

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

Ispit (1. rok) – 4. veljače 2026.

- Broj zadataka: 5;
- Vrijeme rješavanja: 120 min;
- Ukupan broj bodova: 75;
- Na ispitu je dozvoljen isključivo pribor za pisanje.

Zadatak 1. (15 bodova)

(a) (5 bodova) Iskažite Fellerov slabi zakon velikih brojeva.

(b) (5 bodova) Iskažite Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva.

(c) (5 bodova) Neka je dan niz nezavisnih slučajnih varijabli $(X_n)_n$ takav da $X_1 = 0$ i

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{4n \log n}, \quad \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{4n \log n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2n \log n}, \quad n \geq 2.$$

Vrijedi li niz $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)_n$ slabi zakon velikih brojeva? A jaki?

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

Ispit (1. rok) – 4. veljače 2026.

Zadatak 2. (15 bodova)

- (a) (7 bodova) Neka je X slučajna varijabla i φ njena pripadna karakteristična funkcija. Koja je veza između momenata slučajne varijable i derivacija karakteristične funkcije?
- (b) (8 bodova) Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takve da je $X + Y \stackrel{D}{=} X$. Dokažite da je $Y = 0$ $\mathbb{P}$ -g.s.

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

Ispit (1. rok) – 4. veljače 2026.

Zadatak 3. (15 bodova)

- (a) Definirajte pojam *slučajna varijabla* X .
- (b) Definirajte što je to *funkcija distribucije slučajne varijable* X .
- (c) Definirajte pojam *očekivanje slučajne varijable* X .

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

Ispit (1. rok) – 4. veljače 2026.

Zadatak 4. (15 bodova)

- (a) (10 bodova) Iskažite Lévyjev, Ljapunovljev i Lindebergov centralni granični teorem.
- (b) (5 bodova) Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli te da

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{n} & 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Konvergira li niz $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}$, $n \in \mathbb{N}$, po distribuciji?

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

Ispit (1. rok) – 4. veljače 2026.

Zadatak 5. (15 bodova)

- (a) (5 bodova) Definirajte pojam slabe konvergencije konačnih mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
- (b) (5 bodova) Iskažite Prohorovljev teorem.
- (c) (5 bodova) Iskažite teorem neprekidnosti.