Numeričko rješavanje ODJ
Runge-Kuttine metode

Vježbe

Zadatak

Pokažite da sljedeće funkcije tadovoljavaju Lipschitzov uvjet na odgovarajućim intervalima i odredite odgovarajuću Lipshitzovu konstantu:

(a) $f(x, y) = 2\, y\, x^{-4}, \quad x \in [1, \infty);$

(b) $f(x, y) = e^{-x^2} \tan^{-1} y, \quad x \in [1, \infty);$

(c) $f(x, y) = 2y \left(1 + y^2\right)^{-1} \left(1 + e^{-|x|}\right), \quad x \in (-\infty, \infty).$

Zadatak

Pretpostavimo da je $m \in \mathbb{N}$. Pokažite da inicijalni problem

$$y' = y^{2m/(2m+1)}, \quad y(0) = 0,$$

ima beskonačno neprekidno diferencijabilnih rješenja.
Zašto to nije u kontradikciji s teoremom o egzistenciji jedinstvenog rješenja?

Zadatak

Primijenite Eulerovu metodu na problem

$$y' = x\,e^{-5x} - 5y, \quad y(0) = 0$$

na intervalu $[0, 1]$ s korakom $h = 1/N$. Ako s y_N označimo dobivenu aproksimaciju za $y(1)$, pokažite da

$$y_N \to y(1) \quad \text{kada} \quad N \to \infty.$$

Zadatak

Promatrajmo inicijalni problem

$$y' = \ln\ln(4 + y^2), \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 1,$$

i niz $(y_n)_{n=0}^{N}$, $N \geq 1$, generiran Eulerovom metodom

$$y_{n+1} = y_n + h \ln\ln(4 + y_n^2), \quad n = 0, 1, \ldots, N - 1, \quad y0 = 1,$$

koristeći mrežu $x_n = n\,h$, $n = 0, 1, \ldots, N$, s korakom $h = 1/N$.

(a) Ako s T_n označimo pogrešku odsjecanja Eulerove metode za ovaj problem u točki x_n pokažite da je $|T_n| \leq h/4$.

(b) Pokažite da je

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \leq (1 + h\,L)|y(x_n) - y_n| + h|T_n|$$

za $n = 0, 1, \ldots, N-1$, gdje je $L = 1/(2\ln 4)$.

(c) Odredite pozitivni cijeli broj N_0, što je moguće manji, takav da je

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(x_n) - y_n| \leq 10^{-4}$$

za svaki $N \geq N_0$.

Zadatak

Neka je T_n pogreška odsjecanja trapezne metodu

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f_{n+1} + f_n)$$

za inicijalni problem $y' = f(x, y)$, $y(0) = y_0$. S f_n i h označeno $f_n = f(x_n, y_n)$ i $h = x_{n+1} - x_n$.
Iz integrala

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1})(x - x_n)y'''(x)\,dx,$$

ili drugačije, pokažite da je

$$T_n = -\frac{1}{12}h^3 y'''(\xi_n)$$

za neki ξ_n u intervalu (x_n, x_{n+1}), gdje je y rješenje inicijalnog problema.

Pretpostavimo da f zadovoljava Lipschitzov uvjet

$$|f(x,u) - f(x,v)| \leq L|u - v|$$

za sve realne x, u, v i gdje je L pozitivna konstanta neovisna o x. Nadalje, pretpostavimo da je $|y'''(x)| \leq M$ za neku pozitivnu konstantu M neovisnu o x. Pokažite da globalna pogreška $e_n = y(x_n) - y_n$ zadovoljava nejednakost

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + \frac{1}{2}h\,L(|e_{n+1}| + |e_n|) + \frac{1}{12}h^3 M.$$

Za konstantni izbor koraka $h > 0$ koji zadovoljava $h\,L < 2$, zaključite da, ako je $y_0 = y(x_0)$, vrijedi

$$|e_n| \leq \frac{h^2 M}{12L}\left[\left(\frac{1 + \frac{1}{2}h\,L}{1 - \frac{1}{2}h\,L}\right)^n - 1\right].$$

Zadatak

Za inicijalni problem

$$y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y(0) = 0, \quad \alpha > 0,$$

egzaktno rješenje je $y(x) = x^{\alpha}$. Kada $\alpha \notin \mathbb{N}$, egzaktno rješenje nije beskonačno puta diferencijabilno. Posebno, da bi y bio dva puta diferencijabilan treba vrijediti $\alpha \geq 2$.
Eulerovom metodom riješite danu jednadžbu uz $\alpha = 2.5,\ 1.5,\ 1.1$ i za izbor koraka $h = 0.2,\ 0.1,\ 0.05$ na intervalu $[0, 1]$. Izračunajte pogrešku u točki $x = 1$ i numerički odredite red konvergencije Eulerove metode na danim inicijalnim problemima (tj. za različite α),

Zadatak

Riješite Lotka-Volterrin grabežljivac-plijen model

$$
\begin{aligned}
y_1'(t) &= 4y_1(t)\left[1-\frac{1}{2}y_2(t)\right], \quad y_1(0)=3,\\
y_2'(t) &= 3y_2(t)\left[\frac{1}{3}y_1(t)-1\right], \quad y_2(0)=5
\end{aligned}
$$

pomoću Eulerove metode za $0 \leq t \leq 5$. Koristite
$h = 0.001, 0.0005, 0.00025$.
Nacrtajte graf funkcija y_1 i y_2 u ovisnosti o t te nacrtajte fazni portret (parametarski graf za $(y_1(t), y_2(t))$).
Komentirajte rezultat.

Zadatak

Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'(x) = \lambda y(x) + \frac{1}{1+x^2} - \lambda \tan^{-1}(x), \quad y(0) = 0.$$

(Egzaktno rješenje je $y(x) = \tan^{-1}(x)$.) Primijenite Eulerovu metodu, implicitnu Eulerovu metodu i trapeznu metodu uz $\lambda = -1, -10, -50$ i $h = 0.5, 0.1, 0.001$. Komentirajte rezultate.
Uočite da u implementaciji implicitnih metoda implicitna jednadžba u ovom problemu može biti riješena egzaktno bez iteracija.

Zadatak

Pokažite da svaka eksplicitna Runge-Kuttina metoda s dva stadija i reda $p = 2$ egzaktno rješava posebnu skalarnu diferencijalnu jednadžbu oblika

$$y'(x) = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad f \in \mathbb{P}_1.$$

($\mathbb{P}_1$ je skup polinoma stupnja 1.)
Što možete reći o implicitnim metodama?

Zadatak

Koristeći Eulerovu metodu, implicitnu Eulerovu metodu i trapeznu metodu riješite jednadžbu

$$y' = \sin y, \quad y(0) = 1$$

da aproksimirate $y(1)$. Izaberite korak $h = 0.2, 0.1, 0.5$. Varirajte broj iteracija za rješavanje nelinearne jednadžbe u svakom koraku implicitne metode. Koliki je broj iteracija potreban?

Zadatak

Odredite funkciju stabilnosti za Taylorove metode.

Zadatak

Odredite RK-1 metodu najvećeg mogućeg reda. Koliki je red i koja je to metoda?.

Zadatak

Kako izgleda Butcherova tablica za modificiranu Eulerovu metodu?. Usporedite modificiranu Eulerovu metodu s metodom iz prošlog zadatka.

Zadatak

Konstruirajte sve metode reda 2 oblika

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & c_2 & & \\ c_3 & & c_3 & \\ \hline & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Takva metoda 'ima svojstvo da odgovarajući Runge-Kuttin proces zahtjeva manje memorijskog prostora u računalu' (Van der Houwen (1977)).

Zadatak

Za dani $\theta \in [0, 1]$, nađite red metode

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(x_n + (1-\theta)h, \theta y_n + (1-\theta)y_{n+1}).$$

Zadatak

Pokažite da je $y(t) = e^{\sin t}$ rješenje inicijalnog problema

$$y'' + y\sin t - y'\cos t = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

Prikažite ovu diferencijalnu jednadžbu drugog reda preko ekvivalentnog sustava diferencijalnih jednadžbi prvog reda.
Proizvoljnom Runge-Kuttinom metodom aproksimirajte rješenje na intervalu $[0, 4]$.
Izračunajte globalnu pogrešku $|y(4) - y_n|$ i $|y'(4) - y_n'|$ u $t = 4$ za korake $h = 1/2,\ 1/4,\ 1/8$ i $1/16$. Koliki je red metode?