

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

2. kolokvij – 4. veljače 2026.

- Broj zadataka: 5;
- Vrijeme rješavanja: 120 min;
- Ukupan broj bodova: 50;
- Na ispitu je dozvoljen isključivo pribor za pisanje.

Zadatak 1. (10 bodova)

- (a) (5 bodova) Neka su X i Y nezavisne i simetrične slučajne varijable takve da su $X - Y$ i $X + Y$ nezavisne. Dokažite da je tada $X \stackrel{D}{=} Y$.
- (b) (5 bodova) Neka su X i Y nezavisne i jednakodistribuirane. Dokažite da $X - Y$ nije uniformno distribuirana.

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

2. kolokvij – 4. veljače 2026.

Zadatak 2. (10 bodova)

- (a) (4 boda) Neka je X slučajna varijabla i φ njena pripadna karakteristična funkcija. Koja je veza između momenata slučajne varijable i derivacija karakteristične funkcije?
- (b) (6 bodova) Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takve da je $X + Y \stackrel{D}{=} X$. Dokažite da je $Y = 0$ $\mathbb{P}$ -g.s.

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

2. kolokvij – 4. veljače 2026.

Zadatak 3. (10 bodova) Neka je $(\mathbb{P}_n)_n$ niz vjerojatnosnih mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ te $(\varphi_n)_n$ niz pripadnih karakterističnih funkcija. Pretpostavite da $\lim_n \varphi_n(t) = \varphi(t)$, za sve $t \in \mathbb{R}$, pri čemu je $\varphi(t)$ neprekidna u nuli. Precizno dokažite da je tada niz mjera $(\mathbb{P}_n)_n$ napet.

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

2. kolokvij – 4. veljače 2026.

Zadatak 4. (10 bodova)

- (a) (6 boda) Iskažite Lévyjev, Ljapunovljev i Lindebergov centralni granični teorem.
- (b) (4 boda) Pokažite da je Lindebergov teorem povlači Lévyjev i Ljapunovljev.

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

2. kolokvij – 4. veljače 2026.

Zadatak 5. (10 bodova) Neka je $(X_n)_n$ niz **nezavisnih** slučajnih varijabli, te $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) (5 bodova) Pretpostavimo (uz nezavisnost) i da

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{n} & 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Konvergira li niz $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}$, $n \in \mathbb{N}$, po distribuciji?

(b) (5 bodova) Neka je $(X_n)_n$ njd. takav da $X_n \geq 0$, $\mathbb{E}X_n = 1$ i $\text{Var}(X_n) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Pokažite da $2(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}) \rightarrow N(0, \sigma^2)$, $n \rightarrow \infty$, po distribuciji.