

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

1. kolokvij – 26. studenog 2025.

- Broj zadataka: 5;
- Vrijeme rješavanja: 120 min;
- Ukupan broj bodova: 50;
- Na ispitu je dozvoljen isključivo pribor za pisanje.

Zadatak 1. (10 bodova) Neka je dan niz nezavisnih slučajnih varijabli $(X_n)_n$ takav da $X_1 = 0$ i

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{4n \log n}, \quad \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{4n \log n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2n \log n}, \quad n \geq 2.$$

Konvergira li niz $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)_n$ po vjerojatnosti? A gotovo sigurno?

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

1. kolokvij – 26. studenog 2025.

Zadatak 2. (10 bodova)

- (a) (3 boda) Neka je $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija takva da je $|X|$ slučajna varijabla. Je li tada i X nužno slučajna varijabla?
- (b) (3 boda) Dokažite da funkcija distribucije diskretne slučajne varijable X s vrijednostima u $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ u pripadnim vjerojatnostima $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, ima prekid u svakoj točki $x_n \in D$, a da je neprekidna u svakoj točki $x \in D^c$.
- (c) (4 boda) Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable takve da $X \sim B(2, \frac{1}{2})$, a $Y \sim \text{EXP}(2)$. Odredite funkciju distribucije slučajne varijable $X + Y$.

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

1. kolokvij – 26. studenog 2025.

Zadatak 3. (10 bodova) Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) (5 bodova) Dokažite: $\mathbb{E}|X| = 0 \implies X = 0$ g.s.

(b) (5 bodova) Dokažite da za sve $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\mathbb{E}[|X| \wedge 1] \leq \varepsilon + \mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon).$$

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

1. kolokvij – 26. studenog 2025.

Zadatak 4. (10 bodova)

- (a) (4 boda) Definirajte konvergenciju gotovo sigurno, po vjerojatnosti, po distribuciji, i u L^p za $p \geq 1$. Koji su opći međudnosi između tih tipova konvergencije?
- (b) (6 bodova) Dokažite da niz slučajnih varijabli $(X_n)_n$ konvergira gotovo sigurno k X na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| \geq \varepsilon\} \right) = 0.$$

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

1. kolokvij – 26. studenog 2025.

Zadatak 5. (10 bodova)

- (a) (7 bodova) Iskažite i dokažite Kolmogorovljev zakon 0-1.
- (b) (3 boda) Iskažite Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva.