

Numerička integracija:

- Uvod
 - Trapezna formula
 - Simpsonova formula
 - Pravokutna formula
 - Gauss-ova formula
- Newton-Cotesove formule
 - Izvod metode
 - Ocjena pogreške
 - Računanje čvorova i težina
- Gaussove formule
 - Izvod metode
 - Ocjena pogreške

Numerička integracija

Zadana je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Želimo izračunati integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

- Za relativno mali skup funkcija f takav se integral može egzaktno (simbolički) izračunati,
- pa jedino preostaje približno, numeričko računanje $I(f)$.

Osnovna ideja numeričke integracije je približno računanje integrala $I(f)$, korištenjem:

- vrijednosti funkcije f (eventualno i vrijednosti derivacija) na nekom konačnom skupu točaka ($\approx$ Darboux).

Opća integracijska formula ima oblik

$$I(f) = I_m(f) + E_m(f),$$

pri čemu je

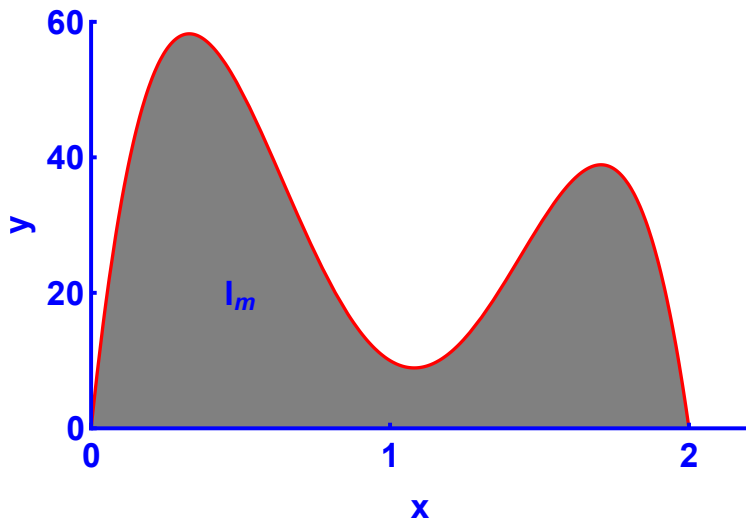
- $m + 1$ = broj korištenih točaka (čvorova integracije),
- $I_m(f)$ = pripadna aproksimacija integrala,
- $E_m(f)$ = pritom napravljena greška.

Ako koristimo samo funkcijske vrijednosti, aproksimacija $I_m(f)$ ima oblik

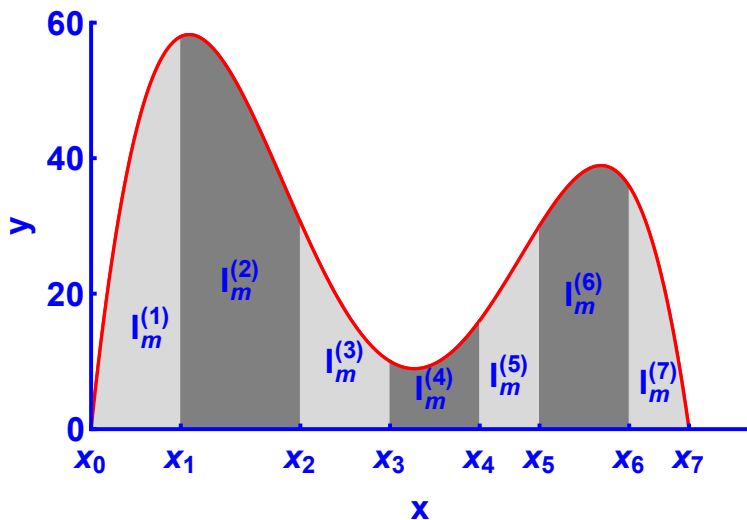
$$I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k^{(m)} f(x_k^{(m)}),$$

pri čemu je m neki unaprijed zadani broj, $m \in \mathbb{N}_0$.

- $x_k^{(m)}$ - čvorovi integracije
- $w_k^{(m)}$ - težinski koeficijenti (težine)



Integracijske formule ne primjenjuju se na cijelom području integriranja.
Složena formula i nestabilno računanje.



Segment podijelimo na više dijelova.

Na svakom podsegmentu primijenimo integracijsku formulu.

Trapezna formula

Odredimo najjednostavniju formula (za $m = 1$):

$$I_1(f) = w_0^{(1)}f(x_0) + w_1^{(1)}f(x_1),$$

Izostavimo indekse:

$$I_1(f) = w_0f(x_0) + w_1f(x_1)$$

Težinske koeficijente w_0 i w_1 određujemo iz uvjeta da je formula egzaktna na polinomima što višeg stupnja:

$$\int_{x_0}^{x_1} P_k(x) dx = w_0P_k(x_0) + w_1P_k(x_1), \quad k \geq 0,$$

Dva nepoznata koeficijenta trebaju nam barem dvije jednačbe.

Uvrštavamo redom $x^0, x^1, \dots$:

$$x_1 - x_0 = \int_{x_0}^{x_1} x^0 dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1.$$

$$\frac{x_1^2 - x_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x_1} x dx = w_0 \cdot x_0 + w_1 \cdot x_1.$$

Sustav jednažbi s dvije nepoznanice:

$$w_0 + w_1 = x_1 - x_0$$

$$x_0 w_0 + x_1 w_1 = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2}.$$

Rješenje

$$w_0 = \frac{1}{2} (x_1 - x_0) = \frac{h}{2}, \quad w_1 = \frac{1}{2} (x_1 - x_0) = \frac{h}{2}.$$

(Osnovna) trapezna formula

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1))$$

Interval $[a, b]$ podijelimo na n jednakih dijelova:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i \cdot h.$$

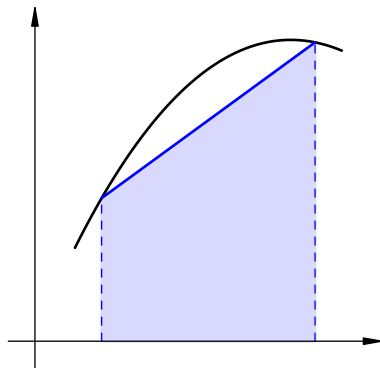
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) = \\ &= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) \end{aligned}$$

(Produljena) trapezna formula

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right)$$

Zašto baš trapezna formula?

Slika aproksimacije integrala funkcije f površinom trapeza.



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}$$

Koje polinome egzaktno integrira trapezna formula?

Je li trapezna formula egzaktna za

$$f(x) = x^2.$$

Vrijedi

$$\frac{x_1^3 - x_0^3}{3} = \int_{x_0}^{x_1} x^2 dx \neq I_1(x^2) = \frac{x_0^2 + x_1^2}{2} (x_1 - x_0).$$

Nije.

Drugi pristup.

- Povučemo li kroz točke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ interpolacijski polinom stupnja 1 za funkciju f ,
 - a zatim ga egzaktno integriramo,
- dobivamo opet trapeznu formulu.

Vrijedi

$$\begin{aligned}\text{aproksimacija integrala} &= \text{integral aproksimacije} \\ \text{aproksimacija integrala} &= \text{integral (interpolacije)}.\end{aligned}$$

Ovaj zaključak nam omogućava nalaženje greške trapezne formule!
Slično vrijedi i za ostale integracijske formule.

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Interpolacijski polinom:

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx &= \left(\frac{(x - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)} f(x_1) \right) \Big|_{x_0}^{x_1} \\ &= \frac{x_1 - x_0}{2} f(x_1) - \frac{x_0 - x_1}{2} f(x_0) \\ &= \frac{h}{2} (f(x_1) + f(x_0)) \end{aligned}$$

Ocjena pogreške trapezne formule

Interpolacijska pogreška:

$$f(x) = p_1(x) + (x - x_0)(x - x_1) \frac{f''(\xi_x)}{2}.$$

Pogreška trapezne formule:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) \frac{f''(\xi_x)}{2} dx.$$

Pogreška trapezne formule:

$$E_1(f) = \int_{x_0}^{x_1} e_1(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) \frac{f''(\xi_x)}{2} dx.$$

Jednostavno:

$$E_1(f) = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) \frac{f''(\xi_x)}{2} dx = \frac{f''(\bar{\xi})}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) dx.$$

Ali u pravilu krivo!

Teorem srednje vrijednosti za integrale (g neprekidna)

$$\int_a^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^b dx = g(\xi)(b - a).$$

Općenitija verzija ($w(x) \geq 0$)

$$\int_a^b w(x)g(x) dx = g(\xi) \int_a^b w(x) dx.$$

Jer je

$$(x - x_0)(x - x_1) \leq 0 \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

zbilja postoji $\bar{\xi}$ tako da je

$$E_1(f) = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) \frac{f''(\xi_x)}{2} dx = \frac{f''(\bar{\xi})}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) dx.$$

Ni ovo nije potpuno ispravno.

Je li $f''(\xi_x) = f''(\xi(x))$ neprekidna?

Potpuno ispravno je koristiti ocjenu pogreške

$$f(x) = p_1(x) + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x].$$

Sada je

$$\begin{aligned} E_1(f) &= \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x] dx \\ &= f[x_0, x_1, \xi] \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) dx. \\ &= \frac{f''(\bar{\xi})}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) dx. \end{aligned}$$

Jer je

$$\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) dx = -\frac{(x_1 - x_0)^3}{6} = -\frac{h^3}{6}$$

Integracijska pogreška je

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

Ocjena pogreške za produljenu trapeznu formulu

Produljena trapezna formula:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \\&= \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) = \\&= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) - \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \\&= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) - \frac{nh^3}{12} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i)\end{aligned}$$

Aritmetička sredina:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) = f''(\xi).$$

Uz $nh = b - a$, vrijedi

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) - \frac{h^2}{12} (b - a) f''(\xi)$$

Pogreška: h^2 - metoda reda 2.

Simpsonova formula

Sljedeći primjer je metoda za $m = 2$:

$$I_2(f) = w_0^{(2)} f(x_0) + w_1^{(2)} f(x_1) + w_2^{(2)} f(x_2).$$

Označimo

$$h := \frac{x_2 - x_0}{2}.$$

Neka je

$$x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}.$$

Nije nužno ali su formule jednostavnije.

I izbacimo indekse:

$$I_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koeficijenti preko egzaktnosti na polinomima

3 koeficijenta $\rightarrow$ 3 jednačbe $\rightarrow$ egzaktnost na $\{x^0, x^1, x^2\}$:

$$x_2 - x_0 = \int_{x_0}^{x_2} x^0 dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1.$$

$$\frac{x_2^2 - x_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x_2} x^1 dx = w_0 \cdot x_0 + w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2.$$

$$\frac{x_2^3 - x_0^3}{3} = \int_{x_0}^{x_2} x^2 dx = w_0 \cdot x_0^2 + w_1 \cdot x_1^2 + w_2 \cdot x_2^2.$$

Rješenje:

$$w_0 = w_2 = \frac{h}{3} \quad w_1 = \frac{4h}{3}.$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right).$$

Koeficijenti preko interpolacijskog polinoma

Interpolacijski polinom:

$$\begin{aligned} p_3(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \end{aligned}$$

Formula

$$\begin{aligned} I_3(f) &= \int_{x_0}^{x_2} p_3(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) dx + \\ &+ \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) dx + \\ &+ \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) dx \\ &= \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2) dx - \frac{f(x_1)}{h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_2) dx \\ &+ \frac{f(x_2)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1) dx = \dots = \\ &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right). \end{aligned}$$

Egzaktnost integracije za x^3

Simpsonova formula je egzaktna na polinomima stupnja ≤ 2 . Što je s višim stupnjem?

$$\int_{x_0}^{x_2} x^3 dx = \frac{x_2^4 - x_0^4}{4}.$$

$$I_2(x^3) = \dots = \frac{x_2^4 - x_0^4}{4}.$$

Simpsonova formula je egzaktna na polinomima stupnja 3!

Ovo se moglo dobiti i bez puno računanja:

Funkcija $(x - x_1)^3$ je antisimetrična na $[x_0, x_2]$.

Zato je

$$\int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^3 dx = 0.$$

S druge strane je Simpsonova formula simetrična

$$I_3(f) = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right).$$

pa je

$$I_3\left((x - x_1)^3\right) = 0.$$

Ocjena pogreške za Simpsonovu formulu

Interpolacijska pogreška:

$$\begin{aligned}e_2(x) &= f(x) - p_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x] = \\&= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}\end{aligned}$$

Integracijska pogreška

$$E_2(f) = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx - I_2(f) = \int_{x_0}^{x_2} e_2(x) dx.$$

Funkcija

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

mijenja predznak na $[x_0, x_2]$ pa se ne može direktno primijeniti teorem srednje vrijednosti.

Moglo bi:

$$\begin{aligned}|E_2(f)| &\leq \int_{x_0}^{x_2} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| |f[x_0, x_1, x_2, x]| dx \\&= \frac{|f^{(3)}(\xi)|}{6} \int_{x_0}^{x_2} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| dx \\&= \frac{h^4}{12} |f^{(3)}(\xi)|\end{aligned}$$

- Nije optimalno.
- I ne pokazuje da je formula egzaktna za x^3 .
- $E_2(x^3) = 0$.

Definirajmo

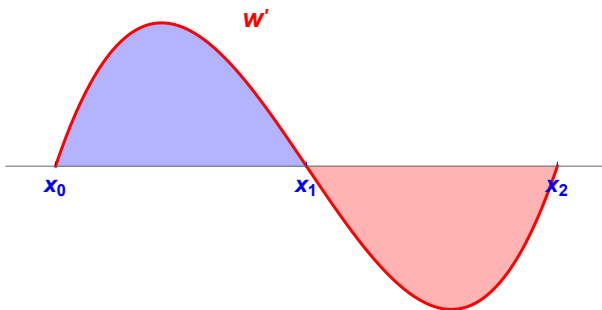
$$w(x) = \int_{x_0}^x (t - x_0)(t - x_1)(t - x_2) dt.$$

Pokažimo da vrijedi

$$w(x_0) = w(x_2) = 0, \quad w(x) > 0, \quad x \in (x_0, x_2).$$

- $w(x_0) = 0$ očito
- $(t - x_0)(t - x_1)(t - x_2)$ je antisimetrična s obzirom na x_1 pa je integral od x_0 do x_2 jednak 0. (Može se i izračunati.)
- x_1 je jedina nultočka od w' na $(x_0, x_2) \rightarrow$ jedini ekstrem.
- Jer je $w(x_1) > 0$ to je maksimum ($w(x) > 0$ na (x_0, x_1))
- $\Rightarrow w(x) > 0$ na (x_0, x_2)

Graf funkcije w'



Integracijska pogreška:

$$\begin{aligned}
E_2(f) &= \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x] dx \\
&= \int_{x_0}^{x_2} w'(x) f[x_0, x_1, x_2, x] dx \\
&= w(x)f[a, b, c, x] \Big|_{x_0}^{x_2} - \int_{x_0}^{x_2} w(x) \frac{d}{dx} f[x_0, x_1, x_2, x] dx \\
&= 0 - \int_{x_0}^{x_2} w(x) f[x_0, x_1, x_2, x, x] dx \\
&= -f[x_0, x_1, x_2, x, \eta, \eta] \int_{x_0}^{x_2} w(x) dx \\
&= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \int_{x_0}^{x_2} w(x) dx
\end{aligned}$$

Izračunamo

$$\int_{x_0}^{x_2} w(x) dx = \dots = \frac{4h^5}{15}$$

Ocjena pogreške za Simpsonovu formulu:

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Produljena Simpsonova formula

Interval $[a, b]$ podijelimo na paran broj podintervala (n je parni broj).

Produljena Simpsonova formula:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx = \\&= \sum_{i=1}^n \frac{h}{3} (f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1})) + f(x_{2i}) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i) = \\&= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right) - \\&\quad - \frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right) - \\
&\quad - \frac{\frac{n}{2}h^5}{90} \frac{1}{\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) = \\
&= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right) - \\
&\quad - (b-a) \frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi)
\end{aligned}$$

Pogreška: h^4 - metoda reda 4.

Produljena Simpsonova formula:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right) - (b-a) \frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$$

Formula srednje točke

Pravokutna formula

Odredimo formulu oblika:

$$I_0(f) = w_0 f(\zeta_0).$$

Treba odrediti koeficijent w_0 i **točku** ζ_0 da formula bude egzaktna na intervalu $[x_0, x_1]$ za polinome što višeg stupnja.

Označimo $H := x_1 - x_0$.

2 nepoznanice $\rightarrow$ 2 jednačbe $\rightarrow$ egzaktnost na $\{x^0, x^1\}$:

$$H = x_1 - x_0 = \int_{x_0}^{x_1} x^0 dx = w_0 \cdot 1$$

$$H \frac{x_1 + x_0}{2} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x_1} x^1 dx = w_0 \cdot \zeta_0$$

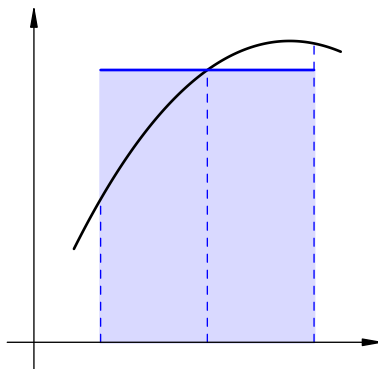
Rješenje:

$$w_0 = H \quad \zeta_0 = \frac{x_1 + x_0}{2}.$$

Formula srednje točke

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx Hf(\zeta_0), \quad \zeta_0 = x_0 + \frac{1}{2}H$$

Aproksimacija integrala funkcije f površinom pravokutnika.



Gaussova formula

Odredimo formulu oblika:

$$I_1(f) = w_0 f(\zeta_0) + w_1 f(\zeta_1).$$

Treba odrediti koeficijente w_0 , w_1 i **točke** ζ_0, ζ_1 da formula bude egzaktna na intervalu $[x_0, x_1]$ za polinome što višeg stupnja.

Označimo $H := x_1 - x_0$.

4 nepoznanice $\rightarrow$ 4 jednačbe $\rightarrow$ egzaktnost na $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$.

Bolje je koristiti $(x - \bar{x})^k$ gdje je $\bar{x} = (x_0 + x_1)/2$. Simetrija.

$$H = \int_{x_0}^{x_1} 1 \, dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1$$

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} (x - \bar{x}) \, dx = w_0 \cdot (\zeta_0 - \bar{x}) + w_1 \cdot (\zeta_1 - \bar{x})$$

$$\frac{H^3}{12} = \int_{x_0}^{x_1} (x - \bar{x})^2 \, dx = w_0 \cdot (\zeta_0 - \bar{x})^2 + w_1 \cdot (\zeta_1 - \bar{x})^2$$

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} (x - \bar{x})^3 \, dx = w_0 \cdot (\zeta_0 - \bar{x})^3 + w_1 \cdot (\zeta_1 - \bar{x})^3$$

Nelinearni sustav.

Rješenje: U ovom trenutku nije bitno.

Ali...

Ako pretpostavimo simetriju:

$$w_0 = w_1 \quad \Rightarrow \quad w_0 = w_1 = \frac{H}{2}.$$

Iz druge jednačbe slijedi:

$$\bar{x} - \zeta_0 = \zeta_1 - \bar{x}$$

Opet simetrija.

Iz treće jednačbe slijedi:

$$\zeta_{0,1} = \bar{x} \mp \frac{H}{2\sqrt{3}}.$$

Newton-Cotesove formule

Općenito, želimo aproksimirati

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = I_m(f) + E_m(f),$$
$$I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k^{(m)} f(x_k^{(m)}),$$

gdje je w težinska funkcija ($w > 0$ ili $w \geq 0$ uz dodatne uvjete).

Prirodno ograničenje je: $x_k^{(m)} \in [a, b]$.

I radi jednostavnosti $x_k^{(m)} < x_{k+1}^{(m)}$.

Napomena. Zbog jednostavnosti, ispuštamo indekse m .

Težinske koeficijente w_k (a i točke x_k) određujemo iz uvjeta egzaktnosti na nekom skupu funkcija.

Npr. egzaktnost na polinomima $\{1, x, x^2, \dots\}$.

Ili egzaktnost na $\{1, \exp x, \exp 2x, \dots\}$.

Definicija

Za integracijsku formulu ćemo reći da ima polinomni stupanj egzaktnosti d ako je

$$E_m(f) = 0 \quad \text{za sve} \quad f \in \mathcal{P}_d,$$

pri čemu je $\mathcal{P}_d$ vektorski prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog d .

Ukoliko je u

$$\int_a^b w(x)f(x) dx \approx \sum_{k=0}^m w_k f(x_k),$$

- $x_0 = a$ i $x_m = b$ - **zatvorena** integracijska formula
- $x_0 > a$ i $x_m < b$ - **otvorena** integracijska formula
- može i kombinacija $x_0 > a$ i $x_m = b$ ili $x_0 = a$ i $x_m < b$.

Određivanje koeficijenata

Neka je zadana mreža $a \leq x_0 < x_1 < \dots x_n \leq b$.

Interpolacijski polinom u Lagrangeovoj bazi:

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m L_k(x) f(x_k),$$

gdje je

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

$$\begin{aligned}
 \int_a^b w(x)f(x) dx &= \int_a^b w(x)P_m(x) dx + \int_a^b w(x)e_m(x) dx \\
 &= \sum_{k=0}^m \int_a^b w(x)L_k(x) dx f(x_k) + \int_a^b w(x)e_m(x) dx
 \end{aligned}$$

Dakle,

$$w_k = \int_a^b w(x)L_k(x) dx = \int_a^b w(x) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx$$

i

$$E_m(f) = \int_a^b w(x)e_m(x) dx$$

Definicija

Integracijsku formulu oblika

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k),$$

gdje je $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq b$, ćemo zvat **interpolacijska formula** ukoliko težinski koeficijenti zadovoljavaju

$$w_k = \int_a^b w(x) L_k(x) dx = \int_a^b w(x) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx.$$

Ukoliko je $a = x_0$ i $b = x_m$ formula se naziva **zatvorena** a ukoliko je $a < x_0$ i $b > x_m$ formula se naziva **otvorena**.

- Jer je formula bazirana na Lagrangeovoj interpolaciji, ponekad se koristi i naziv **interpolacijska formula Lagrangeovog tipa**.
- Integracijske formule se mogu izvesti i iz formula za Hermiteovu interpolaciju. Takve formule uključuju i derivacije $f'(x_k)$. (Interpolacijske formule Hermiteovog tipa.)
- Integracijske formule mogu biti niti otvorene niti zatvorene (čvor u samo jednom rubu).

Teorem

Integracijska formula

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k),$$

ima stupanj egzaktnosti barem m ako i samo ako je interpolacijska.

Dokaz. Interpolacijska očito ima stupanj egzaktnosti barem m .

Ukoliko integracijska formula ima stupanj egzaktnosti m , egzaktna je na L_k :

$$\int_a^b w(x) L_k(x) dx = \sum_{i=0}^m w_i L_k(x_i) = w_k L_k(x_k) = w_k$$

pa je formula interpolacijska.

Definicija

Newton-Cotesove formule su interpolacijske integracijske formule kod kojih su čvorovi integracije $\{x_i\}_{i=0}^m \subset [a, b]$ ekvidistantni.

Ukoliko je $a = x_0$ i $b = x_m$ formula se naziva **zatvorena** a ukoliko je $a < x_0$ i $b > x_m$ formula se naziva **otvorena**.

Za većinu svojstava koje ćemo pokazati, ekvidistantnost nije toliko važna u definiciji koliko činjenica da su čvorovi unaprijed zadani nezvezano uz točnost formule.

Daleko najčešće se koriste ekvidistantni čvorovi. Formule su jednostavnije.

Kod otvorenih formula se misli na to da su a i b od x_0 i x_n udaljeni kao i ostali susjedni čvorovi.

Ukoliko 'zaboravimo' ekvidistantnost, u istom kontekstu možemo promatrati formule koje uključuju i derivacije.

Npr., čvorovi: $t_0 = t_1 < t_2 = t_3 < \dots < t_{2m-1} = t_{2m}$ i $x_k = t_{2k}$ definiraju formulu oblika

$$\int_a^b w(x)f(x) dx \approx \sum_{k=0}^m w_k f(x_k) + \sum_{k=0}^m \bar{w}_k f'(x_k).$$

Koeficijenti Newton-Cotesovih formula

$$w_k = \int_a^b w(x) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx$$

Ekvidistantna mreža: $x_{k+1} - x_k = h$.

Supstitucija: $t = (x - x_0)/h$:

$$\begin{aligned} w_k &= h \int_{(a-x_0)/h}^{(b-x_0)/h} w(x_0 + th) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m \frac{h(t-i)}{h(k-i)} dt = \\ &= h \frac{(-1)^{m-k}}{k!(m-k)!} \int_{(a-x_0)/h}^{(b-x_0)/h} w(x_0 + th) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m (t-i) dt \end{aligned}$$

Najčešće se koriste formule gdje je $w(x) \equiv 1$.

Kod zatvorenih Newton-Cotesovih formula je

$$a = x_0, \quad b = x_m \quad \Rightarrow \quad \frac{a - x_0}{h} = 0, \quad \frac{b - x_0}{h} = m.$$

Koeficijenti zatvorenih Newton-Cotesovih formula

$$w_k = h \frac{(-1)^{m-k}}{k!(m-k)!} \int_0^m \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m (t-i) dt$$

Kod otvorenih Newton-Cotesovih formula je

$$a = x_0 - h, \quad b = x_m + h \Rightarrow \frac{a - x_0}{h} = -1, \quad \frac{b - x_0}{h} = m + 1.$$

Koeficijenti otvorenih Newton-Cotesovih formula

$$w_k = h \frac{(-1)^{m-k}}{k!(m-k)!} \int_{-1}^{m+1} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m (t-i) dt$$

Simetrija težinskih koeficijenata

Vrijedi $w_k = w_{m-k}$ (zatvorena formula):

$$\begin{aligned}
 w_k &= h \frac{(-1)^{m-k}}{k!(m-k)!} \int_0^m \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m (t-i) dt = (u = m-t) \\
 &= -h \frac{(-1)^{m-k}}{k!(m-k)!} \int_m^0 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m (m-u-i) du = \\
 &= h \frac{(-1)^{-(m-k)}}{k!(m-k)!} \int_0^m \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m (u-(m-i)) (-1)^m du = \\
 &= h \frac{(-1)^{m-(m-k)}}{k!(m-k)!} \int_0^m \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq m-k}}^m (u-j) du = w_{m-k}
 \end{aligned}$$

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih formula

$$w_k = A W_k h,$$

m	A	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	
1	$\frac{1}{2}$	1	1				Trapezna
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1			Simpsonova
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1		Simpsonova 3/8-ska
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7	Booleova
5	$\frac{5}{288}$	19	75	50	50	75	
6	$\frac{1}{140}$	41	216	27	272	27	Weddleova
7	$\frac{7}{17280}$	751	3577	1323	2989	2989	
8	$\frac{4}{14175}$	989	5888	−928	10496	−4540	

Koeficijenti otvorenih Newton-Cotesovih formula

m	A	W_0	W_1	W_2
0	2	1		
1	$\frac{3}{2}$	1	1	
2	$\frac{4}{3}$	2	-1	2
3	$\frac{5}{24}$	11	1	1
4	$\frac{3}{10}$	11	-14	26

Zaključak. Koeficijenti u integracijskim formulama za veće m

- poprimaju i pozitivne i negativne predznake,
- rastu po apsolutnoj vrijednosti.

Zbog kraćenja može doći do velike greške u rezultatu.

Egzaktnost Newton-Cotesovih formula na polinomima

Promatramo funkciju

$$(x - c)^{2k+1}, \quad c = \frac{a+b}{2}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Antisimetrična s obzirom na sredinu intervala $[a, b]$.

$$\int_a^b w(x)(x - c)^{2k+1} dx = 0$$

ukoliko je w simetrična na $[a, b]$.

Zbog simetrije koeficijenata u Newton-Cotesovim formulama:

$$I_m \left((x - c)^{2k+1} \right) = \sum_{i=0}^m w_i (x_i - c)^{2k+1} = 0.$$

- Ukoliko je Newton-Cotesova formula egzaktna na $\mathcal{P}_{2k}$ egzaktna je i na $\mathcal{P}_{2k+1}$.
- Ovo smo uočili kod Simpsonove formule. Izvedena je iz uvjeta egzaktnosti na polinomima stupnja 2 a egzaktna je na polinomima stupnja 3.
- I_{2k} i I_{2k+1} imaju isti polinomni stupanj egzaktnosti.
- $\rightarrow$ Preferira se korištenje I_{2k} .
Jednostavnija a isti stupanj točnosti. (Konstanta u ocjeni pogreške nije ista.)

Ocjena pogreške

Iz

$$F(x) = P_m(x) + e_m(x)$$

slijedi

$$\int_a^b w(x)F(x) dx = I_m(x) + \int_a^b w(x)e_m(x).$$

Pogreška integracije:

$$E_m = \int_a^b w(x)e_m(x) dx = \int_a^b w(x) \omega_m(x) f[x_0, \dots, x_n, x] dx.$$

Jednostavni pristup:

$$\begin{aligned}
 |E_m| &\leq \int_a^b w(x) |\omega_m(x)| |f[x_0, \dots, x_m, x]| dx \\
 &= \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \int_a^b w(x) |\omega_m(x)| dx = (t = (x - x_0)/h) \\
 &= \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} h^{m+2} \int_0^m w(x) \prod_{i=0}^m |t - i| dt \\
 &= C_m h^{m+2} \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}
 \end{aligned}$$

- Ovo nije optimalno.
- Za parni m je formula egzaktna na $\mathcal{P}_{m+1}$.
 $E_m(x^{m+1}) = 0$. Ova ocjena je već od 0.
- Simpsonova formula

$$|E_2(f)| \leq \frac{h^4}{12} |f^{(3)}(\xi)|$$

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Teorem (Ocjena pogreške za parni red)

Neka je $[a, b] \subset \mathbb{R}$, neka je m paran i $f \in C^{m+2}(a, b)$. Tada zatvorena Newton-Cotesova formula reda n za $w \equiv 0$ i neki $\xi \in (a, b)$ zadovoljava

$$E_m(f) = C_m \frac{f^{(m+2)}(\xi)}{(m+2)!}$$

gdje je

$$C_m = \int_a^b x \omega_m(x) dx < 0.$$

Teorem (Ocjena pogreške za neparni red)

Neka je $[a, b] \subset \mathbb{R}$, neka je m neparan i $f \in C^{m+1}(a, b)$. Tada zatvorena Newton-Cotesova formula reda n za $w \equiv 0$ i neki $\xi \in (a, b)$ zadovoljava

$$E_m(f) = C_m \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

gdje je

$$C_m = \int_a^b \omega_m(x) dx < 0.$$

Koeficijente možemo napisati u malo drugačijem obliku.

Uz supstituciju $t = (x - x_0)/h$:

$$C_{2k} = \int_a^b x \omega_{2k}(x) dx = h^{2k+3} \int_0^{2k} t^2(t-1)(t-2)\dots(t-2k) dt$$

$$\begin{aligned} C_{2k+1} &= \int_a^b \omega_{2k+1}(x) dx = \\ &= h^{2k+3} \int_0^{2k+1} t(t-1)(t-2)\dots(t-(2k+1)) dt \end{aligned}$$

Sada je ocjena pogreške oblika

$$E_m(f) = B_m h^{m+2} \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}, \quad m \text{ neparan}$$

$$E_m(f) = B_m h^{m+3} \frac{f^{(m+2)}(\xi)}{(m+2)!}, \quad m \text{ paran}$$

Koeficijenti zatvorenih Newton-Cotesovih formula

$$E_m(f) = B_m h^{m+1+k} f^{(m+1+k)}(\zeta)$$

$$k = \begin{cases} 0, & \text{za } m \text{ neparan,} \\ 1, & \text{za } m \text{ paran.} \end{cases}$$

Koeficijenti zatvorenih Newton-Cotesovih formula

$$w_k = A W_k h,$$

m	A	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	B_m
1	$\frac{1}{2}$	1	1				$-\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1			$-\frac{1}{90}$
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1		$-\frac{3}{80}$
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7	$-\frac{8}{945}$
5	$\frac{5}{288}$	19	75	50	50	75	$-\frac{275}{12096}$
6	$\frac{1}{140}$	41	216	27	272	27	$-\frac{9}{1400}$
7	$\frac{7}{17280}$	751	3577	1323	2989	2989	$-\frac{8183}{518400}$
8	$\frac{4}{14175}$	989	5888	-928	10496	-4540	$-\frac{2368}{467775}$

Produljene Newton-Cotesove formule

- Osnovna Newton-Cotesova formula se ne primjenjuje na cijelom segmentu $[a, b]$.
- Segment $[a, b]$ podijelimo na N (jednakih) podsegmenta na na svakom od njih primijenimo osnovnu Newton-Cotesovu formulu:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N \left(I_m^{(i)}(f) + E_m^{(i)}(f) \right).$$

- Sve skupa $n = Nm$ podintervala i $n + 1 = Nm + 1$ ekvidistantna točka $x_0, x_1, \dots, x_{Nm}$.

Produljena integracijska formula:

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_m^P = \sum_{i=1}^N I_m^{(i)}(f).$$

Produljena trapezna formula

$$I_2^P = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right)$$

Produljena Simpsonova formula

$$I_3^P = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right)$$

Ocjena pogreške za produljene Newton-Cotesove formule

$$\begin{aligned} E_m &= \sum_{i=1}^N E_m^{(i)}(f) = \sum_{i=1}^N B_m h^{m+1+k} f^{(m+1+k)}(\zeta_i) = \\ &= B_m h^{m+k} \frac{1}{m} h m N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(m+1+k)}(\zeta_i) = \\ &= (b-a) B_m h^{m+k} f^{(m+1+k)}(\zeta) \end{aligned}$$

$$k = \begin{cases} 0, & \text{za } m \text{ neparan,} \\ 1, & \text{za } m \text{ paran.} \end{cases}$$

Ortogonalni polinomi

Definicija skalarnog produkta

Neka je $w(x)$ zadana funkcija. $w(x)$ je težinska funkcija ako je

- $w(x) \geq 0$ na intervalu $[a, b]$,
- $w(x)$ može biti jednaka 0 samo u izoliranim točkama.

Težinska L_2 -norma (ili samo 2-norma) funkcije u na $[a, b]$ je

$$\|u\|_2 = \left(\int_a^b w(x) u(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Ako je ta norma konačna i za funkciju u i za funkciju v , onda možemo definirati težinski skalarni produkt

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b w(x) u(x) v(x) dx.$$

Definicija skalarnog produkta

Skalarni produkt $\langle u, v \rangle$ je dobro definiran (konačan), jer vrijedi Cauchy–Schwarzova nejednakost

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_2 \cdot \|v\|_2.$$

$\langle u, v \rangle$ je skalarni produkt, jer

1. $\langle u, u \rangle \geq 0$, a jednak je 0 za one funkcije u koje su nula u svim točkama gdje je $w(x) > 0$, (v. mjera i integral)
2. vrijedi linearnost u prvom argumentu

$$\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle,$$

3. i linearnost u drugom argumentu,

$$\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \rangle = \beta_1 \langle u, v_1 \rangle + \beta_2 \langle u, v_2 \rangle.$$

Ortogonalne funkcije

Za funkcije u i v reći ćemo da su ortogonalne ako vrijedi

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Ako su u i v ortogonalne, onda vrijedi

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.\end{aligned}$$

Pitagorin poučak!

Sustavi ortogonalnih funkcija

Ako imamo sustav ortogonalnih funkcija u_k , $k = 0, \dots, m$, za koje vrijedi

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad \text{za } i \neq j, \quad i, j = 0, \dots, m,$$

i $u_k \not\equiv 0$ tamo gdje je $w(x) > 0$, onda vrijedi

$$\left\| \sum_{k=0}^m \alpha_k u_k \right\|_2^2 = \sum_{k=0}^m |\alpha_k|^2 \|u_k\|_2^2.$$

Prethodna jednakost znači da je ortogonalni sustav funkcija linearno nezavisan tamo gdje je $w(x) > 0$.

Ako je lijeva strana jednaka nula, mora biti i desna, a po pretpostavci je $\|u_k\|_2 > 0$, pa je jedino moguće da je $\alpha_k = 0$ za $k = 0, \dots, m$.

Ortogonalizacija

Ako je zadan skup funkcija $\hat{\varphi}_j$ koje su linearno nezavisne, ali nisu ortogonalne na nekom intervalu,

- $\hat{\varphi}_j$ ortogonaliziramo korištenjem (modificiranog) Gram–Schmidtovog procesa ortogonalizacije.
- Funkcije φ_j koje razapinju isti prostor kao $\hat{\varphi}_j$ ne treba normirati.

Ortogonalizacija započinje s:

$$\varphi_0 := \hat{\varphi}_0.$$

Zatim, za $j = 1, 2, \dots$ stavimo

$$\varphi_j := \hat{\varphi}_j - \sum_{k=0}^{j-1} a_k \varphi_k, \quad a_k = \frac{\langle \hat{\varphi}_j, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|_2^2}.$$

Tada je φ_j ortogonalan na sve prethodne φ_k , $k = 0, \dots, j-1$.

Primjer

Primjer. Nađimo ortogonalnu bazu za prostor razapet funkcijama $1, x, x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w = 1$.

Rješenje. Skalarni produkt funkcija u i v definiran je s

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^1 w(x)u(x)v(x) dx = \int_{-1}^1 u(x)v(x) dx.$$

Prva funkcija u ortogonalnoj bazi jednaka je prvoj zadanoj funkciji,

$$\varphi_0(x) = 1.$$

Sada je

$$\begin{aligned}\langle x, \varphi_0 \rangle &= \int_{-1}^1 x \cdot 1 \, dx = (\text{neparnost}) = 0, \\ \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle &= \int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dx = x \Big|_{-1}^1 = 2,\end{aligned}$$

pa je

$$a_0 = \frac{\langle x, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{0}{2} = 0.$$

Odatle odmah dobivamo

$$\varphi_1(x) = x - a_0 \cdot 1 = x.$$

Za ortogonalni polinom stupnja 2 treba izračunati a_0 i a_1

$$\langle x^2, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3},$$

$$\langle x^2, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x \, dx = (\text{neparnost}) = 0,$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x \, dx = \frac{2}{3},$$

pa je

$$a_0 = \frac{\langle x^2, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}, \quad a_1 = \frac{\langle x^2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0.$$

Odatle je

$$\varphi_2(x) = x^2 - a_1 \cdot x - a_0 \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Primjeri ortogonalnih familija funkcija

Trigonometrijske funkcije

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$$

čine ortogonalnu familiju funkcija na intervalu $[0, 2\pi]$ uz težinsku funkciju $w(x) = 1$.

Pokažimo da je to zaista istina. Neka su $k, \ell \in \mathbb{N}_0$. Tada vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin \ell x \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(k+\ell)x - \cos(k-\ell)x) \, dx.$$

Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija

Ako je $k = \ell$, onda je prethodni integral jednak

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\sin(k + \ell)x}{k + \ell} - x \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Ako je $k \neq \ell$, onda je jednak

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\sin(k + \ell)x}{k + \ell} - \frac{\sin(k - \ell)x}{k - \ell} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Drugim riječima, vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin \ell x \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ \pi, & k = \ell, \end{cases} \quad k, \ell = 1, 2, \dots,$$

Na sličan način, pretvaranjem produkta trigonometrijskih funkcija u zbroj, možemo pokazati da je

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos \ell x \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ 2\pi, & k = \ell = 0, \\ \pi, & k = \ell > 0, \end{cases} \quad k, \ell = 0, 1, \dots,$$

te, također, da je

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos \ell x \, dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \ell = 0, 1, \dots,$$

Fourierov red

Ako periodičku funkciju f osnovnog perioda duljine 2π aproksimiramo redom oblika

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

onda, množenjem odgovarajućim trigonometrijskim funkcijama i integriranjem, dobivamo

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Prethodni red poznat je pod imenom Fourierov red, a koeficijenti kao Fourierovi koeficijenti.

Klasični ortogonalni polinomi

U praksi najčešće susrećemo pet tipova klasičnih ortogonalnih polinoma.

Prisjetimo se, za polinome

$$\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\},$$

(indeks polinoma označava stupanj), kažemo da su ortogonalni obzirom na težinsku funkciju w , na $[a, b]$, ako vrijedi

$$\int_a^b w(x) p_m(x) p_n(x) dx = 0, \quad \text{za } m \neq n.$$

Težinska funkcija

- određuje sistem polinoma do na konstantni faktor u svakom od polinoma.
- Izbor takvog faktora zove se još i standardizacija ili normalizacija.

Zajedničke karakteristike ortogonalnih polinoma:

- Ortogonalni polinomi zadovoljavaju tročlanu rekurziju

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

s tim da su poznate “početne” funkcije p_0 i p_1 , i sve funkcije α_n, β_n , za $n \in \mathbb{N}$.

- Oprez. Prethodnu rekurziju zadovoljavaju i mnoge specijalne funkcije koje nisu ortogonalne!
- Nultočke ortogonalnih polinoma uvijek se nalaze unutar intervala $[a, b]$ na kojem su polinomi ortogonalni.

Čebiševljevi polinomi prve vrste

Čebiševljevi polinomi prve vrste

- označavaju se s T_n ,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0. \end{cases}$$

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Za njih postoji i eksplicitna formula

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Osim toga, n -ti Čebiševljev polinom prve vrste T_n zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste na $[0, 1]$

Katkad se koriste i Čebiševljevi polinomi prve vrste

- transformirani na interval $[0, 1]$,
- u oznaci T_n^* .

Dobivaju se korištenjem linearne (preciznije, afine) transformacije

$$[0, 1] \ni x \mapsto \xi := 2x - 1 \in [-1, 1].$$

Relacija ortogonalnosti postaje

$$\int_0^1 \frac{T_m^*(x) T_n^*(x)}{\sqrt{x - x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0, \end{cases}$$

a rekurzivna relacija

$$T_{n+1}^*(x) - 2(2x - 1)T_n^*(x) + T_{n-1}^*(x) = 0,$$

uz start

$$T_0^*(x) = 1, \quad T_1^*(x) = 2x - 1.$$

Čebiševljevi polinomi druge vrste

Čebiševljevi polinomi druge vrste

- označavaju se s U_n ,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} U_m(x) U_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi/2, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Zadovoljavaju istu rekurziju kao i polinomi prve vrste

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0,$$

uz malo drugačiji start

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x.$$

Za njih postoji i eksplicitna formula

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sin(\arccos x)}.$$

n -ti Čebiševljev polinom druge vrste U_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0.$$

Legendreovi polinomi

Legendreovi polinomi

- označavaju se s P_n ,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = 1.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 2/(2n+1), & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

Osim toga, n -ti Legendreov polinom P_n zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Laguerreovi polinomi

Laguerreovi polinomi

- označavaju se s L_n ,
- ortogonalni su na intervalu $[0, \infty)$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 1, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Laguerreovi polinomi (nastavak)

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x.$$

Osim toga, n -ti Laguerreov polinom L_n zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

Hermiteovi polinomi

Hermiteovi polinomi

- označavaju se s H_n ,
- ortogonalni su na intervalu $(-\infty, \infty)$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

Osim toga, n -ti Hermiteov polinom H_n zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Nultočke ortogonalnih polinoma

Teorem

Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Tada svaki polinom p_n ima točno n različitih (jednostrukih) realnih nultočaka na otvorenom intervalu $\langle a, b \rangle$.

Dokaz: Neka su $x_1, x_2, \dots, x_m$ sve međusobno različite nultočke polinoma p_n za koje vrijedi:

- $a < x_i < b$,
- $p_n(x)$ mijenja predznak u x_i (x_i je neparne kratnosti).

Budući da je p_n stupnja n ,

- po osnovnom teoremu algebre, p_n ima točno n nultočaka,
- a onih koje zadovoljavaju prethodna dva svojstva ima manje ili jednako n , tj. znamo da je $m \leq n$.

Polinom p_n onda možemo prikazati u obliku produkta

$$p_n(x) = h(x) (x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_m)^{r_m},$$

pri čemu

- svi r_i moraju biti neparni, a
- polinom $h(x)$ ne smije promijeniti predznak na (a, b) .

Pretpostavimo da nultočaka koje zadovoljavaju tražena dva svojstva ima striktno manje od n , tj. $m < n$.

Pokažimo da je to nemoguće. Definiramo polinom

$$B(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_m).$$

Množenjem s $p_n(x)$, dobivamo

$$\begin{aligned} p_n(x)B(x) &= p_n(x)(x - x_1) \cdots (x - x_m) \\ &= h(x)(x - x_1)^{r_1+1} \cdots (x - x_m)^{r_m+1}. \end{aligned}$$

Po definiciji točaka $x_1, \dots, x_m$, ovaj polinom ne mijenja znak prolaskom kroz točke $x_1, \dots, x_m$ (eksponenti $r_i + 1$ su parni).

Osim toga, $h(x)$ ne mijenja znak na (a, b) , tj.

- čitav polinom $p_n(x)B(x)$ ne mijenja znak na (a, b) .

Zato vrijedi

$$\int_a^b w(x)B(x)p_n(x) dx \neq 0,$$

jer je to integral funkcije fiksnog predznaka (plus ili minus).

S druge strane, prethodni integral je skalarni produkt polinoma B (stupnja $m < n$) i polinoma p_n (stupnja n).

- Svaki ortogonalni polinom p_n je okomit na sve polinome nižeg stupnja (v. korolar), pa je

$$\int_a^b w(x)B(x)p_n(x) dx = \langle B, p_n \rangle = 0,$$

što je kontradikcija.

Zaključak. Pretpostavka o stupnju polinoma B je bila pogrešna, tj. mora biti $m = n$.

Dakle, p_n ima točno n nultočaka $x_1, \dots, x_n$ u kojima mijenja predznak, pa one moraju biti jednostruke, jer je $p'_n(x_i) \neq 0$. □

Gaussove formule

Newton-Cotesove formule.

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ zadani (i ekvidistantni).

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = I_m(f) + E_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k) + E_m(f)$$

Težine w_k određene iz uvjeta egzaktnosti na prostoru polinoma.

Postignuti stupanj egzaktnosti: m ili $m + 1$.

Gaussove formule: određujemo i čvorove x_i tako da postignemo što je moguće veću egzaktnost.

Malo ćemo promijeniti notaciju:

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = I_n(f) + E_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + E_n(f)$$

Želimo egzaktnost maksimalnog stupnja.

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k).$$

n koeficijenata i n čvorova $\rightarrow$ Očekujemo egzaktnost na $\mathcal{P}_{2n-1}$.

Neka je $p_{2n-1} \in \mathcal{P}_{2n-1}$ i

$$\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Tada je

$$p_{2n-1}(x) = q_{n-1}(x)\omega_n(x) + r_{n-1}(x), \quad q_{n-1}, r_{n-1}(x) \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

$$\int_a^b w(x)p_{2n-1}(x) dx = \int_a^b w(x)r_{n-1}(x) dx + \int_a^b w(x)q_{n-1}(x)\omega_n(x) dx$$

Ukoliko su težine dobivene preko interpolacijskog polinoma
 → formula je egzaktna na $\mathcal{P}_{n-1}$:

$$\int_a^b w(x) r_{n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k r_{n-1}(x_k) = \sum_{k=1}^n w_k p_{2n-1}(x_k)$$

jer

$$\begin{aligned} p_{2n-1}(x_k) &= q_{n-1}(x_k) \omega_n(x_k) + r_{n-1}(x_k) = \\ &= q_{n-1}(x_k) \cdot 0 + r_{n-1}(x_k) = r_{n-1}(x_k). \end{aligned}$$

Sada je

$$\int_a^b w(x) p_{2n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k p_{2n-1}(x_k) + \int_a^b w(x) q_{n-1}(x) \omega_n(x) dx$$

$$\int_a^b w(x) q_{n-1}(x) \omega_n(x) dx = 0, \quad \forall q_{n-1}$$

je zadovoljeno ukoliko je ω_n ortogonalan na sve polinome iz $\mathcal{P}_{n-1}$.

$\Rightarrow$ Integracijska formula je egzaktna na $\mathcal{P}_{2n-1}$
ukoliko je ω_n n -ti ortogonalni polinom
(tj. čvorovi x_i su nultočke n -tog ortogonalnog polinoma)
a težinski koeficijenti w_i dobiveni interpolacijskom formulom.

Čvorovi Gaussovih integracijskih formula

Teorem (Svojstva čvorova)

Svi čvorovi x_k su realni, različiti i leže unutar otvorenog intervala $[a, b]$.

Dokaz. Čvorovi su nultočke ortogonalnog polinoma stupnja n .

Ortogonalni polinom stupnja n ima točno n jednostrukih (dakle realnih nultočaka) i vrijedi

$$a < x_1 < \dots < x_n < b.$$



Gaussove formule - egzaktnost na x^{2n}

Odaberimo

$$p_{2n}(x) = \omega_n^2(x).$$

S jedne strane je

$$\int_a^b w(x) \omega_n^2(x) dx > 0.$$

S druge strane je

$$\sum_{k=1}^n w_k \omega_n^2(x_k) = 0$$

jer su x_k nultočke funkcije ω_n .

$\Rightarrow$ Formula nije egzaktna na $\mathcal{P}_{2n}$.

Primjeri Gaussovih formula

- Gauss-Legendreove formule

$$w(x) = 1. \quad \text{interval: } [-1, 1]$$

Ove formule je Gauss originalno proučavao.

- Gauss-Laguerreove formule

$$w(x) = \exp(-x). \quad \text{interval: } [0, \infty)$$

- Gauss-Hermiteove formule

$$w(x) = \exp(-x^2). \quad \text{interval: } (-\infty, \infty)$$

- Gauss-Čebiševljeve formule

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \text{interval: } [-1, 1]$$

Gauss–Legendreove formule

Gaussove integracijske formule oblika

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

zovu se Gauss–Legendreove formule.

- Težinska funkcija je $w(x) = 1$ na intervalu $[-1, 1]$.

Čvorovi integracije su nultočke polinoma P_n definiranih Rodriguesovom formulom

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \geq 0.$$

Težine u Gaussovoj formuli možemo napisati na razne načine

$$\begin{aligned}
 w_k &= \frac{2(1 - x_k^2)}{[nP_{n-1}(x_k)]^2} = \frac{2(1 - x_k^2)}{[(n+1)P_{n+1}(x_k)]^2} \\
 &= \frac{2}{nP'_n(x_k)P_{n-1}(x_k)} = -\frac{2}{(n+1)P'_n(x_k)P_{n+1}(x_k)} \\
 &= \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Greška kod numeričke integracije dana je formulom

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

Ocjena pogreške za Gaussove formule

Hermiteova interpolacija

Neka su $x_1, \dots, x_n$ međusobno različite točke.

Hermiteov interpolacijski polinom $h_{2n-1} \in \mathcal{P}_{2n-1}$:

$$h_{2n-1}(x_k) = f(x_k), \quad h'_{2n-1}(x_k) = f'(x_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Prikaz u Hermiteovoj bazi :

$$h_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^n (f(x_k)h_{k,0}(x) + f'(x_k)h_{k,1}(x)),$$

gdje su

$$h_{k,0}(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{za } j \neq k, \\ 1, & \text{za } j = k, \end{cases} \quad h'_{k,0}(x_j) = 0,$$

$$h_{k,1}(x_j) = 0, \quad h'_{k,1}(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{za } j \neq k, \\ 1, & \text{za } j = k. \end{cases}$$

Polinome Hermiteove baze možemo eksplicitno izraziti u obliku

$$\begin{aligned} h_{k,0}(x) &= [1 - 2(x - x_k)L'_k(x_k)] L_k^2(x) \\ h_{k,1}(x) &= (x - x_k) L_k^2(x), \end{aligned}$$

gdje je L_k odgovarajući polinom Lagrangeove baze.

Pripadni polinom čvorova ω_h za Hermiteovu interpolaciju je

$$\omega_h(x) = (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 = \omega_n^2(x),$$

gdje je ω_n polinom čvorova za Lagrangeovu interpolaciju na istoj mreži.

Interpolacijska pogreška:

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n-1}(x) = \omega_n^2(x) \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.$$

Integracijske formule s derivacijama u čvorovima

Integracijom Hermiteovog interpolacijskog polinoma dobivamo integracijsku formulu oblika

$$\int_a^b w(x)f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \left(w_k f(x_k) + w'_k f'(x_k) \right).$$

Formula koristi vrijednosti funkcije i derivacije.

Težine w_k i w'_k su

$$w_k = \int_a^b w(x)h_{k,0}(x) dx, \quad w'_k = \int_a^b w(x)h_{k,1}(x) dx,$$

za $k = 1, \dots, n$.

Ako koristimo prikaz preko polinoma Lagrangeove baze:

$$w_k = \int_a^b w(x) [1 - 2(x - x_k)L'_k(x_k)] L_k^2(x) dx,$$

$$w'_k = \int_a^b w(x) (x - x_k) L_k^2(x) dx,$$

za $k = 1, \dots, n$.

Formula je egzaktna na $\mathcal{P}_{2n-1}$.

Kao i Gaussove formule.

Gaussove formule i integracijske formule s derivacijama u čvorovima

Neka je

$$I_n = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

Gaussova integracijska formula.

Ona je egzaktna na polinomima Hermiteove baze pa:

$$\int_a^b w(x) h_{j,0}(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k h_{k,0}(x_k) = w_j$$

$$\int_a^b w(x) h_{j,1}(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k h_{k,1}(x_k) = 0$$

Gausove formule su zapravo integracijske formule s derivacijama u čvorovima.

Čvorovi x_k su izabrani tako da je $w'_k = 0$.

Ocjena pogreške za Gaussove formule:

$$\begin{aligned}
 E_n(f) &= \int_a^b w(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) = \\
 &= \int_a^b w(x) f(x) dx - \int_a^b w(x) h_{2n-1}(x) dx = \\
 &= \int_a^b w(x) (f(x) - h_{2n-1}(x)) dx = \\
 &= \int_a^b w(x) \omega_n^2(x) f[x_0, x_0, \dots, x_n, x_n, x] dx = \\
 &= f[x_0, x_0, \dots, x_n, x_n, \eta] \int_a^b w(x) \omega_n^2(x) dx = \\
 &= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x) \omega_n^2(x) dx
 \end{aligned}$$

Integral na desnoj strani je kvadrat norme polinoma p_n s vodećim koeficijentom $A_n = 1$, pa je

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \int_a^b w(x) p_n^2(x) dx = \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \|p_n\|^2.$$

U principu, za zadane w i $[a, b]$,

- $\|p_n\|^2$ se može eksplicitno izračunati i ovisi samo o n .

Za Gauss-Legendreovu formulu:

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

Konvergencija Gaussovih formula

Tvrdnja. Ako je $[a, b]$ konačni interval, tada Gaussova formula konvergira za bilo koju neprekidnu funkciju f , tj. za $f \in C[a, b]$ vrijedi

$$E_n(f) \rightarrow 0, \quad \text{za } n \rightarrow \infty.$$

Dokaz se temelji na Weierstrassovom teoremu o uniformnoj aproksimaciji polinomima, koji kaže:

Ako je $\hat{p}_{2n-1}(f; \cdot)$ polinom stupnja $2n - 1$ koji najbolje uniformno aproksimira f na $[a, b]$, onda vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\cdot) - \hat{p}_{2n-1}(f; \cdot)\|_{\infty} = 0.$$

Pokaže se da pogreška integracije zadovoljava

$$|E_n(f)| \leq C \|f(\cdot) - \hat{p}_{2n-1}(f; \cdot)\|_{\infty} \rightarrow 0, \quad \text{za } n \rightarrow \infty.$$

Ne vrijedi za Newton–Cotesove formule

Ovaj zaključak ne vrijedi za Newton–Cotesove formule,

- iako formula s n čvorova egzaktno integrira polinom $\hat{p}_{n-1}$.

Za malo veće n , težine w_k mogu biti i negativne. Tada još uvijek vrijedi

$$\sum_{k=1}^n w_k = \int_a^b w(x) dx = \mu_0,$$

zbog egzaktne integracije konstante $f(x) = 1$.

Međutim, apsolutne vrijednosti težina neograničeno rastu, kad n raste, tako da

$$\sum_{k=1}^n |w_k| \rightarrow \infty, \quad \text{za } n \rightarrow \infty,$$

a upravo ova suma ulazi u ocjenu greške.

Produljene formule

Produljene Gaussove formule općenito nemaju smisla uz upotrebu težinskih funkcija.

Prethodni rezultat pokazuje da imamo konvergenciju povećavanjem reda metode.

Produljena formula ukoliko je $w \equiv 1$ (Gauss-Legendre).

Segment $[a, b]$ podijelimo na N (jednakih) dijelova:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

$$[x_0, x_1] \quad \leftrightarrow \quad [-1, 1], \quad x = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{H}{2}t$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{H}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{H}{2}t\right) dt$$

Ocjena pogreške:

$$\begin{aligned} E_n(f) &= \frac{H}{2} \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} f\left(\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{H}{2}t\right)_{t=\eta_i} \\ &= \frac{H}{2} \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} \left(\frac{H}{2}\right)^{2n} f^{(2n)}\left(\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{H}{2}\eta_i\right) \\ &= H^{2n+1} \frac{(n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi_i) \end{aligned}$$

Pogreška za produljenu formulu:

$$\begin{aligned} E_n^P(f) &= \sum_{i=1}^N H^{2n+1} \frac{(n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi_i) \\ &= H^{2n+1} \frac{(n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(2n)}(\xi_i) \\ &= (b-a) H^{2n} \frac{(n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \end{aligned}$$

Računanje čvorova i težina u Gaussovim formulama

Kako za zadani $n \in \mathbb{N}$ naći sve “parametre” odgovarajuće Gaussove integracijske formule reda n

$$\int_a^b w(x)f(x) dx \approx I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k).$$

To znači da treba izračunati

- sve čvorove x_k i težine w_k , za $k = 1, \dots, n$.

Usput, ove parametre treba izračunati maksimalno točno, da osiguramo što točniju numeričku integraciju raznih funkcija f .

Idealno: izračunati čvorove i težine na “punu” točnost aritmetike računala (u kojoj radimo).

Gaussove integracijske formule egzaktno integriraju sve polinome iz $\mathcal{P}_{2n-1}$.

- Možemo izabrati bilo koju bazu u tom prostoru $\mathcal{P}_{2n-1}$
- i napisati sustav od $2n$ jednažbi s $2n$ nepoznanica, iz uvjeta egzaktno integracije na toj bazi.

Na primjer, u standardnoj bazi $\{1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}\}$ dobivamo sustav oblika

$$\mu_j = \int_a^b w(x) x^j dx = \sum_{k=1}^n w_k x_k^j, \quad j = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Loš pristup!

- Ovisnost o nepoznanicama x_k je nelinearna.
- Moguća loša uvjetovanost izabrane baze prostora polinoma.

Drugi pristup;

- Odrediti nultočke n -tog ortogonalnog polinoma
- Težine w_i odrediti prema definiciji

I ovo nije optimalno.

Treći pristup

- Ortogonalni polinomi su definirani i tročlanom rekurzijom,
- Tročlana rekurzija definira trodijagonalnu matricu
- čije svojstvene vrijednosti su nultočke ortogonalnog polinoma
- a iz svojstvenih vektora se određuju težinski koeficijenti u integracijskoj formuli

Neke integracijske formule s povišenom egzaktnošću

Integracijske formule s fiksnim rubovima

U težinskoj integracijskoj formuli

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + E_n(f),$$

unaprijed zadamo $n - k$ čvorova integracije u $[a, b]$, a

- preostalih k čvorova određujemo tako da dobijemo maksimalni mogući stupanj egzaktnosti $d = n - 1 + k$.

Ovaj pristup se najčešće koristi za $k = n - 1$ i $k = n - 2$, a zadani čvorovi su

- jedan ili oba ruba intervala integracije $[a, b]$,
s tim da zadani rubni čvor mora biti konačan.

Neka je lijevi rub intervala — točka a konačna

- i zadana kao čvor integracije $x_1 = a$.

Preostalih $k = n - 1$ čvorova određujemo tako da

- dobijemo maksimalni stupanj egzaktnosti $d = 2n - 2$.

Ove integracijske formule zovu se **Gauss–Radau** formule.

Neka su oba ruba intervala — točke a i b konačne

- i zadane kao čvorovi integracije $x_1 = a, x_n = b$.

Preostala $k = n - 2$ čvora određujemo tako da

- dobijemo maksimalni stupanj egzaktnosti $d = 2n - 3$.

Ove integracijske formule zovu se **Gauss–Lobatto** formule.