

Povijest matematike

riješeni pismeni ispit od 4. 7. 2025. ©FMB

1. (10) U svakom od sljedećih 10 pitanja 0–4 ponuđena odgovora su točna. Označite točne odgovore. Na pojedinom zadatku ostvarujete 1 bod samo ako ste označili sve točne odgovore i nijedan krivi. Ako je samo jedna (ne)oznaka kriva, ostvarujete $\frac{1}{2}$ boda, ako su točno dvije (ne)oznake krive, ostvarujete 0 bodova, a inače ostvarujete $-\frac{1}{4}$ boda.

- Koje od navedenih disciplina su nastale (u smislu: dokazani/izvedeni su prvi rezultati iz tih disciplina) prije nego je Euklid napisao *Elemente*?
☒ teorija brojeva ☒ geometrija ☐ algebra ☐ trigonometrija
- Egipatski zadaci tipa psw (pefsu) iz moderne perspektive su ...
☒ linearne jednadžbe s 1 nepoznanicom ☐ sustavi linearnih jednadžbi
☒ zadaci s omjerima ☐ diofantske jednadžbe
- Koji od sljedećih parova veličina su sumjerljivi?
☐ stranica i dijagonala pravilnog peterokuta ☐ dijagonala kvadrata i dijagonala kocke
☐ x i $\text{NapLog } x$ ☐ e i π
- U *Devet poglavlja umijeća računanja* nalazimo, među inim, ...
☒ Pitagorin poučak. ☐ Hornerov algoritam.
☒ Gaußovu metodu eliminacija. ☐ magične kvadrate.
- Koji od ovih matematičara su znali računati u dekadskom pozicijskom sustavu?
☐ Diofant ☐ Alkuin iz Yorka ☒ Gerbert iz Aurillaca ☒ Fibonacci
- Koliko je tipova tzv. reducirane kubne jednadžbe razmatrano u Italiji u 16. stoljeću?
☐ 19 ☐ 14 ☐ 6 ☒ 3
- Bürgijev logaritam je ...
☐ logaritam s bazom $1/e$. ☐ prirodni logaritam.
☐ dekadski logaritam. ☐ prirodni logaritam pomnožen s konstantom.
- Koji od sljedećih tekstova su Leibnizovi?
☐ *Arithmetica infinitorum* ☐ *De Methodis Serierum et Fluxionum*
☐ *Analysis de Functiones* ☐ *Algebra situs*
- Problem kockareve propasti rješavao je (rješavali su) ...
☒ Jacob Bernoulli ☒ de Moivre ☒ Huygens ☒ B. Pascal
- Mogućnost geometrije u kojoj vrijedi negacija Euklidovog postulata o paralelama prvi je dokazao (su dokazali) ...
☐ Gauß ☐ J. Bolyai ☐ Lobačevski ☒ Beltrami

2. (10) U sljedećim pitanjima točno jedan od dva ponuđena odgovora je ispravan. Svaka oznaka točnog odgovora nosi +1 bod, svaka kriva oznaka −1 bod, a ako za neko pitanje ne označite nijedan odgovor na tom pitanju ostvarujete 0 bodova.

- Koji od ova dva rovaša je stariji?
☒ Kost iz Lebomba. ☐ Kost iz Ishanga.
- Koji broj predstavlja znamenka 𐤠 akrofonskog (atičkog) brojevnog sustava?
☒ pet stotina ☐ pet tisuća
- „Ako jednakom dodamo jednako, dobit ćemo jednako.“ je jedan od Euklidovih ...
☐ postulata. ☒ aksioma.
- Koje od ova dva računska pomagala je starije?
☐ kineski abakus (suanpan) ☐ Gerbertov abakus
- Rukopis naziva *Dixit Algorizmi* je srednjevjekovni prijevod Al-Hvarizmijevog teksta o ...
☒ računanju u dekadskom pozicijskom sustavu. ☐ jednačbama i njihovom rješavanju.
- Tko je uveo naziv *quadrivium*?
☒ Anicius Manlius Severinus Boethius ☐ Alkuin iz Yorka
- Tko je uveo izraz milijun?
☐ Nicolas d'Oresme ☒ Nicolas Chuquet
- Tko je napisao *Ars Conjectandi*?
☐ Johann Bernoulli ☒ Jacob Bernoulli
- Koji od sljedeća dva matematičara je bio suradnik Diderotove *Enciklopedije*?
☐ Jean Baptiste Joseph Fourier ☒ Jean le Rond d'Alembert
- Kako se označava kardinalni broj skupa $\mathbb{N}$?
☒ $\aleph_0$ ☐ χ_0

3. (5) Spojite matematičare iz prvog stupca sa stoljećima u kojima su umrli. Svaka točna spojnica nosi 1 bod, svaka kriva −1, a svaka nedostajuća 0 bodova.

Al-Hvarizmi je umro u 9. stoljeću.
 Al-Kaši je umro u 15. stoljeću.
 Bhaskara II. je umro u 12. stoljeću.
 Brahmagupta je umro u 7. stoljeću.
 Jordanus Nemorarius je umro u 13. stoljeću.

4. (20) Nadopunite sljedeće rečenice (ako se traži ime europskog matematičara nakon antike, za puna 2 boda trebate navesti bar inicijal prvog imena i pravilno napisati prezime; za matematičare iz jezičnih područja koja ne koriste latinicu priznaju se hrvatske i engleske transkripcije imena):

- U klasičnom babilonskom brojevnom sustavu, broj kojeg danas zapisujemo kao 315,5 bio bi zapisan kao $\overline{VVVVV} < \overline{VVVVV} < < <$.
- Nazivi elipsa, parabola i hiperbola potječu od Apolonija iz Perge.
- Jedini „praktičar“ („primjenjenac“) među antičkim grčkim matematičarima bio je Heron iz Aleksandrije.
- Naziv *Sulv(b)asutre* znači Pravila konopa.
- Jedini poznati arapski matematičar koji spominje negativne brojeve je Abu al-Vapa Buzdžani.
- Thomas Harriot je u matematiku uveo simbole $< i >$.
- Albert Girard poznat je po prvom iskazu osnovnog teorema algebre.
- Johann Bernoulli je u jednom pismu Leibnizu prvi u povijesti koristio izraz funkcija.
- Daniel Bernoulli je živio u 18. stoljeću.
- Modernu definiciju limesa prvi je dao Karl Weierstraß.

5. (10) Na dva različita povijesna načina (navedite razdoblje i autora odnosno zemlju za obje odabrane metode) izračunajte najveće cijelo od $\sqrt{1010101}$.

U svakom slučaju treba nam početna aproksimacija: $1000^2 < 1010101 < 1010^2 \Rightarrow 1000 < \sqrt{1010101} < 1010$.

Babilonska (Heronova) metoda.

i	a_i	$a_{i+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left(a_i + \frac{n}{a_i} \right) \approx \sqrt{n}$
1	1000	1005,0505
2	1005,0505	1005,0378103141

Cjelobrojni dio se počeo ponavljati, dakle je $\lfloor \sqrt{1010101} \rfloor = 1005$. Starokineska metoda

Prvo se procijeni broj znamenaka, u ovom slučaju četiri:

$$\lfloor \sqrt{1010101} \rfloor = (abcd) = 1000a + 100b + 10c + d \Rightarrow$$

$$1010101 = (1000a + 100b + 10c + d + x)^2 = 1000000a^2 + \dots$$

(s x je označen decimalni dio od $\sqrt{1010101}$). Uvrstimo li $a = 2$ desno bi bio broj veći od 4000000, dakle $a = 1$.

$$1010101 = (1000 + 100b + 10c + d + x)^2 = 1000000 + \dots \Rightarrow$$

$$10101 = 2000(100b + 10c + d + x) + (100b + 10c + d + x)^2 = 10000b^2 + 200000b + \dots$$

Za $b = 1$ desno je broj veći nego lijevo, dakle je $b = 0$.

$$10101 = 2000(10c + d + x) + (10c + d + x)^2 = 100c^2 + 20000c + \dots$$

Za $c = 1$ desno je broj veći nego lijevo, dakle je $i = c = 0$.

$$10101 = 2000(d + x) + (d + x)^2 = d^2 + 2000d + \dots$$

Za $d = 1, \dots, 5$ desno je broj manji nego lijevo, a za $d = 6$ veći nego lijevo, dakle je $d = 5$ i dobili smo traženi rezultat 1005.

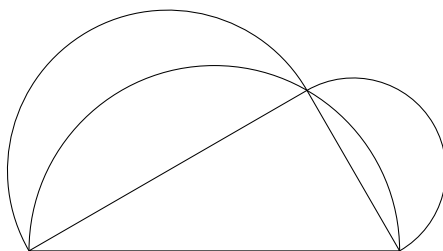
Staroindijska metoda $N = 1010101 = x_i^2 + b$, $x_0 = 1000$,

$$x_{i+1} = x_i + \frac{b_i}{2x_i} - \frac{\left(\frac{b_i}{2x_i}\right)^2}{2\left(x_i + \frac{b_i}{2x_i}\right)}.$$

- $x_0 = 1000$, $b_0 = 1010101 - 1000000 = 10101$
- $x_1 = 1005,0378103141$, $b_1 = -0,0001610281$
- $x_2 = 1005,0378102340$: cjelobrojni dio se ponovio, dakle smo dobili rezultat 1005.

6. (10) Opišite i dokažite Alhazenovu generalizaciju prvog tipa Hipokratovih mjeseca.

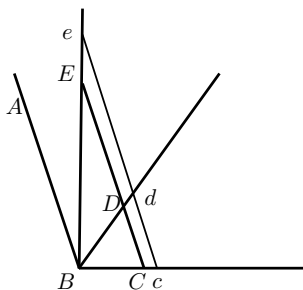
Ako bilo kojem pravokutnom trokutu opišemo kružnicu te nacrtamo kružnice kojima su promjeri katete tog trokuta, onda je zbroj površina tako nastalih dvaju mjeseca jednak površini polaznog pravokutnog trokuta:



Ako su duljine kateta označene s a i b , a duljina hipotenuze c , mjeseci nad katetama imaju zbroj površina kao zbroj površina polukrugova nad katetama $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2) = \frac{\pi}{8}c^2$ plus površina trokuta minus površina polukruga nad hipotenuzom $\frac{1}{2} \left(\frac{c}{2}\right)^2 \pi$, tj. ostane točno površina trokuta.

7. (10) Opišite Boškovićev paradoks i objasnite u čemu je bio u krivu.

Promotrimo kut CBA sa simetralom BD . Ako jedan od tako dobivenih dijelova ravnine ima beskonačnu površinu, isto vrijedi i za drugi.



Kroz C na jednom kraku povucimo paralelu s drugim krakom i neka ona simetralu siječe u D . Na CD nađemo E koja je od D dvaput više udaljena nego C od D . Povlačimo paralele cde s CDE i tako dijelimo kut CBE na pruge. Zbog odabira E je $\triangle dBe$ dvaput veće površine nego $\triangle cBd$. Stoga je četverokut $dDEe$ dvaput veće površine nego $cCDd$. To vrijedi za sve cde , dakle dio ravnine unutar kuta CBD ima upola manju površinu nego unutar DBE , koji je manji od onog unutar DBA koji je jednak CBD ?! Greška je u tom što za beskonačne skupove vrijedi da im je kardinalnost jednaka dvostrukoj kardinalnosti, odnosno ako je a beskonačan, onda je $2a = a$.

8. (25) Na vlastitom papiru napišite kratki sastavak (1–2 stranice) na temu: „Povijest broja π “.
Glavne natuknice:

- površina i opseg kruga u Egiptu, Mezopotamiji, Kini, Indij
- Hipokratov teorem o proporcionalnosti površina krugova različitih radijusa — dokaz u EEXII
- Arhimedov teorem o krugu i Arhimedova procjena omjera opsega i promjera kruga
- uvođenje simbola
- uloga redova u računanju broja π
- iracionalnost i transcendentnost broja π (tko je postavio hipotezu odnosno dokazao)