Povijest matematike

riješen pismeni ispit (19. lipnja 2026.)

F. M. Brückler

1. (5) U svakom od sljedećih pet pitanja 0 − 4 ponuđena odgovora su točna. Označite sve točne odgovore. Na pojedinom pitanju ostvarujete 1 bod samo ako ste označili sve točne odgovore i nijedan krivi. Ako je samo jedna (ne)oznaka kriva, ostvarujete $\frac{1}{2}$ boda, ako su točno dvije (ne)oznake krive, ostvarujete 0 bodova, a inače ostvarujete $-\frac{1}{4}$ boda na pojedinom pitanju.

   (a) Koji od sljedećih starogrčkih matematičara su živjeli i umrli prije 400. g. pr. Kr.?

   ☑ Anaksagora iz Klazomena ☑ Hipokrat s Hiosa

   ☑ Pitagora sa Samosa ☐ Teetet Atenski

   (b) Koji od sljedećih modernih brojeva se mogu opisati i istraživati koristeći Eudoksovu teoriju omjera i razmjera?

   ☐ e ☑ $\sqrt{2}$ ☑ $\sqrt[5]{\frac{7}{8}}$ ☐ π

   (c) Al-Karadži je poznat po ...

   ☐ klasifikaciji jednadžbi ☐ dokazu teorema o prijateljskim brojevima

   ☐ poopćenju prvog Hipokratovog mjeseca ☑ ranom obliku matematičke indukcije

   (d) Među važnim prethodnicima otkrića diferencijalnog računa, tj. deriviranja, je/su ...

   ☑ I. Barrow ☐ L. Euler ☑ P. de Fermat ☐ L. Pacioli

   (e) Poznate beskonačne izraze (beskonačne sume odnosno beskonačne produkte) za π i s π povezane brojeve dobio je (dobili su) ...

   ☐ Arhimed iz Sirakuze ☑ L. Euler ☑ Madhava ☑ J. Wallis

2. (5) Spojite teoreme iz prvog stupca s odgovarajućim mjestom u povijesnom redoslijedu njihovih dokaza. Svaka točna spojnica nosi 1 bod, svaka kriva −1, a svaka nedostajuća 0 bodova.

   Binomni teorem (za prirodne eksponente) je dokazan drugi po redu.

   Mertonski teorem je dokazan prvi po redu.

   Osnovni teorem aritmetike je dokazan treći po redu.

   Teorem o četiri boje je dokazan peti po redu.

   Teorem o neprebrojivosti skupa $\mathbb{R}$ je dokazan četvrti po redu.

3. (5) U sljedećim pitanjima označite točan odgovor. U svakom pitanju jedan od dva ponuđena odgovora je ispravan. Točno označen odgovor nosi $+1$ bod, krivo odabran -1 bod, a ako za neko pitanje ne označite nijedan odgovor na tom pitanju ostvarujete 0 bodova.

   (a) Broj kojeg danas zapisujemo kao 3610 u starobabilonskom carstvu bio bi zapisan kao:
   ☐ 𒌋𒌋𒌋 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 𒌋 ☑ 𒁹 𒌋

   (b) Euklidovu konstrukciju pravilnog petnaesterokuta nalazimo u kojoj knjizi *Elemenata*?
   ☑ IV. ☐ VI.

   (c) Jednadžba koju bi al-Hvarizmi opisao kao ,,pet mala i šest dirhama čini šaj“ danas se zapisuje kao:
   ☐ $5x + 6 = x^2$ ☑ $5x^2 + 6 = x$

   (d) R. Descartex i P. de Fermat bili su ...
   ☐ prijatelji. ☑ suparnici.

   (e) Naziv topologija prvi je koristio ...
   ☑ B. Listing ☐ J. H. Poincaré

4. (20) Nadopunite sljedeće rečenice. Svaka točno nadopunjena rečenica nosi 2 boda. Ako se traži ime europskog matematičara nakon antike, za puna 2 boda trebate navesti bar inicijal prvog imena i pravilno napisati prezime; za matematičare iz jezičnih područja koja ne koriste latinicu priznaju se hrvatske i engleske transkripcije imena.

   (a) Jedan egipatski zapis razlomka $\frac{7}{15}$ je $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$.

   (b) Ako koristeći moderne simbole, ali izvorni stil, zapišemo iznos tetive kuta[1] od 120° prema Ptolemeju Aleksandrijskom, ta tetiva iznosi 103^{p} 55 23.

   (c) Metoda korjenovanja opisana u *rukopisu Bakhshali* je u svojoj suštini korigirana Heronova metoda.

   (d) Prema Tābitovom teoremu, ako su brojevi $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prosti, onda su brojevi $2^n p\, q$ i $2^n\, r$ prijateljski.

   (e) Tijekom srednjeg vijeka su se ljudi koji su zagovarali korištenje dekadskog pozicijskog brojevnog sustava s nulom u računanju nazivali *algoristi*.

   (f) U knjizi Johannesa Widmanna prvi put se u tisku pojavljuju simboli $+$ i $-$.

   (g) Primjer jednadžbe za koju se Descartesovim pravilom predznaka može zaključiti da ima ili 0 ili 2 pozitivna i točno jedno negativno rješenje je $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

   (h) Prvi matematičar koji je istakao da je za dobro utemeljenje infinitezimalnog računa ključno definirati limes bio je *Jean Le Rond D'Alembert* u 18. stoljeću.

   (i) Riemannova ζ-funkcije je proširenje *Eulerovog* produkta na *kompleksne brojeve*.

   (j) Prebrojiv skup je skup takav da *postoji bijekcija s njega na* $\mathbb{N}$.

[1] Podrazumijevamo da je kut višekratnik od 10°.

5. (10) Na sljedeća pitanja odgovorite s maksimalno tri riječi, simbola ili brojke. Svaki točan odgovor nosi 2 boda. Ako se traži ime europskog matematičara nakon antike, za puna 2 boda trebate navesti bar inicijal prvog imena i pravilno napisati prezime; za matematičare iz jezičnih područja koja ne koriste latinicu priznaju se hrvatske i engleske transkripcije imena.

   (a) Koliko pravilnih popločenja ravnine postoji? .... Tri.

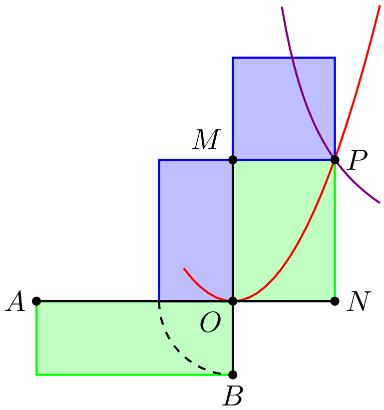
   (b) Tko poznat po izračunu udaljenosti Bagdada do Meke u 10. st.? *Abū al-Wafā Būzdžānī*

   (c) Kako se nazivaju (označavaju) dva najgušća slaganja sukladnih kugli? .... *ccp, hcp*

   (d) U kom omjeru treba rasporediti dobitak ako je u kontekstu problema bodova igra prekinuta pri stanju 8 : 6, a igra se dok netko ne ostvari 10 pobjeda? 13:3

   (e) Koji od Sedam milenijskih problema je jedini dosad riješen? .... *Poincaréova hipoteza*

6. (10) Opišite Menehmovu konstrukciju srednjih geometrijskih proporcionala između duljina a i b pomoću presjeka hiperbole i parabole.



Neka je $a > b$ *i neka je* $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, $a = |OA|$, $b = |OB|$. *Pretpostavimo da znamo* x *i* y *takve da je* $a : x = x : y = y : b$. *Nanesimo* $x = |OM|$ *i* $y = |ON|$ *kao* $\overline{OM}$ *na pravcu* OB *i kao* $\overline{ON}$ *na pravcu* OA. *Nadopunimo* MON *do pravokutnika* $ONPM$ *(površine* xy*). Iz* $|OM| : |ON| = |ON| : |OB|$ *slijedi da je pravokutnik sa stranicama duljina* $|OM|$ *i* $|OB|$ *jednak kvadratu nad* $\overline{ON}$, *koji je jednak kvadratu nad* $\overline{PM}$. *Menehmo dalje gleda parabolu kojoj je* O *tjeme, os joj je* MB, *a* $a = |OA|$ *je duljina tetive parabole okomite na os koja prolazi fokusom (dakle, parabolu* $x^2 = a\,y$*). Točka* P *je onda prema gornjem na njoj. No,* P *je i na (istostranoj) hiperboli sa središtem u* O *i asimptotama* OM *i* ON *(moderno, hiperboli* $x\,y = a\,b$*). Dakle, srednje geometrijske proporcionale između* A *i* B *možemo dobiti iz točke presjeka parabole i hiperbole.*

7. (10) Ferrarijevom metodom riješite jednadžbu

$$x^4 - 16x^2 + 8x + 32 = 0.$$

U jednadžbi nema kubnog člana pa nije potrebna početna supstitucija, nego idemo direktno na postupak:

$$x^4 - 16x^2 = -8x - 32$$

$$x^4 - 16x^2 + 64 = -8x - 32 + 64$$

$$(x^2 - 8)^2 = -8x + 32$$

$$(x^2 - 8)^2 + 2t(x^2 - 8) + t^2 = -8x + 32 + 2t(x^2 - 8) + t^2$$

$$(x^2 - 8 + t)^2 = 2tx^2 - 8x + (32 - 16t + t^2)$$

Diskriminanta desne strane je $D = 64 - 4 \cdot 2t \cdot (32 - 16t + t^2) = -8(t^3 - 16t^2 + 32t - 8)$. *Pogađamo jedan* t *takav da* D *bude 0, recimo uvrštavanjem redom djelitelja od* -8. *Tako dobijemo da je* $t = 2$ *i uvrstimo ga u zadnju jednakost.*

$$(x^2 - 8 + 2)^2 = 4x^2 - 8x + (32 - 32 + 4)$$

$$(x^2 - 6)^2 = 4(x - 1)^2$$

$$x^2 - 6 = \pm 2(x - 1)$$

Dakle, rješenja polazne jednadžbe su rješenja kvadratnih jednadžbi $x^2 - 6 = 2x - 2$ i $x^2 - 6 = 2 - 2x$, tj. $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$ i $x_3 = -4$, $x_4 = 2$.

8. (10) Dajte primjer teorema koji se dokazuje tzv. dijagonalnim argumentom i dokažite taj teorem.

   Opcije su osnovni Cantorov teorem teorije skupova ili dokaz neprebrojivosti skupa $\mathbb{R}$. *Ovdje navodimo drugi, a za prvi upućujemo na skriptu-*

   Iskaz teorema: $\mathbb{R}$ *je neprebrojiv skup, tj. sadrži više elemenata od skupa* $\mathbb{N}$.

   Pripremni dio: $\langle 0, 1\rangle \subseteq \mathbb{R}$ *pa je dovoljno dokazati da je* $\langle 0, 1\rangle$ *neprebrojiv.*

   Pretpostavimo suprotno: $\langle 0, 1\rangle$ *je prebrojiv, tj. može se poredati u niz* $(x_n)_{n\mathbb{N}}$. *Svaki broj iz* $\langle 0, 1\rangle$ *se može jednoznačno zapisati kao decimalni broj s beskonačno mnogo znamenaka različitih od nule.*

   Neka je dakle $(x_n)_n$ *niz koji sadrži sve brojeve iz* $\langle 0, 1\rangle$. *Definiramo broj* $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ *tako da je* i*-ta znamenka* a_i *od* x *jednaka 9 uvijek osim ako je* i*-ta znamenka od* x_i *jednaka 9, u tom slučaju stavljamo* $a_i = 8$. *Tako konstruirani broj* x *je očito u* $\langle 0, 1\rangle$, *a od svakog* x_i *se razlikuje bar na* i*-toj znamenki. Zbog odabrane jedinstvenosti zapisa slijedi da* x *nije u nizu* $(x_n)_n$, *što je kontradikcija s pretpostavkom da su u tom nizu nabrojani svi elementi iz* $\langle 0, 1\rangle$.

9. (25) Napišite kratki sastavak ($1-2$ stranice) na jednu od sljedeće dvije teme:

   (a) „Određivanje tangenti na ravninske krivulje od davnina do modernog doba“.

   (b) „Kako bi se razvoj matematike u Europi razlikovao da su Europljani u kontakt s arapskim nasljeđem došli tek u 17. stoljeću?”