m\, 0\, 0 \,|\, j\, m\rangle = \frac{(-1)^{j+m}}{\sqrt{2j+1}} \quad .$$

Može se izvesti i općenit izraz za bilo koji 3j-koeficijent (detalje pogledati u *Supek, str. 670*):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = (-1)^{a-b-f}\sqrt{\Delta(a,b,c)}\sqrt{(a+d)!(a-d)!(b+e)!(b-e)!(c+f)!(c-f)!}\,\cdot \\ \cdot \sum_t \frac{(-1)^t}{t!(c-b+t+d)!(c-a+t-e)!(a+b-c-t)!(a-t-d)!(b-t+e)!} \quad , \tag{1.56}$$

gdje je veličina Δ definirana s:

$$\Delta(a,b,c) \equiv \frac{(a+b-c)!(b+c-a)!(c+a-b)!}{(a+b+c+1)!} \quad .$$

Ovaj izraz naziva se Racahova formula za 3j-simbole. Suma se vrši po svim dozvoljenim cjelobrojnim vrijednostima varijable t (vidi zadatak 1.9 za detalje).

Zadatak 1.9
Pomoću Racahove formule za 3j-simbole izračunajte:

$$\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix} \quad .$$

Rješenje 1.9
Da bi 3j-simbol uopće bio različit od nule, mora vrijediti (vidi izraz 1.51) $m = m'$. Primijenimo Racahovu formulu; potrebne zamjene su:

$$a = j \;\; , \;\; b = 1 \;\; , \;\; c = j \;\; , \;\; d = -m \;\; , \;\; e = 0 \;\; , \;\; f = m \quad .$$

Uvrštavanjem u izraz 1.56 dobivamo:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix} &= (-1)^{j-1-m}\sqrt{\Delta(j,1,j)}\sqrt{(j-m)!(j+m)!(j+m)!(j-m)!}\cdot \\ &\cdot\sum_t \frac{(-1)^t}{t!(j-1+t-m)!t!(1-t)!(j-t+m)!(1-t)!} \quad ,\end{aligned}$$

gdje je:

$$\Delta(j,1,j) = \frac{1!1!(2j-1)!}{(2j+2)!} \quad .$$

Koji su mogući t-ovi u gornjoj sumi? Kao prvo, u nazivniku nam se pojavljuje faktor $t!$, što vodi na uvjet $t \geq 0$. Također, u nazivniku se pojavljuje i faktor $(1-t)!$ što vodi na uvjet $1-t \geq 0$, tj. $t \leq 1$. Jedina dva cjelobrojna t-a koja istovremeno zadovoljavaju ove uvjete su t=0 i t=1. Dakle, naša suma svest će se na samo dva člana.
Raspisujemo:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix} &= (-1)^{j-1-m}\sqrt{\frac{(2j-1)!}{(2j+2)!}(j-m)!(j+m)!}\cdot \\ &\cdot\left[\frac{1}{(j-m-1)!(j+m)!} - \frac{1}{(j-m)!(j+m-1)!}\right] = \\ &= (-1)^{j-1-m}\sqrt{\frac{(2j-1)!}{(2j-1)!(2j)(2j+1)(2j+2)}(j-m)!(j+m)!}\cdot \\ &\cdot\left[\frac{j-m-(j+m)}{(j-m)!(j+m)!}\right] = \\ &= (-1)^{j-1-m}\sqrt{\frac{1}{2j(2j+1)2(j+1)}(j-m)!(j+m)!}\frac{-2m}{(j-m)!(j+m)!} \\ &= (-1)^{j-1-m}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{j(2j+1)(j+1)}}(-2m) = \\ &= (-1)^{j-m}\frac{m}{\sqrt{j(2j+1)(j+1)}} \quad .\end{aligned}$$

Dakle:

$$\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix} = (-1)^{j-m}\frac{m}{\sqrt{j(2j+1)(j+1)}} \quad . \tag{1.57}$$

1.6 Zbrajanje tri momenta impulsa

Razmatranja iz prošlog poglavlja mogu se proširiti na (u nuklearnoj fizici vrlo čestu) situaciju kada trebamo zbrojiti tri momenta impulsa. Dakle, imamo tri momenta impulsa ($\hat{j}_1$,$\hat{j}_2$,$\hat{j}_3$) koji zadovoljavaju uobičajene komutacijske relacije (dakako, u različitim potprostorima) i računamo njihovu vektorsku sumu:

$$\hat{J} = \hat{j}_1 + \hat{j}_2 + \hat{j}_3 \quad , \tag{1.58}$$

Potpuna valna funkcija uključuje i dio ovog oblika:

$$|j_1\ m_1\ j_2\ m_2\ j_3\ m_3\ \rangle \quad .$$

Moguće su tri izbora baze čitavog sistema, ovisno i redoslijedu zbrajanja:

- $\diamond\ \hat{J} = (\hat{j}_1 + \hat{j}_2) + \hat{j}_3 = \hat{j}_{12} + \hat{j}_3$
- $\diamond\ \hat{J} = \hat{j}_1 + (\hat{j}_2 + \hat{j}_3) = \hat{j}_1 + \hat{j}_{23}$
- $\diamond\ \hat{J} = (\hat{j}_1 + \hat{j}_3) + \hat{j}_2 = \hat{j}_{13} + \hat{j}_2$

Te tri baze su međusobno povezane, npr.:

$$|j_1\ j_{23}\ J'\ M'\ \rangle = \sum_{j_{12}} \langle j_{12}\ j_3\ J\ M\ |j_1\ j_{23}\ J'\ M'\ \rangle \cdot |j_{12}\ j_3\ J\ M\ \rangle$$

Koeficijenti koji se pojavljuju pri transformaciji baza mogu se napisati i na drukčiji način:

$$\begin{aligned}
\langle j_{12}\ j_3\ J\ M\ |j_1\ j_{23}\ J'\ M'\ \rangle \quad &\equiv \quad \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)}W(j_1 j_2 J j_3; j_{12} j_{23})\delta_{JJ'}\delta_{MM'} \equiv \\
&\equiv \quad (-1)^{j_1+j_2+j_3+J}\sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} \delta_{JJ'}\delta_{MM'} \quad .
\end{aligned}$$

Vitičasta zagrada u ovom izrazu naziva se "Wignerov 6j-simbol" (ili koeficijent) dok $W(j_1 j_2 J j_3; j_{12} j_{23})$ nazivamo "Racahovim W-koeficijentom". Svi se ovi koeficijenti mogu raspisati preko 3j-koeficijenata - taj raspis nije trivijalan i neše se raditi u okviru ovog teksta (za detalje pogledati npr. u *Supek, str. 629*).

1.7 Sferični tenzorski operatori

Sferičnim tenzorskim operatorom T_q^k ranga k zovemo skup $2k{+}1$ veličina koje se pri rotaciji koordinatnog sustava transformiraju na ovaj način:

$$T'^{(k)}_q = D(\alpha,\beta,\gamma) T^{(k)}_q D^*(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{q'=-k}^{k} T^{(k)}_{q'} D^k_{q'q}(\alpha,\beta,\gamma) \quad , \tag{1.59}$$

Osnovna razlika sferičnih tenzorskih operatora u odnosu na npr. Kartezijeve tenzore je u njihovoj ireducibilnosti (za tenzor ćemo reći da je ireducibilan ako se ne može napisati kao unutrašnji produkt tenzora nižeg ranga). Raspisujući gornji izraz za infinitezimalne rotacije, može se pokazati (vidi npr. *Sakurai*, str. 236):

$$\left[J_z, T^{(k)}_q\right] = \hbar q T^{(k)}_q \quad , \tag{1.60}$$

$$\left[J^{\pm}, T^k_q\right] = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q)}T^{(k)}_{q\pm 1} \quad . \tag{1.61}$$

Ova dva izraza ponekad se koriste i kao definicija sferičnih tenzorskih operatora (vidi npr. *Greiner*, str. 162).

Zadatak 1.10

Neka je $\boldsymbol{V}$ vektorski operator - krećući od njega konstruirajte sferični tenzorski operator ranga 1!

Rješenje 1.10

Budući je $\boldsymbol{V}$ vektorski operator, on zadovoljava sljedeću komutacijsku relaciju:

$$[V_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}V_k \quad . \tag{1.62}$$

S druge strane, sferični tenzorski operator prvog ranga mora zadovoljavati izraze 1.60 i 1.61 (uz k=1):

$$\left[J_z, V_q^{(1)}\right] = \hbar q T_q^k \quad , \tag{1.63}$$

$$\left[J_\pm, V_q^{(1)}\right] = \hbar\sqrt{(1 \mp q)(2 \pm q)}V_{q\pm1}^{(1)} \quad . \tag{1.64}$$

Krenimo od komutacijske relacije 1.62; za iste indekse ona daje:

$$[J_z, V_z] = 0 \quad .$$

Vidimo da će se dobiveni izraz moći svesti na relaciju 1.63 ako je q=0. Dakle,

$$V_0^{(1)} = V_z \quad .$$

Sada možemo iskoristiti izraz 1.64 da izračunamo ostale komponente sferičnog tenzorskog operatora:

$$\left[J^+, V_0^{(1)}\right] = \sqrt{2}\hbar V_{+1}^{(1)} \quad .$$

Dakle,

$$\begin{aligned} V_{+1}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left[J^+, V_0^{(1)}\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left[J_x + iJ_y, V_z\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left(-i\hbar V_y + i(i\hbar)V_x\right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y) \quad . \end{aligned} \tag{1.65}$$

Posve analogno:

$$\left[J^-, V_0^{(1)}\right] = \sqrt{2}\hbar V_{-1}^{(1)} \quad .$$

$$\begin{aligned} V_{-1}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left[J^-, V_0^{(1)}\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left[J_x - iJ_y, V_z\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left(-i\hbar V_y - i(i\hbar)V_x\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y) \quad . \end{aligned} \tag{1.66}$$

Dakle, komponente sferičnog tenzorskog operatora su:

$$V_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y) \quad , \quad V_0^{(1)} = V_z \quad , \quad V_{+1}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y) \tag{1.67}$$

Zadatak 1.11
Sferični tenzor $T_q^{(k)}$ može se konstruirati od postojećih ireducibilnih sferičnih tenzora $X_{q_1}^{(k_1)}$ i $Z_{q_2}^{(k_2)}$ na ovaj način:

$$T_q^{(k)} = \sum_{q_1,q_2} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | kq \rangle X_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)} \quad . \tag{1.68}$$

Upotrijebite tenzor $V_q^{(1)}$ dan u izrazu 1.67 (u prošlom zadatku) i kao $X_{q_1}^{(k_1)}$ i kao $Z_{q_2}^{(k_2)}$, te konstruirajte novi tenzor ranga 2.

Rješenje 1.11
Koristimo izraz 1.68 uz:

$$X_{q_1}^{(k_1)} = V_{q_1}^{(1)} \quad , \quad Z_{q_2}^{(k_2)} = V_{q_2}^{(1)} \quad .$$

Dobivamo (svi CG-koeficijenti koji nisu eksplicitno navedeni su jednaki nuli!):

$$\begin{aligned} T_{+2}^{(2)} &= \langle 1\,1\,1\,1\,|2\,2\rangle V_1^{(1)} V_1^{(1)} = \\ &= V_1^{(1)} V_1^{(1)} = \frac{1}{2}(-)\,(V_x + iV_y)\,(-)\,(V_x + iV_y) = \\ &= \frac{1}{2}\left(V_x^2 - V_y^2 + 2iV_xV_y\right) \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{+1}^{(2)} &= \langle 1\,0\,1\,1\,|2\,1\rangle V_0^{(1)} V_1^{(1)} + \langle 1\,1\,1\,0\,|2\,1\rangle V_1^{(1)} V_0^{(1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} V_0^{(1)} V_1^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} V_1^{(1)} V_0^{(1)} = \\ &= -\frac{1}{2}\,(V_zV_x + V_xV_z + iV_zV_y + iV_yV_z) \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{+0}^{(2)} &= \langle 1\,0\,1\,0\,|2\,0\rangle V_0^{(1)} V_0^{(1)} + \langle 1\,1\,1\,-1\,|2\,0\rangle V_1^{(1)} V_{-1}^{(1)} + \langle 1\,-1\,1\,0\,|2\,0\rangle V_{-1}^{(1)} V_1^{(1)} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} V_0^{(1)} V_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{6}} V_1^{(1)} V_{-1}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{6}} V_{-1}^{(1)} V_1^{(1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2V_z^2 - \frac{1}{2}V_x^2 - \frac{i}{2}V_xV_y + \frac{i}{2}V_yV_x - \frac{1}{2}V_y^2 - \frac{1}{2}V_x^2 + \frac{i}{2}V_xV_y - \frac{y}{2}V_yV_x - \frac{1}{2}V_y^2\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2V_z^2 - V_x^2 - V_y^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{1.69}$$

$$\begin{aligned} T_{-1}^{(2)} &= \langle 1\,0\,1\,-1\,|2\,-1\rangle V_0^{(1)} V_{-1}^{(1)} + \langle 1\,-1\,1\,0\,|2\,-1\rangle V_{-1}^{(1)} V_0^{(1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} V_0^{(1)} V_{-1}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{-1}^{(1)} V_0^{(1)} = \\ &= \frac{1}{2}\,(V_zV_x + V_xV_z + iV_zV_y + iV_yV_z) \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{-2}^{(2)} &= \langle 1\,-1\,1\,-1\,|2\,-2\rangle V_{-1}^{(1)} V_{-1}^{(1)} = \\ &= V_{-1}^{(1)} V_{-1}^{(1)} = \frac{1}{2}\,(V_x - iV_y)\,(V_x - iV_y) = \\ &= \frac{1}{2}\left(V_x^2 - V_y^2 - 2iV_xV_y\right) \quad . \end{aligned}$$

1.8 Wigner-Eckartov teorem

Wigner-Eckartov teorem za neki matrični element sferičnog tenzorskog operatora odvaja njegov "geometrijski" dio (dio ovisan o "magnetskim" kvantnim brojevima m, m' i q) od ostatka matričnog elementa (koji onda zovemo "recucirani matrični element"). Preciznije, Wigner-Eckartov teorem glasi ovako: matrični element sferičnog tenzorskog operatora u danoj bazi momenta impulsa može se uvijek napisati kao:

$$\langle \alpha' \,,\; j' \, m' | T_q^{(k)} | \alpha \,,\, j \, m \rangle = \langle j \, m \, k \; q \, | j' \, m' \rangle \frac{\langle \alpha' \,,\, j' || T^{(k)} || \alpha \,,\, j \rangle}{\sqrt{2j'+1}} \tag{1.70}$$

gdje je s dvostrukom crtom označen reducirani matrični element, neovisan o magnetskim kvantnim brojevima m, m' i q (a s α su označeni svi ostali kvantni brojevi). Prvi član na desnoj strani Wigner-Eckartovog teorema je Clebsh-Gordonov koeficijen ovisan o orijentaciji sistema s obzirom na z-os (dakle, on uključuje geometriju i simetriju problema). Dokaz teorema neće biti dan ovdje i može se naći npr. u *Suhonen*.

U praksi, Wigner-Eckartov teorem koristi se na sljedeći način: za neku odabranu vrijednost kvantnih brojeva m, m' i q izračuna se reducirani matrični element, koji se zatim iskoristi za računanje matričnih elemenata za svaku drugu kombinaciju kvantnih brojeva. Dakako, reducirani matrični element računa se s onom kombinacijom kvantnih brojeva m, m' i q za koju je taj račun najjednostavniji.

Zadatak 1.12
Pomoću Wigner-Eckartovog teorema izračunajte:

$$\langle \alpha' \,,\, j' \, m' | J^1_m | \alpha'' \,,\, j' \, m'' \rangle \quad .$$

Rješenje 1.12
Primjenjujemo Wigner-Eckartov teorem za sferični tenzorski operator J^1:

$$J^1_0 = J_z \quad , \quad J^1_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} J^\pm \quad .$$

Dakle, biramo $T_q^{(k)} = J^1_m$, a u Wigner-Eckartov teorem uvrštavamo i $j''{=}j'$ (jer se traži matrični element za koji to vrijedi):

$$\langle \alpha' \,,\; j' \, m' | J^1_m | \alpha'' \,,\, j' \, m'' \rangle = \langle j' \, m'' \, 1 \; m \, | j' \, m' \rangle \frac{\langle \alpha' \,,\, j' || J^1 || \alpha'' \,,\, j' \rangle}{\sqrt{2j'+1}} \tag{1.71}$$

Da bi izračunali reducirani matrični element, biramo specijalnu kombinaciju magnetskih kvantnih brojeva. Npr. dovoljno je izabrati $m{=}0$ jer znamo kako $J^1_0{=}J_z$ djeluje na svako stanje s kvantnim brojevima j i m:

$$\langle \alpha' \,,\; j' \, m' | J^1_0 | \alpha'' \,,\, j' \, m'' \rangle = m' \delta_{\alpha' \alpha''} \delta_{m'' m'} \tag{1.72}$$

To je ujedno i lijeva strana Wigner-Eckartovog teorema za ovaj specijalni izbor kvantnih brojeva. Da bi izračunali reducirani matrični element, treba nam još odgovarajući Clebsh-Gordonov koeficijent (tj. 3j-simbol):

$$\langle j'\, m''\, 1\, 0\,|j'\, m'\rangle = (-1)^{j'-1+m'}\sqrt{2j'+1}\begin{pmatrix} j' & 1 & j' \\ m'' & 0 & -m' \end{pmatrix} \quad .$$

Ovaj 3j-simbol smo izračunali u zadatku 1.9 (izraz 1.57):

$$\begin{pmatrix} j' & 1 & j' \\ -m'' & 0 & m' \end{pmatrix} = (-1)^{j'-m'}\frac{m'}{\sqrt{j'(2j'+1)(j'+1)}}\delta_{m''m'} \quad ,$$

pa za traženi Clebsh-Gordonov koeficijent dobivamo:

$$\langle j'\, m''\, 1\, 0\,|j'\, m'\rangle = \delta_{m''m'}\frac{m'}{\sqrt{j'(j'+1)}} \quad . \tag{1.73}$$

Uvrštvanjem izraza 1.72 i 1.73 u Wigner-Eckartov teorem, izraz 1.71, dobivamo:

$$\begin{aligned} \langle \alpha'\,,\, j'||J^1||\alpha''\,,\, j'\rangle &= m'\delta_{\alpha'\alpha''}\delta_{m''m'}\frac{\sqrt{j'(j'+1)}}{m'}\sqrt{2j'+1} = \\ &= \delta_{\alpha'\alpha''}\delta_{m''m'}\sqrt{j'(j'+1)(2j'+1)} = \\ &= \delta_{\alpha'\alpha''}\sqrt{j'(j'+1)(2j'+1)} \quad . \end{aligned} \tag{1.74}$$

U zadnjem je koraku eksplicitno uzeta u obzir činjenica da reducirani matrični element *ne* ovisi o kvantnim brojevima m' i m''. Sada kada znamo reducirani matrični element, ponovnom primjenom Wigner-Eckartovog teorema nalazimo traženi matrični element:

$$\begin{aligned} \langle \alpha'\,,\, j'\, m'|J^1_m|\alpha''\,,\, j'\, m''\rangle &= = \langle j'\, m''\, 1\; m\,|j'\, m'\rangle\frac{\langle \alpha'\,,\, j'||J^1||\alpha''\,,\, j'\rangle}{\sqrt{2j'+1}} = \\ &= \langle j'\, m''\, 1\; m\,|j'\, m'\rangle\delta_{\alpha'\alpha''}\frac{\sqrt{j'(j'+1)(2j'+1)}}{\sqrt{2j'+1}} = \\ &= \delta_{\alpha'\alpha''}\langle j'\, m''\, 1\; m\,|j'\, m'\rangle\sqrt{j'(j'+1)} \quad . \end{aligned} \tag{1.75}$$

1.8.1 Projekcijski teorem

Specijalan slučaj Wigner-Eckartovog teorema za vektorske operatore (koji su podgrupa tenzorskih) i za $j'=j$:

$$\langle \alpha'\,,\, j\, m'|V_q|\alpha\,,\, j\, m\rangle = \frac{\langle \alpha'\,,\, j\, m'|\hat{j}\cdot\hat{V}|\alpha\,,\, j\, m\rangle}{\hbar^2 j(j+1)}\langle j\, m'|J_q|j\, m\rangle \quad . \tag{1.76}$$

Značaj projekcijskog teorema vidi se npr. pri računanju magnetskog dipolnog momenta μ za neparne jezgre:

$$\hat{V} = \hat{\mu} = \hat{\mu_l} + \hat{\mu_s} = g_l\mu_N\hat{l} + g_s\mu_N\hat{s} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \langle j\, m'|\mu_z|j\, m\rangle &= \frac{\langle j\, m'|\hat{j}\cdot\hat{\mu}|j\, m\rangle}{j(j+1)}\rangle\langle j\, m'|j_z|j\, m\rangle = \\ &= \frac{m\langle j\, m'|\hat{j}\cdot\hat{\mu}|j\, m\rangle}{j(j+1)}\rangle \end{aligned} \tag{1.77}$$

Ovaj posljednji izraz iskoristit ćemo pri računanju tzv. Schidtovih granica u modelu ljusaka.

1.9 Dodatni riješeni zadaci

Zadatak 1.13
Pokažite da se vezanjem spina i orbitalnog momenta impulsa dobiva spinorna valna funkcija za nukleone oblika:

$$Y_l^{j=l\pm 1/2,m} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{l\pm m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m-1/2} \\ \sqrt{\frac{l\mp m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m+1/2} \end{pmatrix}$$

koja je vlastita valna funkcija skupa operatora:

$$\left\{ \boldsymbol{J}^2, J_z, \boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{S}^2 . \right\}$$

Rješenje 1.13
Gledamo vezanje spina i orbitalnog momenta impulsa:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &\rightarrow s = 1/2; \;\; m_s = \pm 1/2 \quad , \\ \boldsymbol{L} &\rightarrow l; \;\; m_l = -l, \dots, l-1, l \quad , \end{aligned}$$

te dvije baze:

$$\begin{aligned} \left\{ \boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{S}^2, L_z, S_z \right\} &\rightarrow |l\ m_l\ s\ m_s\rangle \quad , \\ \left\{ \boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{J}^2, J_z \right\} &\rightarrow |l\ s\ j\ m\rangle \equiv |j\ m\rangle \quad . \end{aligned}$$

Veza među bazama dana je, dakako, Clebsch-Gordanovim koeficijentima:

$$|j\ m\rangle = \sum_{m_l, m_s} \langle l\ m_l\ s\ m_s | j\ m\rangle |l\ m_l\ s\ m_s\rangle \quad .$$

Za svaki l (osim za l=0) postoje dvije moguće vrijednosti za j: j=$l\pm 1/2$; uvrstimo li to u gornju jednadžbu, dobivamo (uz m_l+m_s=m!):

$$\begin{aligned} |(j = l\pm 1/2)\ m\rangle &= \sum_{m_l} \sum_{m_s=-1/2}^{1/2} \langle l\ m_l\ 1/2\ m_s | (j = l\pm 1/2)\ m\rangle |l\ m_l\ 1/2\ m_s\rangle = \\ &= \langle l\ (m{+}1/2)\ 1/2\ {-1/2} | (j = l\pm 1/2)\ m\rangle |l\ (m{+}1/2)\ 1/2\ {-1/2}\rangle + \\ &\quad + \langle l\ (m{-}1/2)\ 1/2\ 1/2 | (j = l\pm 1/2)\ m\rangle |l\ (m{-}1/2)\ 1/2\ 1/2\rangle \quad . \end{aligned}$$

Pogledajmo prvo slučaj j=l+1/2. Uzmimo prvo da je m maksimalan; tj. m=l+1/2. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} |(l{+}1/2)\ (l{+}1/2)\rangle &= \langle l\ l\ 1/2\ {-1/2} | (l{+}1/2)\ (l{+}1/2)\rangle |l\ l\ 1/2\ {-1/2}\rangle + \\ &\quad + \langle l\ l\ 1/2\ 1/2 | (l{+}1/2)\ (l{+}1/2)\rangle |l\ l\ 1/2\ 1/2\rangle = \\ &= 0 \cdot |l\ l\ 1/2\ {-1/2}\rangle + 1 \cdot |l\ l\ 1/2\ 1/2\rangle = \\ &= |l\ l\ 1/2\ 1/2\rangle \quad . \end{aligned}$$

Na dobivenu jednakost:

$$|(l{+}1/2)\ (l{+}1/2)\rangle = |l\ l\ 1/2\ 1/2\rangle$$

primijenit ćemo operator spuštanja J^-, izraz 1.18 (za koji vrijedi $J^-{=}L^-{+}S^-$):

$$J^-|(l{+}1/2)\ (l{+}1/2)\rangle = \left(L^- + S^-\right)|l\ l\ 1/2\ 1/2\rangle \quad . \tag{1.78}$$

Znajući kako operator J^- djeluje na stanje $|j\ m\rangle$ (izraz 1.24):

$$J^-|j\,,\,m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\hbar|j\,,\,m-1\rangle \quad ,$$

dobivamo:

$$\begin{aligned} J^-|(l{+}1/2)\ (l{+}1/2)\rangle &= \hbar\sqrt{(l+1/2+l+1/2)(l+1/2-l-1/2+1)}\ |(l{+}1/2)\ (l{-}1/2)\rangle = \\ &= \hbar\sqrt{2l+1}\ |(l{+}1/2)\ (l{-}1/2)\rangle \quad . \end{aligned}$$

Dakle,

$$|(l{+}1/2)\ (l{-}1/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}\hbar}\ J^-|(l{+}1/2)\ (l{+}1/2)\rangle \quad , \tag{1.79}$$

S druge strane, vrijedi:

$$\begin{aligned} \left(L^- + S^-\right)|l\ l\ 1/2\ 1/2\rangle &= \sqrt{(l+l)(l-l+1)}\hbar\ |l\ l-1\ 1/2\ 1/2\rangle + \\ &\quad + \sqrt{(1/2+1/2)(1/2-1/2+1)}\hbar\ |l\ l\ 1/2\ \ -1/2\rangle = \\ &= \sqrt{2l}\hbar\ |l\ l-1\ 1/2\ 1/2\rangle + |l\ l\ 1/2\ \ -1/2\rangle \end{aligned} \tag{1.80}$$

Kombiniranjem izraza 1.78, 1.79 i 1.80, dobivamo:

$$|(l{+}1/2)\ (l{-}1/2)\rangle = \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}\ |l\ l-1\ 1/2\ 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\ |l\ l\ 1/2\ \ -1/2\rangle \quad . \tag{1.81}$$

Ponavnom primjenom operatora poništavanja na dobiveno stanje dobilo bi se:

$$|(l{+}1/2)\ (l{-}3/2)\rangle = \sqrt{\frac{2l-1}{2l+1}}\ |l\ l{-}2\ 1/2\ 1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{2l+1}}\ |l\ l{-}1\ 1/2\ {-}1/2\rangle \quad . \tag{1.82}$$

Može se pokazati da se za neki općenit m dobiva:

$$\begin{aligned} |(l{+}1/2)\ m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\Big[\sqrt{l+m+1/2}\ |l\ m-1/2\ 1/2\ 1/2\rangle + \\ &\quad + \sqrt{l-m+1/2}\ |l\ m+1/2\ 1/2\ \ -1/2\rangle\Big] \quad . \end{aligned}$$

Analogno se može pokazati:

$$\begin{aligned} |(l{-}1/2)\ m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\Big[-\sqrt{l-m+1/2}\ |l\ m-1/2\ 1/2\ 1/2\rangle + \\ &\quad + \sqrt{l+m+1/2}\ |l\ m+1/2\ 1/2\ \ -1/2\rangle\Big] \quad . \end{aligned}$$

Sva stanja sada možemo napisati preko kuglinih funkcija:

$$|l\ m-1/2\ 1/2\ 1/2\rangle = R_{nl}Y_l^{m-1/2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad ,$$

$$|l\ m+1/2\ 1/2\ -1/2\rangle = R_{nl}Y_l^{m+1/2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad ,$$

pa konačno dobivamo:

$$Y_l^{j=l\pm 1/2,m} = \begin{pmatrix}\pm\sqrt{\frac{l\pm m+1/2}{2l+1}}Y_l^{m-1/2}\\ \sqrt{\frac{l\mp m+1/2}{2l+1}}Y_l^{m+1/2}\end{pmatrix} \quad ,$$

što se i tražilo u zadatku.

Zadatak 1.14

Dokažite operatorsku jednakost:

$$e^{-i\Phi\hat{j}_i}e^{i\Theta\hat{j}_k}e^{i\Phi\hat{j}_i} = e^{i\Theta\left\{\cos(\Phi)\hat{j}_k+\sin(\Phi)\epsilon_{ikl}\hat{j}_l\right\}}$$

gdje su s $\hat{j}_l$ dane komponente momenta impulsa koje zadovoljavaju uobičajene komutacijske operacije:

$$\left[\hat{j}_i,\hat{j}_k\right] = i\epsilon_{ikl}\hat{j}_l.$$

Koristite Baker-Hausdorffovu lemu (*Sakurai, str. 96*):

$$e^{iG\lambda}Ae^{-iG\lambda} = A + i\lambda[G,A] + \left(\frac{i^2\lambda^2}{2!}[G,[G,A]] + \cdots\right)$$

Rješenje 1.14

Izračunajmo prvo:

$$e^{-i\Phi\hat{j}_i}\hat{j}_k e^{i\Phi\hat{j}_i}$$

Koristimo Baker-Hausdorffovu lemu; u našem slučaju vrijedi:

$$A = \hat{j}_k \quad , \quad G = \hat{j} \quad , \quad \lambda = -\phi \quad .$$

Uvrštavanjem dobivamo:

$$e^{-i\Phi\hat{j}_i}\hat{j}_k e^{i\Phi\hat{j}_i} = \hat{j}_k - i\Phi\left[\hat{j}_i,\hat{j}_k\right] - \frac{\Phi^2}{2}\left[\hat{j}_i,\left[\hat{j}_i,\hat{j}_k\right]\right] + \cdots$$

Znamo da vrijedi:

$$\left[\hat{j}_i,\hat{j}_k\right] = i\epsilon_{ikl}\hat{j}_l \quad ,$$

pa možemo pojednostaviti:

$$\left[\hat{j}_i,\left[\hat{j}_i,\hat{j}_k\right]\right] = \left[\hat{j}_i, i\epsilon_{ikl}\hat{j}_l\right] = i\epsilon_{ikl}\left[\hat{j}_i,\hat{j}_l\right] = i\epsilon_{ikl}i\epsilon_{ilk}\hat{j}_k = i^2\epsilon_{ikl}(-\epsilon_{ikl})\hat{j}_k = \hat{j}_k \quad .$$

Sljedeći član u razvoju reda iz Baker-Hausdorffove leme bit će:

$$\left[\hat{j}_i,\left[\hat{j}_i,\left[\hat{j}_i,\hat{j}_k\right]\right]\right]=\left[\hat{j}_i,\hat{j}_k\right]=i\epsilon_{ikl}\hat{j}_l \quad .$$

Vidimo da ćemo za članove s parnim brojem komutatora uvijek dobivati $\hat{j}_k$, a za članove s neparnim brojem komutatora $i\epsilon_{ikl}\hat{j}_l$. Razvoj stoga postaje:

$$\begin{aligned} e^{-i\Phi\hat{j}_i}\hat{j}_k e^{i\Phi\hat{j}_i} &= \left(1-\frac{\Phi^2}{2!}+\frac{\Phi^4}{4!}-\cdots\right)\hat{j}_k+\left(-i\Phi-i^3\frac{\Phi^3}{3!}-\cdots\right)i\epsilon_{ikl}\hat{j}_l= \\ &= \cos\Phi\hat{j}_k+\sin\Phi\epsilon_{ikl}\hat{j}_l \quad . \end{aligned}$$

Budući da je:

$$e^{i\Phi\hat{j}_i}e^{-i\Phi\hat{j}_i}=1$$

nadalje vrijedi:

$$\begin{aligned} e^{-i\Phi\hat{j}_i}\hat{j}_k^{\,2}e^{i\Phi\hat{j}_i} &= e^{-i\Phi\hat{j}_i}\hat{j}_k e^{i\Phi\hat{j}_i}e^{-i\Phi\hat{j}_i}\hat{j}_k e^{i\Phi\hat{j}_i}= \\ &= \left(\cos\Phi\hat{j}_k+\sin\Phi\epsilon_{ikl}\hat{j}_l\right)^2 \quad . \end{aligned}$$

Sada smo spremni izračunati izraz koji je zadan:

$$\begin{aligned} e^{-i\Phi\hat{j}_i}e^{i\Theta\hat{j}_k}e^{i\Phi\hat{j}_i} &= e^{-i\Phi\hat{j}_i}\left(1+i\Theta\hat{j}_k-\frac{\Theta^2}{2!}\hat{j}_k^{\,2}-\frac{\Theta^3}{3!}\hat{j}_k^{\,3}+\cdots\right)e^{i\Phi\hat{j}_i}= \\ &= e^{-i\Phi\hat{j}_i}e^{i\Phi\hat{j}_i}+i\Theta e^{-i\Phi\hat{j}_i}\hat{j}_k e^{i\Phi\hat{j}_i}-\frac{\Theta^2}{2!}i\Theta e^{-i\Phi\hat{j}_i}\hat{j}_k^{\,2}e^{i\Phi\hat{j}_i}+\cdots= \\ &= 1+i\Theta\left(\cos\Phi\hat{j}_k+\sin\Phi\epsilon_{ikl}\hat{j}_l\right)-\frac{\Theta^2}{2!}\left(\cos\Phi\hat{j}_k+\sin\Phi\epsilon_{ikl}\hat{j}_l\right)^2+\cdots= \\ &= e^{i\Theta\left\{\cos(\Phi)\hat{j}_k+\sin(\Phi)\epsilon_{ikl}\hat{j}_l\right\}} \quad , \end{aligned} \tag{1.83}$$

što je i trebalo pokazati.

Zadatak 1.15

Upotrebom Wigner-Eckartovog teorema i Gauntove formule:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{l_1}^{m_1*}(\theta,\phi)Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\phi)Y_{l_3}^{m_3}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi= \\ &\qquad=(-1)^{m_1}\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

pokažite da za reducirani matrični element vrijedi:

$$\langle l_1||\mathbf{Y}_{l_2}||l_3\rangle=(-1)^{l_1}\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

.

Rješenje 1.15
Lijevi dio Gauntove formule možemo zapisati ovako:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{l_1}^{m_1 *}(\theta,\phi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\phi) Y_{l_3}^{m_3}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = \langle l_1\ m_1 | Y_{l_2}^{m_2} | l_3\ m_3\rangle \quad ,$$

te primijeniti Wigner-Eckartov teorem:

$$\langle l_1\ m_1 | Y_{l_2}^{m_2} | l_3\ m_3\rangle = \langle l_3\ m_3\ l_2\ m_2 | l_1\ m_1\rangle \frac{\langle l_1 || Y_{l_2} || l_3\rangle}{\sqrt{2l_1+1}} \quad . \tag{1.84}$$

Dobivamo dakle:

$$\begin{aligned}\langle l_1 || Y_{l_2} || l_3\rangle &= (-1)^{m_1}\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}}\cdot\frac{\sqrt{(2l_1+1)}}{\langle l_3\ m_3\ l_2\ m_2 | l_1\ m_1\rangle}\cdot \\ &\cdot\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix} \quad .\end{aligned} \tag{1.85}$$

Raspisat ćemo posljednji faktor upotrebom veze 3j-simbola i Clebsch-Gordonovih koeficijenata (izraz 1.52), ali prije toga ćemo zamijeniti prvi i treći stupac u 3j-simbolu (izraz 1.54):

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix} &= (-1)^{l_1+l_2+l_3}\begin{pmatrix} l_3 & l_2 & l_1 \\ m_3 & m_2 & -m_1\end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{l_1+l_2+l_3}\frac{(-1)^{l_3-l_2+m_1}}{\sqrt{2l_1+1}}\langle l_3\ m_3\ l_2\ m_2 | l_1\ m_1\rangle = \\ &= \frac{(-1)^{l_1+m_1}}{\sqrt{2l_1+1}}\langle l_3\ m_3\ l_2\ m_2 | l_1\ m_1\rangle \quad .\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u izraz 1.85 dobivamo:

$$\begin{aligned}\langle l_1 || Y_{l_2} || l_3\rangle &= (-1)^{m_1}\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}}\cdot\frac{\sqrt{(2l_1+1)}}{\langle l_3\ m_3\ l_2\ m_2 | l_1\ m_1\rangle}\cdot \\ &\cdot\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{(-1)^{l_1+m_1}}{\sqrt{2l_1+1}}\langle l_3\ m_3\ l_2\ m_2 | l_1\ m_1\rangle = \\ &= (-1)^{l_1}\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad .\end{aligned} \tag{1.86}$$

što je i trebalo pokazati.

Zadatak 1.16
Dokažite da za svaki j vrijedi:

$$\sum_{m=-j}^{j} m^2 |d^j_{m'm}(\beta)|^2 = \frac{1}{2}j(j+1)\sin^2\beta + \frac{1}{2}m'^2(3\cos^2\beta - 1) \quad .$$

Rješenje 1.16

Ovaj zadatak na početku riješavamo kao i zadatak 1.5:

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=-j}^{j} \left| d^j_{m'\,m}(\beta) \right|^2 m^2 &= \sum_{m=-j}^{j} m^2 \left| \langle j\, m | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | j\, m' \rangle \right|^2 = \\
&= \sum_{m=-j}^{j} m^2 \langle j\, m | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | j\, m' \rangle \langle j\, m | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | j\, m' \rangle^* = \\
&= \sum_{m=-j}^{j} m^2 \langle j\, m | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | j\, m' \rangle \langle j\, m' | e^{iJ_y\beta/\hbar} | j\, m \rangle = \\
&= \sum_{m=-j}^{j} \langle j\, m' | e^{iJ_y\beta/\hbar} m^2 | j\, m \rangle \langle j\, m | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | j\, m' \rangle = \\
&= \langle j\, m' | e^{iJ_y\beta/\hbar} \left(\sum_{m=-j}^{j} m^2 | j\, m \rangle \langle j\, m | \right) e^{-iJ_y\beta/\hbar} | j\, m' \rangle = \\
&= \frac{1}{\hbar} \langle j\, m' | e^{iJ_y\beta/\hbar} J_z^2 e^{-iJ_y\beta/\hbar} | j\, m' \rangle = \\
&= \frac{1}{\hbar} \langle j\, m' | D(\beta, \hat{y}) J_z^2 D^*(\beta, \hat{y}) | j\, m' \rangle \quad .
\end{aligned}
$$

U zadatku 1.4 u ovom trenutku smo iskoristili pravilo za rotaciju vektorskog operatora; no, u ovom zadatku ne rotiramo vektorski operator, već njegov kvadrat. Usporedbom s izrazom 1.69 vidimo da njega možemo raspisati preko "nulte" komponenata sferičnog tenzora ranga 2:

$$
T_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(3J_z^2 - J^2 \right) \quad ,
$$

$$
J_z^2 = \frac{\sqrt{6}}{3} T_0^{(2)} + \frac{1}{3} J^2 \quad .
$$

Budući da rotacija ne mijenja ukupni moment impulsa (već eventualno njegovu projekciju):

$$
D(R) J^2 D^*(R) = J^2 D(R) D^*(R) = J^2 \quad ,
$$

dobivamo:

$$
\sum_{m=-j}^{j} \left| d^j_{m'\,m}(\beta) \right|^2 m^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{\hbar^2} \langle j\, m' \, | J^2 | j\, m' \rangle + \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{1}{\hbar^2} \langle j\, m' | D(\beta, \hat{y}) T_0^{(2)} D^*(\beta, \hat{y}) | j\, m' \rangle \quad . \tag{1.87}
$$

Iz definicije sferičnih tenzora (izraz 1.59):

$$
T'^k_q = D(\alpha, \beta, \gamma) T^k_q D^*(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{q'=-k}^{k} T^k_{q'} D^k_{q'q}(\alpha, \beta, \gamma) \quad ,
$$

dobivamo:

$$\begin{aligned}\langle j\,m'|D(\beta,\hat{y})T_0^{(2)}D^*(\beta,\hat{y})|j\,m'\rangle &= \langle j\,m'|\sum_{q'=-2}^{2}T_{q'}^{(2)}D_{q'0}^{(2)}(\beta,\hat{y})|j\,m'\rangle = \\ &= \sum_{q'=-2}^{2}D_{q'0}^{(2)}(\beta,\hat{y})\langle j\,m'|T_{q'}^{(2)}|j\,m'\rangle \quad .\end{aligned}$$

Wigner-Eckartov teorem nam daje:

$$\langle j\,m'|T_{q'}^{(2)}|j\,m'\rangle = 0 \quad \text{za} \quad q' \neq 0 \quad .$$

Uvrštavanjem u izraz 1.87, dobivamo:

$$\begin{aligned}\sum_{m=-j}^{j}\left|d_{m'\,m}^{j}(\beta)\right|^2 m^2 &= \frac{1}{3\hbar^2}\hbar^2 j(j+1) + \frac{1}{\hbar^2}\sqrt{\frac{2}{3}}D_{00}^{(2)}(\beta,\hat{y})\langle j\,m'|T_{q'}^{(2)}|j\,m'\rangle = \\ &= \frac{1}{3}j(j+1) + d_{00}^{(2)}(\beta)\langle j\,m'|\left(J_z^2 - 1/3J^2\right)|j\,m'\rangle = \\ &= \frac{1}{3}j(j+1) + d_{00}^{(2)}(\beta)\left[m'^2 - \frac{1}{3}j(j+1)\right] \quad .\end{aligned}$$

Znajući (vidi zadatak 1.3, izraz 1.42):

$$d_{00}^{(2)}(\beta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1) \quad ,$$

sad dobivamo:

$$\begin{aligned}\sum_{m=-j}^{j}\left|d_{m'\,m}^{j}(\beta)\right|^2 m^2 &= \frac{1}{3}j(j+1) + \frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1)\left[m'^2 - \frac{1}{3}j(j+1)\right] = \\ &= \frac{1}{3}j(j+1) + \frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1)m'^2 - \frac{1}{2}j(j+1)\cos^2\beta + \frac{1}{6}j(j+1) = \\ &= \frac{1}{2}j(j+1)\sin^2\beta + \frac{1}{2}m'^2(3\cos^2\beta - 1) \quad ,\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

Zadatak 1.17

Pokažite da je za operator identiteta **1**, operator momenta impulsa **J**, sferni harmonik $\mathbf{Y_L}$ i operator spina **S**, reducurani matrični element definiran Wigner-Eckartovim teoremom dan s:

$$\langle j'||\mathbf{1}||j\rangle = \delta_{jj'}\sqrt{2j+1} \quad ;$$

$$\langle j'||\mathbf{J}||j\rangle = \delta_{jj'}\hbar\sqrt{j(j+1)(2j+1)} \quad ;$$

$$\langle 1/2||\mathbf{S}||1/2\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}\hbar \quad .$$

$$\langle l'||\mathbf{Y_L}||l\rangle = (-1)^{l'}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{(2l'+1)(2L+1)(2l+1)}\begin{pmatrix} l' & L & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

Rješenje 1.17
U sva četiri slučaja kreće se od Wigner-Eckartovog teorema, izraz 1.70:

$$\langle \alpha' \,,\; j'\, m' | T_q^{(k)} | \alpha \,,\, j\, m \rangle = \langle j\, m\, k\; q \,| j'\, m' \rangle \frac{\langle \alpha' \,,\, j' || T^{(k)} || \alpha \,,\, j \rangle}{\sqrt{2j'+1}}$$

Pogledajmo prvo što se dobiva uvrštavanjem u ovaj teorem jediničnog operatora ($T_q^{(k)}$=$\mathbf{1}$):

$$\langle \alpha' \,,\; j'\, m' | \mathbf{1} | \alpha \,,\, j\, m \rangle = \langle j\, m\, 0\; 0 \,| j'\, m' \rangle \frac{\langle \alpha' \,,\, j' || \mathbf{1} || \alpha \,,\, j \rangle}{\sqrt{2j'+1}} \quad ,$$

$$\langle \alpha' \,,\, j' || \mathbf{1} || \alpha \,,\, j \rangle = \delta_{jj'} \sqrt{2j+1} \quad ,$$

kao što je i dano u zadatku (znamo da reducirani matrični element ne ovisi o kvantnim brojevima m i m'; $\delta_{mm'}$ koji se pojavljuje na lijevoj i desnoj strani se pokrati).

Slučaj $T_q^{(k)}$=$\mathbf{J}$ je riješen u zadatku 1.12, izraz 1.74.

Za $T_q^{(k)}$=$\mathbf{S}$ dovoljno je u izraz 1.74 uvrstiti j=1/2:

$$\langle \alpha' \,,\; j'\, m' | \mathbf{S} | \alpha \,,\, j\, m \rangle = \hbar \sqrt{j(j+1)(2j+1)}\delta_{jj'} = \hbar \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right)}\delta_{jj'} = \hbar\sqrt{\frac{3}{2}} \quad .$$

Slučaj $T_q^{(k)}$=$\mathbf{Y}_l^m$ je riješen u zadatku 1.15, izraz 1.86.

1.10 Zadaci za domaću zadaću

1. (1 bod) Izračunajte veličinu c u relaciji:
$$J^-|j\,m\rangle = c|j\,m-1\rangle \quad .$$

2. (1 bod) Pokažite:
$$[J^{\pm}, J_z] = \mp\hbar J^{\pm} \quad .$$

3. (1 bod) Pokažite da vrijedi:
$$[J^+, J^-] = 2\hbar J_z \quad .$$

4. (1 bod) Izračunajte $d^2_{-2\,1}$ (pomoću Wignerove formule).

5. (2 boda) Vektorski zbrojite momente impulsa $\boldsymbol{J}_1$ (j_1=1), $\boldsymbol{J}_2$ (j_2=1/2), $\boldsymbol{J}_3$ (j_3=1/2) na dva načina:
   1) $\boldsymbol{J}_{12}$=$\boldsymbol{J}_1$+$\boldsymbol{J}_2$, pa $\boldsymbol{J}$=$\boldsymbol{J}_{12}$+$\boldsymbol{J}_3$;
   2) $\boldsymbol{J}_{23}$=$\boldsymbol{J}_2$+$\boldsymbol{J}_3$, pa $\boldsymbol{J}$=$\boldsymbol{J}_1$+$\boldsymbol{J}_{23}$.
   Napišite odgovarajuće vektore stanja za j=1, m=1 (kvantni broj j odgovara vektoru $\boldsymbol{J}$). Usporedite i komentirajte rezultate dobivene na dva načina.

6. (1 bod) Pokažite da je reducirana Wignerova d-matrica za j=1/2 dana s
$$d^{(1/2)} = \cos(\beta/2) - i\sigma_y \sin(\beta/2)$$
gdje je
$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
odgovarajuća Paulijeva matrica.

7. (3 boda) Prikažite vlastiti vektor proizvoljnog operatora $\hat{n}\cdot\boldsymbol{J}$ ($\hat{n}$ je proizvoljan jedinični vektor) definiranog s:
$$(\hat{n}\cdot\boldsymbol{J})\,|\hat{n},+> = \frac{\hbar}{2}|\hat{n},+>$$
kao linearnu kombinaciju stanja kanonske baze spina 1/2 $|1/2;\pm1/2>$. Pomoć: koristite izraz za Wignerova d-matricu iz zadatka 6.

8. (2 boda) Magnetski dipolni moment μ neke jezgre definiran je kao:
$$\mu(\alpha, J) = \langle \alpha J, M=J|\mu_z|\alpha J, M=J\rangle \quad ,$$
gdje je J ukupni moment impulsa, M njegova projekcija na os z, a s α su označeni svi ostali kvantni brojevi koji definiraju dano stanje. Izrazite μ kao produkt geometrijskog faktora i reduciranog matričnog elementa. Zašto je μ različit od nule samo za $J\geq1/2$?

9. (2 boda) Napišite xy, xz i (x^2-y^2) kao komponente ireducibilnog sferičnog tenzora ranga 2.

10. (1 bod) Pokažite da je:
$$\langle j_1\,0\,j_2\,0|j\,0\rangle = 0 \quad ,$$
ako je $j_1 + j_2 + j$= neparno.

11. (1 bod) Pokažite:
$$\langle j\,m\,j\,m'|0\,0\rangle = (-1)^{j-m}\frac{1}{\sqrt{2j+1}}\delta_{m\,-m'} \quad .$$

12. (2 boda) Pokažite:

$$\begin{pmatrix} j & j & 2 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \frac{3m^2 - j(j+1)}{\sqrt{j(j+1)(2j-1)(2j+1)(2j+3)}} \quad .$$

13. (3 boda) Sistem za koji vrijedi L=1 nalazi se u stanju:

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ;$$

kolika je vjerojatnost da će mjerenje L_x dati vrijednost 0?

14. (4 boda) Valna funkcija neke čestice može se napisati kao:

$$\Psi(x,y,z) = N(x+y+z)e^{-[(x^2+y^2+z^2)/\alpha^2]} \quad ,$$

gdje je N normalizacijska konstanta, a α zadani parametar. Mjerimo li vrijednosti L^2 i L_z, nađite vjerojatnost da rezultat mjerenja bude:
(a) L^2= $2\hbar^2$, L_z=0;
(b) L^2= $2\hbar^2$, L_z=$\hbar$;
(c) L^2= $2\hbar^2$, L_z=-$\hbar$.

15. (2 boda) Zapišite vektor položaja $\hat{r}$ kao sferični tenzorski operator i raspišite

$$\langle l_f m_f | \hat{r} | l_i m_i \rangle$$

preko Wigner-Eckartovog teorema.

16. (3 boda) Diskutirajte simetričnost reduciranog matričnog elementa (iz Wigner-Eckartovog teorema), tj. nađite vezu između $\langle \alpha' \,, j' || T^{(k)} || \alpha \,, j \rangle$ i $\langle \alpha \,, j || T^{(k)} || \alpha' \,, j' \rangle$.

17. (3 boda) Koristeći teorem koji nam daje reducirani matrični element skalarnog produkta dvaju (komutirajućih) sferičnih tenzora:

$$\langle j_1 \; j_2 \; j || \mathbf{T_L} \cdot \mathbf{S_L} || j_1' \; j_2' \; j' \rangle = \delta_{jj'} (-1)^{j_2+j+j_1'} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_2' & j_1' & L \end{Bmatrix} \cdot \langle j_1 || \mathbf{T_L} || j_1' \rangle \langle j_2 || \mathbf{S_L} || j_2' \rangle \quad ,$$

izračunajte:

$$\langle l_f \; 1/2 \; j_f || \sigma \cdot \hat{r} || l_i \; 1/2 \; j_i \rangle \quad .$$

6j-simbol se može izračunati iz izraza:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = \sum_{m_1,m_2,m_3,m_{12},m_{23},m} (-1)^{j_3+j+j_{23}-m_3-m-m_{23}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} j_1 & j & j_{23} \\ m_1 & -m & m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_{23} \\ m_3 & m_2 & -m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j & j_{12} \\ -m_3 & m & m_{12} \end{pmatrix} \quad .$$

18. (3 boda) Upotrebom teorema iz prošlog zadatka, izračunajte $< l_1 l_2; LM | \hat{r_1} \cdot \hat{r_2} | l_1' l_2'; LM >$.

19. (2 boda) Pokažite da stanje:

$$|\Psi\rangle = \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle$$

ima ukupni moment impulsa jednak nula.

20. (3 boda) U prvom redu računa smetnje razlika masa izobara može se iz izračunati iz:

$$\Delta M = \langle TT_z | H_c | TT_z \rangle / c^2 \quad .$$

gdje je T ukupan izospin jezgre, T_z njegova z-komponenta, a H_c kulonski član hamiltoniana. H_c raspisan preko izospina (t_z= +1/2 za neutron, t_z= -1/2 za proton) izgleda ovako:

$$H_c = e^2 \sum_{i<j} \frac{\left(\frac{1}{2} - t_z(i)\right)\left(\frac{1}{2} - t_z(i)\right)}{r_{ij}} \quad ;$$

(sumira se po svim nukleonima jezgre). Trivijalno se raspisuje:

$$\begin{aligned} H_c &= e^2 \sum_{i<j} \frac{1}{r_{ij}} \left\{ \left[\frac{1}{4} + \frac{\boldsymbol{t}(i) \cdot \boldsymbol{t}(j)}{3} \right] - \left[\frac{t_z(i) + t_z(j)}{2} \right] + \left[t_z(i) t_z(j) - \frac{\boldsymbol{t}(i) \cdot \boldsymbol{t}(j)}{3} \right] \right\} = \\ &= H_0^{(0)} + H_0^{(1)} + H_0^{(2)} \quad ; \end{aligned}$$

dio hamiltoniana koji odgovara prvoj zagradi je nulta komponenta sferičnog tenzorskog operatora ranga 0, druga zagrada je nulta komponenta sferičnog tenzorskog operatora ranga 1, a treća nulta komponenta sferičnog tenzorskog operatora ranga 2. Pokažite da vrijedi:

$$\Delta M = a + bT_z + cT_z^2 \quad ,$$

gdje su a, b i c veličine koje **ne** ovise o T_z.
Pomoć:

$$\langle T\, T_z\, 1\, 0\, | T\, T_z \rangle = \frac{T_z}{\sqrt{T(T+1)}} \quad , \quad \langle T\, T_z\, 2\, 0\, | T\, T_z \rangle = \frac{3T_z^2 - T(T+1)}{\sqrt{(2T-1)T(T+1)(2T+3)}} \quad .$$

21. (3 boda) Na udaljenostima gdje možemo zanemariti skalarni produkt vektora stanja, međudjelovanje nukleona moguće je opisati analogno međudjelovanju dipola:

$$V(r) \sim (\sigma_1 \cdot \nabla_1)(\sigma_2 \cdot \nabla_2) f(r).$$

Uz pretpostavku jednopionske izmjene možemo za radijalnu ovisnost pretpostaviti:

$$f(r) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{r}/\mathrm{r_0}}}{r}$$

gdje je $r_0 = \frac{\hbar}{m_\pi c}$ doseg međudjelovanja. Jakost potencijala moguće je dovesti u svezu s pion-nukleon jakošću vezanja g ($\frac{g^2}{\hbar c} = 0.081 \pm 0.002$). Pretpostavivši da je međudjelovanje oblika:

$$V(r) = -g^2 r_0^2 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla_1)(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla_2) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{r}/\mathrm{r_0}}}{r}$$

Pokazati da je ovaj izraz moguće napisati s pomoću operatora

$$S_{12} = \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$$

kao:

$$V(r) = \frac{g^2}{3} \left\{ \left[\left(1 + \frac{3r_0}{r} + \frac{3r_0^2}{r^2} \right) S_{12} + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \right] \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{r}/\mathrm{r_0}}}{r} - 4\pi r_0^2 \delta(r) \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \right\}$$

gdje je $r = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$.

22. (3 boda) Odrediti spektar i stacionarna stanja bozonskog sistema za koja je broj bozona 1 ili 2 opisana s Hamiltonianom:
$$\hat{H} = \hbar\omega \left([a^* \tilde{a}]^0_0 + \frac{1}{2} \right)$$
a je operator poništenja bozonskog stanja.

23. (3 boda) Izračunati $< l_1 l_2; LM | \hat{r_1} \cdot \hat{r_2} | l'_1 l'_2; LM >$ (Uputa: odrediti izborna pravila, za neiščezavajuće matrične elemente napisati izraze bez uporabe 3j, Clebsch-Gordan ili sličnih simbola).

24. (3 boda) Pokazati da tenzorski operator
$$S_{12} = 2 \left[\frac{3(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - \boldsymbol{S}^2 \right]$$
uzet kao funkcija od $\boldsymbol{r}$, ovisi samo o θ i ϕ, i to preko kuglinih funkcija ranga 2 (napisati izraz).

25. (2 boda) Ukoliko se sistem sastoji od dva identična bozona momenta impulsa i pariteta L^+ pokažite da su fizikalna stanja moguća samo za parne vrijednosti ukupnog momenta impulsa J. Koristeći isti postupak opišite prostor stanja tri bozona, dakle moguće vrijednosti J^Π do vrijednosti $J = 6$ na primjeru $L^P = 2^+$.

26. (3 boda) Nukleon se nalazi u stanju s l=1 čija je valna funkcija dana s:
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} |1, 1/2; -1, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{a-1}{a}} |1, 1/2; 0, -1/2\rangle \quad ,$$
gdje je a neki realan broj, a korišten je zapis $|l,s;m_l,m_s\rangle$
(a) Izračunajte očekivane vrijednosti za S^2 i L^2 za ovo stanje.
(b) Za koju vrijednost parametra a valna funkcija $|\Psi\rangle$ postaje vlastito stanje operatora J^2?

1.11 Dodatna literatura

1. A. Bohr and B. Mottelson: "*Nuclear Structure*", Vol. **II**, Benjamin Inc., Reading Mass., 1975.

2. P.J. Brussaard, P.W.M. Glaudemans: "*Shell-Model Applications in Nuclear Spectroscopy*", North-Holland Publishing Company, 1977.

3. W. Greiner: "*Quantum Mechanics: Symmetries*", Springer, 1994.

4. J.J. Sakurai: "*Modern Quantum Mechanics*", Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

5. J. Suhonen: "*From Nucleons to Nucleus*", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

6. I. Supek, "*Teorijska fizika*", vol. 2, Školska knjiga, Zagreb, 1975. (napomena: novo izdanje nema ovo poglavlje!)