

§ 4. Nizovi

S nizovima smo se upoznali u prethodnoj lekciji. U ovoj ćemo istražiti neka dodatna svojstva.

§ 4.1. Monotonost i ograničenost

Prisjetimo se: niz je definiran kao funkcija $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, s oznakom a_n za $a(n)$. Ukoliko je funkcija a rastuća, kažemo da je niz rastući, a ukoliko je padajuća, padajući. Znamo da je dovoljno da nejednakost vrijedi za uzastopne članove.

Zadatak 4.1. Ispitajte monotonost sljedećih nizova:

- a) $a_n = \frac{n-1}{n}$;
- b) $a_n = n^2$;
- c) $a_n = 2^{-n}$;
- d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
- e) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+9}$;
- f) $a_n = \arctg(\frac{1-n}{1+n})$;
- g) $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2+n}$.

Rješenje 4.1. a) Vrijedi $a_n = f(n)$ za $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, koja je rastuća na $\langle 0, \infty \rangle$. Dakle, niz je rastuć.

b) Vrijedi $a_n = f(n)$ za $f(x) = x^2$, koja je rastuća na $[0, \infty)$. Dakle, niz je rastuć.

c) Vrijedi $a_n = f(n)$ za $f(x) = 2^{-x}$, koja je padajuća na $\mathbb{R}$. Dakle, niz je padajući.

d) Vrijedi

$$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$

što je padajuća funkcija kao kompozicija padajuće funkcije $x \mapsto \frac{1}{x}$ na $\langle 0, \infty \rangle$ i rastuće funkcije $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$, koja je rastuća kao zbroj rastućih.

e) Vrijedi $a_n = f(n^2)$ za $f(x) = \frac{x-1}{x+9}$, koja je rastuća na $[1, \infty)$, pa je niz rastuć kao kompozicija rastućih funkcija.

f) Vrijedi $a_n = \arctg(g(n))$ za $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$, koja je padajuća na $\langle 0, \infty \rangle$. Kako je $\arctg$ rastuća funkcija, slijedi da je niz padajući.

g) Imamo

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n^2 - 5n - 4}{n(3n+1)(n+1)(3n+4)}.$$

Nazivnik je pozitivan za svaki $n \in \mathbb{N}$, dok je brojnik negativan za $n = 1, \dots, 5$, a pozitivan za $n \geq 6$. Dakle, niz nije ni rastuć ni padajući, ali je rastuć za $n \geq 6$. $\square$

Definicija 4.1

Niz (a_n) je **odozgo omeđen** ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$a_n \leq M.$$

Niz (a_n) je **odozdo omeđen** ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$a_n \geq m.$$

Niz je **omeđen** ako je i odozgo i odozdo omeđen.

Zadatak 4.2. Ispitajte omeđenost nizova

- a) $a_n = \frac{n-1}{n}$;
- b) $a_n = 2^n$;
- c) $a_n = \sqrt{n}$;
- d) $a_n = (-1)^n \sin(2^n + n^2) \cdot \frac{3n-1}{n}$.

Rješenje 4.2. a) Vrijedi

$$a_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n},$$

pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$0 \leq a_n < 1.$$

Dakle, niz je omeđen.

b) Matematičkom indukcijom slijedi da je $2^n \geq n$. Naime, tvrdnja vrijedi za $n = 1$, a korak indukcije slijedi iz:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n \geq n + 1.$$

Sada za proizvoljan $M > 0$ po Arhimedovom aksiomu postoji $n_0 > M$ pa je

$$a_{n_0} = 2^{n_0} \geq n_0 > M.$$

Dakle, niz nije odozgo omeđen. S druge strane, vrijedi $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je niz odozdo omeđen s 0.

c) Očito je $a_n = \sqrt{n} \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je niz odozdo omeđen. Neka je sada $M > 0$ proizvoljan. Po Arhimedovom aksiomu postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > M^2$. Kako je funkcija $x \mapsto \sqrt{x}$ rastuća na $[0, \infty)$, slijedi

$$a_{n_0} = \sqrt{n_0} > M.$$

Dakle, niz nije odozgo omeđen.

d) Kako vrijedi $|(-1)^n| = 1$ i $|\sin(2^n + n^2)| \leq 1$, imamo

$$|a_n| = \left| (-1)^n \sin(2^n + n^2) \cdot \frac{3n-1}{n} \right| \leq |\sin(2^n + n^2)| \left(3 - \frac{1}{n} \right) \leq 3 - \frac{1}{n} < 3.$$

Dakle, niz je omeđen.

□

§ 4.2. Konvergencija nizova

Definicija 4.2: Konvergencija niza

Kažemo da niz $(a_n)_n$ realnih brojeva konvergira k $L \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Ako takav L postoji, jedinstven je, i zovemo ga **limes** niza (a_n) te označavamo

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Zadatak 4.3. Iz definicije dokažite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

Rješenje 4.3. Neka je $\varepsilon > 0$. Po Arhimedovom aksiomu postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n_0 \varepsilon^{1/3} > 1.$$

Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left| \frac{1}{n^3} - 0 \right| = \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n_0^3} < \varepsilon.$$

Dakle, po definiciji konvergencije slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

□

Uočimo, na sličan način se može pokazati

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0, \quad \text{za sve } p > 0.$$

Zadatak 4.4. Dokažite da niz $a_n = (-1)^n$ ne konvergira.

Rješenje 4.4. Pretpostavimo suprotno, da niz $a_n = (-1)^n$ konvergira nekom $L \in \mathbb{R}$. Tada za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$|a_n - L| < \frac{1}{2}.$$

Primijenimo to na $n = n_0$ i $n = n_0 + 1$. Po nejednakosti trokuta dobivamo

$$2 = |(-1)^{n_0} - (-1)^{n_0+1}| = |a_{n_0} - a_{n_0+1}| \leq |a_{n_0} - L| + |L - a_{n_0+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

što je kontradikcija. Dakle, niz $((-1)^n)$ ne konvergira.

□

Naravno, rijetko ćemo nešto računati direktno iz definicije, nego znamo da vrijede osnovne operacije s limesima, koje vidimo u sljedećem teoremu:

Teorem 4.3

Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi te $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

- Niz $(\lambda a_n + \mu b_n)$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- Niz $(a_n \cdot b_n)$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, tada je i niz $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

U prethodnom teoremu, **ne vrijedi** obrnuta implikacija.

Zadatak 4.5. Dokažite da su sljedeći nizovi konvergentni i izračunajte limese:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-1}{3n+2};$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3(n^2+n+1)^2}{n^7-50n+5};$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}.$

Rješenje 4.5. a) Podijelimo brojnik i nazivnik s n :

$$\frac{5n-1}{3n+2} = \frac{5 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} \rightarrow \frac{5}{3}.$$

b) Podijelimo brojnik i nazivnik sa n^7 :

$$\frac{(n+2)^3(n^2+n+1)^2}{n^7-50n+5} = \frac{(1+\frac{2}{n})^3(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^2}{1-\frac{50}{n^6}+\frac{5}{n^7}} \rightarrow 1.$$

c) Koristimo formulu

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tada je

$$\frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

□

Pri računanju limesa često koristimo i sljedeći teorem.

Teorem 4.4: Teorem o sendviču

Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi takvi da vrijedi $a_n \leq b_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$ te

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

Ako je (c_n) niz takav da je $a_n \leq c_n \leq b_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$, onda je i (c_n) konvergentan te

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L.$$

Zadatak 4.6. Izračunajte limese:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 \cos n + 8n}{n^3 + 1};$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n, q \in \langle 0, 1 \rangle;$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n};$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}, a \geq 1;$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n};$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n!}.$

Rješenje 4.6. a) Kako je $|\cos n| \leq 1$, vrijedi

$$0 \leq \left| \frac{5n^2 \cos n + 8n}{n^3 + 1} \right| \leq \frac{5n^2 |\cos n| + 8n}{n^3 + 1} \leq \frac{5n^2 + 8n}{n^3 + 1}.$$

Dijeljenjem brojnika i nazivnika s n^3 dobivamo da desna strana teži k 0, pa po teoremu o sendviču slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 \cos n + 8n}{n^3 + 1} = 0.$$

b) Neka je $q \in \langle 0, 1 \rangle$. Tada je $\frac{1}{q} - 1 > 0$, pa po binomnom teoremu vrijedi

$$\left(1 + \left(\frac{1}{q} - 1 \right) \right)^n = \left(\frac{1}{q} \right)^n \geq n \left(\frac{1}{q} - 1 \right).$$

Odavde slijedi

$$0 \leq q^n \leq \frac{1}{n \left(\frac{1}{q} - 1 \right)} \rightarrow 0,$$

pa po teoremu o sendviču dobivamo $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

c) Označimo $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$, gdje je $x_n \geq 0$. Tada je

$$n = (1 + x_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} x_n^2.$$

Zato za $n \geq 2$ vrijedi

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2,$$

odnosno

$$x_n^2 \leq \frac{2}{n-1}.$$

Dakle,

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = 1 + x_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \rightarrow 1,$$

pa po teoremu o sendviču slijedi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

d) Neka je $a \geq 1$. Za svaki $n \geq a$ vrijedi $1 \leq a \leq n$, pa zbog rastačnosti funkcije $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ dobivamo

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Kako po prethodnom dijelu vrijedi $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, po teoremu o sendviču slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

e) Imamo

$$4 = \sqrt[n]{4^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leq \sqrt[n]{4^n + 4^n + 4^n} = 4\sqrt[n]{3}.$$

Kako po prethodnom dijelu $\sqrt[n]{3} \rightarrow 1$, slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = 4.$$

f) Za $n \geq 2$ vrijedi

$$0 \leq \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n!} \leq \frac{\sqrt{n^2 + n^2}}{n!} = \frac{n\sqrt{2}}{n!} = \frac{\sqrt{2}}{(n-1)!} \leq \frac{\sqrt{2}}{n-1}.$$

Kako desna strana teži k 0, po teoremu o sendviču slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n!} = 0.$$

□

Teorem 4.5

Vrijedi:

a) Ako je niz (a_n) rastući i odozgo omeđen, onda je konvergentan i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

b) Ako je niz (a_n) padajuć i odozdo omeđen, onda je konvergentan i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Zadatak 4.7. Izračunajte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korijena}}$$

Rješenje 4.7. Označimo

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korijena}}.$$

Tada vrijedi

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Pokazat ćemo da je niz rastući i odozgo omeđen s 2.

Najprije dokažimo indukcijom da je $a_n \leq a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ imamo

$$a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2.$$

Ako je $a_n \leq a_{n+1}$, onda zbog rastućnosti funkcije $x \mapsto \sqrt{2+x}$ slijedi

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}.$$

Dakle, niz je rastuć.

Sada indukcijom pokažimo da je $a_n \leq 2$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ je očito $\sqrt{2} \leq 2$. Ako je $a_n \leq 2$, onda

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Dakle, niz je odozgo omeđen s 2.

Kako je niz rastuć i odozgo omeđen, on je konvergentan. Označimo

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Iz relacije $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ slijedi

$$L = \sqrt{2 + L},$$

pa je

$$L^2 = L + 2 \iff L^2 - L - 2 = 0 \iff (L - 2)(L + 1) = 0.$$

Dakle, $L = 2$ ili $L = -1$. Kako je $a_n \geq 0$ za svaki n , mora biti $L \geq 0$, pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

□

Zadatak 4.8. Dokažite da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

Rješenje 4.8. Označimo $a_n = \frac{n}{2^n}$. Tada je

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n} a_n.$$

Kako za $n \geq 2$ vrijedi $\frac{n+1}{2n} < 1$, slijedi da je niz (a_n) padajući od nekog mjesta nadalje. Očito je i $a_n \geq 0$, pa je niz odozdo omeđen. Dakle, (a_n) je konvergentan.

Neka je

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Kako je $\frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$, iz

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n} a_n$$

dobivamo

$$L = \frac{1}{2}L$$

pa je $L = 0$. Prema tome,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

□

Zadatak 4.9. Niz (a_n) zadan je rekurzivno s

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}.$$

Ispitajte konvergenciju i odredite limes ako postoji.

Rješenje 4.9. Dokažimo indukcijom da je niz rastuć i omeđen odozgo s 1. Za $n = 1$ vrijedi $a_1 = 0 \leq 1$. Pretpostavimo sada da je za neki $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq 1.$$

Tada je

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2} \leq \frac{1 + 1}{2} = 1,$$

pa je niz odozgo omeđen s 1. Nadalje,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 1}{2} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2}{2} \geq 0,$$

pa je niz rastuć.

Kako je niz rastuć i odozgo omeđen, on je konvergentan. Označimo

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Tada i podniz (a_{n+1}) ima isti limes L , pa iz rekurzije slijedi

$$L = \frac{L^2 + 1}{2}.$$

Odnosno,

$$L^2 - 2L + 1 = 0 \iff (L - 1)^2 = 0$$

pa je $L = 1$. Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

□

Zadatak 4.10. Niz (a_n) zadan je rekurzivno s

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right).$$

Ispitajte konvergenciju i odredite limes ako postoji.

Rješenje 4.10. Najprije odredimo mogući limes. Ako niz konvergira k L , tada i podniz (a_{n+1}) konvergira k L , pa iz rekurzije

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right)$$

slijedi

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{3}{L} \right).$$

Odavde dobivamo $L^2 = 3$, pa je $L = \pm\sqrt{3}$. Kako su svi članovi niza pozitivni, mora biti $L = \sqrt{3}$, ako limes postoji.

Pokažimo sada da limes doista postoji. Za svaki n , jer za pozitivne realne a i b vrijedi $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, imamo

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{3}{a_n}} = \sqrt{3}.$$

Dakle, niz je odozdo omeđen s $\sqrt{3}$.

Nadalje, za svaki n vrijedi

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) - a_n = \frac{3 - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

jer smo dokazali $a_n^2 \geq 3$. Dakle, niz je padajući od drugog člana nadalje.

Kako je niz padajući i odozdo omeđen, on je konvergentan. Iz prvog dijela slijedi da je njegov limes nužno jednak $\sqrt{3}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3}.$$

□

Definicija 4.6

Niz (b_n) je podniz niza (a_n) ako postoji strogo rastuća funkcija $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takva da je $b_n = a_{p_n}$.

Zadatak 4.11. Ako je (a_n) podniz niza (b_n) i ako je (b_n) podniz niza (a_n) , jesu li nužno jednaki?

Rješenje 4.11. Ne moraju biti jednaki. Uzmimo, na primjer,

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = (-1)^{n+1}.$$

Tada vrijedi

$$a_n = b_{n+1}, \quad b_n = a_{n+1},$$

pa je svaki od ta dva niza podniz onog drugog. Ipak, oni nisu jednaki jer je već $a_1 = -1$, a $b_1 = 1$.

□

Vrijedi nekoliko stvari.

Lemma 4.7

Svaki niz u $\mathbb{R}$ ima monoton podniz.

Teorem 4.8: Bolzano-Weierstrass

Svaki omeđeni niz ima konvergentan podniz.

Teorem 4.9

Ako je niz (a_n) konvergentan s limesom $L \in \mathbb{R}$, onda je i svaki njegov podniz konvergentan s istim limesom L .

§ 4.3. Limsup i liminf

Definicija 4.10

Niz (a_n) teži k $+\infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$a_n > M$$

i pišemo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Slično, niz (a_n) teži k $-\infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$a_n < -M$$

i pišemo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Definiramo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Niz (a_n) konvergira u $\overline{\mathbb{R}}$ ako konvergira u $\mathbb{R}$ ili teži k $-\infty$ ili $+\infty$.

Definicija 4.11

Kažemo da je $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ **gomilište** niza $(a_n)_n$ ako postoji podniz $(a_{n_k})_k$ niza $(a_n)_n$ takav da je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha.$$

Uočimo, gornja lema nam govori da svaki niz ima barem jedno gomilište u $\overline{\mathbb{R}}$. Iz Bolzano-Weierstrassovog teorema, svaki omeđen niz ima barem jedno gomilište u $\mathbb{R}$.

Na primjer, niz $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ima dva gomilišta, 1 i -1 . Naime,

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= (-1)^{2k-1} + \frac{1}{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \rightarrow -1, k \rightarrow \infty \\ a_{2k} &= (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1, k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

S druge strane, niz $a_n = (-1)^n \cdot n$ nema gomilišta u $\mathbb{R}$, ali ima dva u $\overline{\mathbb{R}}$: $+\infty$ i $-\infty$. Naime,

$$\begin{aligned} a_{2k} &= (-1)^{2k} \cdot 2k = 2k \rightarrow \infty, \\ a_{2k-1} &= (-1)^{2k-1} \cdot (2k-1) = -(2k-1) \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Definicija 4.12: Limes superior i limes inferior niza

Neka je (a_n) niz realnih brojeva i $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ skup svih gomilišta niza (a_n) . Definiramo **limes superior** i **limes inferior** niza (a_n) s

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf A.$$

Ako A nije odozgo, odnosno, odozdo omeđen, kažemo

$$\sup A = +\infty, \inf A = -\infty.$$

Zadatak 4.12. Dokažite da je za $q > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty.$$

Rješenje 4.12. Neka je $M > 0$. Trebamo naći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$q^n > M.$$

Kako je $q > 1$, imamo $q - 1 > 0$ pa po binomnom teoremu

$$q^n = (1 + (q - 1))^n \geq n(q - 1).$$

Po Arhimedovom aksiomu postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n_0(q - 1) > M.$$

Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$q^n \geq n(q - 1) \geq n_0(q - 1) > M.$$

Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty.$$

□

Zadatak 4.13. Izračunajte:

a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n + 1};$

b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + (-1)^n)^n + n \cos(n\pi)}{2n + 1}.$

Rješenje 4.13. a) Označimo

$$a_n = \frac{1 + n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n + 1}.$$

Promotrimo podnizove:

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= \frac{1 + (2k-1) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)}{4k-1} = \frac{1}{4k-1} \rightarrow 0, \\ a_{4k} &= \frac{1 + 4k \cos(2k\pi)}{8k+1} = \frac{1+4k}{8k+1} \rightarrow \frac{1}{2}, \\ a_{4k-2} &= \frac{1 + (4k-2) \cos\left(\frac{(4k-2)\pi}{2}\right)}{8k-3} = \frac{-4k+3}{8k-3} \rightarrow -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Time smo našli tri gomilišta. Drugih nema jer svaki prirodan broj pripada jednoj od klasa ostataka modulo 4 pa svaki podniz sadrži beskonačno mnogo članova iz barem jedne od tih klasa. Prelaskom na taj podniz dobivamo podniz koji konvergira ili u 0, ili u $\frac{1}{2}$, ili u $-\frac{1}{2}$. Dakle, skup gomilišta je upravo $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ pa je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n + 1} = \frac{1}{2}.$$

b) Označimo

$$b_n = \frac{(1 + (-1)^n)^n + n \cos(n\pi)}{2n + 1}.$$

Za parne indekse dobivamo

$$b_{2k} = \frac{(1 + 1)^{2k} + 2k \cos(2k\pi)}{4k + 1} = \frac{2^{2k} + 2k}{4k + 1} \rightarrow +\infty.$$

Za neparne indekse vrijedi

$$b_{2k-1} = \frac{(1-1)^{2k-1} + (2k-1)\cos((2k-1)\pi)}{4k-1} = \frac{-2k+1}{4k-1} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Dakle, skup gomilišta je $\{-\frac{1}{2}, +\infty\}$, pa je

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+(-1)^n)^n + n \cos(n\pi)}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

□

Teorem 4.13

Niz (a_n) je konvergentan u $\overline{\mathbb{R}}$ ako i samo ako

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Zadatak 4.14. Je li niz $a_n = q^n$ konvergentan za $q < -1$? Ako jest, odredite limes.

Rješenje 4.14. Nije konvergentan. Naime, za parne indekse vrijedi

$$a_{2k} = q^{2k} = (q^2)^k.$$

Kako je $q < -1$, imamo $q^2 > 1$ pa slijedi

$$a_{2k} \rightarrow +\infty.$$

S druge strane, za neparne indekse vrijedi

$$a_{2k-1} = q^{2k-1} = q(q^2)^{k-1}.$$

Kako je $q < 0$ i $(q^2)^{k-1} \rightarrow +\infty$, slijedi

$$a_{2k-1} \rightarrow -\infty.$$

Dakle, niz ima dva podniza s različitim ponašanjem, pa ne konvergira ni u $\mathbb{R}$ ni u $\overline{\mathbb{R}}$.

□

Uočimo, dokazali smo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \text{ne postoji} & q \leq -1 \\ 0, & -1 < q < 1 \\ 1, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1. \end{cases}$$

Zadatak 4.15. Neka je

$$a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} + (1+a) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Za koje $a \in \mathbb{R}$ je niz (a_n) konvergentan?

Rješenje 4.15. Promotrimo podnizove određene po ostacima modulo 4.

Za parne indekse imamo $\sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = \sin(k\pi) = 0$, pa

$$a_{2k} = \frac{3^{2k} + (-2)^{2k}}{3^{2k+1} + (-2)^{2k+1}} = \frac{3^{2k} + 2^{2k}}{3 \cdot 3^{2k} - 2 \cdot 2^{2k}} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Za $n = 4k - 1$ vrijedi $\sin\left(\frac{(4k-1)\pi}{2}\right) = -1$, pa

$$a_{4k-1} = \frac{3^{4k-1} - 2^{4k-1}}{3^{4k} + 2^{4k}} - (1 + a) \rightarrow \frac{1}{3} - (1 + a) = -\frac{2}{3} - a.$$

Za $n = 4k - 3$ vrijedi $\sin\left(\frac{(4k-3)\pi}{2}\right) = 1$, pa

$$a_{4k-3} = \frac{3^{4k-3} - 2^{4k-3}}{3^{4k-2} + 2^{4k-2}} + (1 + a) \rightarrow \frac{1}{3} + (1 + a) = \frac{4}{3} + a.$$

Dakle, skup gomilišta je

$$A = \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} - a, \frac{4}{3} + a \right\}.$$

Niz je konvergentan ako i samo ako ima točno jedno gomilište, pa mora vrijediti

$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - a = \frac{4}{3} + a.$$

Odavde slijedi $a = -1$. Dakle, niz (a_n) je konvergentan upravo za

$$a = -1.$$

□

§ 4.4. Cauchyjevi nizovi

Definicija 4.14

Kažemo da je niz realnih brojeva (a_n) **Cauchyjev** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da ako su $m, n \geq n_0$, vrijedi

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Teorem 4.15: Potpunost skupa $\mathbb{R}$

Niz (a_n) u $\mathbb{R}$ je konvergentan (u $\mathbb{R}$) ako i samo ako je Cauchyjev.

Zadatak 4.16. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{3^n}, \text{ za sven } n \in \mathbb{N}.$$

Je li niz (x_n) konvergentan?

Rješenje 4.16. Dokažimo da je niz (x_n) Cauchyjev. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i $m > n$. Tada teleskopiranjem i nejednakosti trokuta dobivamo

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \frac{1}{3^{m-1}} + \frac{1}{3^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

To je dio geometrijskog niza, pa vrijedi

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{m-n-1} \right) \leq \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2 \cdot 3^n}.$$

Neka je sada $\varepsilon > 0$. Kako $\frac{3}{2 \cdot 3^n} \rightarrow 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\frac{3}{2 \cdot 3^n} < \varepsilon.$$

Stoga za sve $m \geq n \geq n_0$ imamo

$$|x_m - x_n| < \varepsilon,$$

pa je niz Cauchyjev. Po potpunosti skupa $\mathbb{R}$, svaki Cauchyjev niz je konvergentan. Dakle, niz (x_n) jest konvergentan.

□