Numeričko rješavanje ODJ
Višekoračne metode

Vježbe

Zadatak

Odredite konstante $\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1$ i β_2 tako da poništite što je moguće više članova u Taylorovom razvoju izraza

$$y(x+h) - \alpha_1 y(x) - \alpha_2 y(x-h) - \beta_0 h\, y'(x+h) - \beta_1 h\, y'(x) - \beta_2 h\, y'(x-h).$$

Na diferencijalnoj jednadžbi $y' = y, y(0) = 1$ provjerite je li odgovarajuća višekoračna metoda konvergentna.

Objasnite ponašanje metode.

Zadatak

Na primjeru

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

smo pokazali da metoda

$$y_{i+1} = -4y_i + 5y_{i-1} + 4h\,f(x_i, y_i) + 2h\,f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

ne konvergira na intervalu $[0, 1]$.

Iskoristite istu rekurziju, ali tako da krenete unazad. Za početak iteracija iskoristite $y_n = e$, a y_{n-1} aproksimirajte Eulerovom metodom. Obrazložite ponašanje pogreške u točki $x = 0$.

Ponovite isti postupak ali umjesto aproksimacije za y_{n-1} koristite egzaktnu vrijednost $y_{n-1} = \exp x_{n-1}$. Što se dogodilo s pogreškom?

Možete li na osnovu ovoga konstruirati iteracije unaprijed koje će konvergirati za danu diferencijalnu jednadžbu?

Zadatak

Provjerite stabilnost rekurzije dobivene metodom izvedene iz pravila srednje točke i Simpsonovog pravila ako ih primijenimo na inicijalni problem:

$$y' = 0, \quad y(0) = 0.$$

Zadatak

Zadana je metoda

$$y_{i+1} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i-1}) + \frac{h}{4}\left[4y'_{i+1} - y'_i + 3y'_{i-1}\right], \quad i \geq 1,$$

gdje je $y'_i = f(x_i, y_i)$. Nađite vodeći član u pogrešci odsjecanja.

Zadatak

Pokažite da ako prediktor-korektor formula primijenimo na linearnu diferencijalnu jednadžbu oblika

$$y' = g(x)y + h(x), \quad y(x_0) = y_0$$

tada y_{n+1} može biti eksplicitno određen iz korektora.

Zadatak

Koristeći Adams-Moultonovu prediktor-korektor metodu reda 4 riješite jednadžbu.

$$y' = \sin y, \quad y(0) = 1$$

da aproksimirate $y(1)$. Izaberite korak $h = 0.2$ i primijeniti jednu ili dvije iteracije korektora. Usporedite rezultat s nekom drugom metodom istog reda (Adams-Bashforth i/ili Runge-Kutta).

Zadatak

Pokažite da dvokoračna (implicitna) Adams-Moultonova metoda

$$y_{k+2} - y_{k+1} = h\left[\frac{5}{12}f(x_{k+2}, y_{k+2}) + \frac{8}{12}f(x_{k+1}, y_{k+1}) - \frac{1}{12}f(x_k, y_k)\right]$$

je najmanje reda jedan koristeći uvjet $\rho(1) = 0$ i $\rho'(1) = \sigma(1)$. Zapravo, pokažite da je metoda točno reda tri.

Zadatak

Odredite sve vrijednosti za α i β tako da metoda

$$y_{k+3} + \alpha\,(y_{k+2} - y_{k+1}) - y_k = h\beta\,[f(x_{k+2}, y_{k+2}) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

bude reda 4.

Zadatak

Pokažite da je BDF-3 metoda

$$y_{k+3} - \frac{18}{11}y_{k+2} + \frac{9}{11}y_{k+1} - \frac{2}{11}y_k = hf(x_{k+3}, y_{k+3})$$

konvergentna i da je red konvergencije $p = 3$.

Zadatak

Adams-Bashforthova dvokoračna metoda je dana s

$$y_{k+2} = y_{k+1} + h\left[\frac{3}{2}f(x_{k+1}, y_{k+1}) - \frac{1}{2}f(x_k, y_k)\right].$$

Izvedite metodu preko postupka integracije i odredite egzaktni izraz za lokalnu pogrešku diskretizacije.

Zadatak

Pokažite da je linearna višekoračna metoda reda $p \geq 1$ ako i samo ako je egzaktna na diferencijalnoj jednadžbi čije je rješenje polinom stupnja ne većeg od p.

Zadatak

Koji je red implicitne metode

$$y_{k+2} - y_k = \frac{2}{3} h \left[f(x_{k+2}, y_{k+2}) + f(x_{k+1}, y_{k+1}) + f(x_k, y_k) \right].$$

Je li metoda konvergentna? Je li metoda A-stabilna? (Ovo je malo teže pitanje.)

Zadatak

Izvedite (implicitne) BDF metode reda 2 i 3.

Zadatak

s-koračna metoda za koju je $\sigma(z) = z^{s-1}(z+1)$ i za koju je red jednak s u nekim situacijama može biti bolja od BDF metode.

a. Odredite opći izraz za ρ.
b. Izvedite eksplicitno izraze za metode reda $s = 2$ i $s = 3$.
c. Jesu li ove zadnje dvije metode konvergentne?

Zadatak

Za $\rho(z) = z^3 - z^2 + z/4$ odredite $\sigma(z)$ tako da je

a) $\sigma(z)$ stupnja 2 a metoda je reda 3;
b) $\sigma(z)$ stupnja 3 a metoda je reda 4;

Zadatak

Za $\rho(z) = z^4 - 1$ odredite $\sigma(z)$ tako da je red metode maksimalan.

Zadatak

Za $\sigma(z) = z^2$ odredite $\rho(z)$ tako da je

a) $\rho(z)$ stupnja 2 a metoda je reda 2;
b) $\rho(z)$ stupnja 3 a metoda je reda 3;
c) Odredite područje apsolutne stabilnosti za metodu danu pod (a).

Zadatak

Odredite koeficijente sljedeće metode tako da red metode bude maksimalan

$$
\begin{aligned}
y_{n+\frac{1}{2}} &= \alpha_1 y_n + \alpha_2 y_{n-1} + \beta_1 h f_n + \beta_2 h f_{n-1}, \\
& \quad (y_{n+\frac{1}{2}} \text{ je aproksimacija za } y(x_n + h/2)) \\
f_{n+\frac{1}{2}} &= f(x_n + h/2, y_{n+\frac{1}{2}}), \\
y_{n+1} &= \alpha_1^* y_n + \alpha_2^* y_{n-1} + \gamma h f_{n+\frac{1}{2}} \beta_1^* h f_n + \beta_2^* h f_{n-1}, \\
f_{n+1} &= f(x_{n+1}, y_{n+1})
\end{aligned}
$$

Koji je red metode? Je li metoda stabilna?

Zadatak

Promatrajmo metodu za rješavanje inicijalnog problema $y' = f(x, y)$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[y'_n + y'_{n+1}\right] + \frac{h^2}{12}\left[y''_n - y''_{n+1}\right]$$

gdje je

$$\begin{aligned} y'_n &= f(x_n, y_n), \\ y''_n &= \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} + f(x_n, y_n)\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y}. \end{aligned}$$

(a) Pokažite da je red metode jednak 4.
(b) Pokažite da je metoda konvergentna.
(c) Pokažite da je metoda apsolutno stabilna.

Zadatak

Neka koeficijenti polinoma $\rho(z) = z^{p+1} - \sum_{j=0}^{p} \alpha_j z^j$ zadovoljavaju

$$\alpha_j \geq 0, \quad 0 \leq j \leq p, \quad \text{i} \quad \sum_{j=0}^{p} \alpha_j = 1.$$

Pokažite da nultočke polinoma ρ zadovoljavaju uvjet stabilnosti.

Zadatak

Riješite diferencijske jednadžbe:

(a) $y_{n+1} - y_n = 2^n, \quad y_0 = 0$

(b) $y_{n+2} - 2y_{n+1} - 3y_n = 1, \quad y_0 = y_1 = 0$

(c) $y_{n+1} - y_n = n, \quad y_0 = 0$

(d) $y_{n+1} - 2y_n = n\,2^n, \quad y_0 = 0$