

Povijest matematike

riješen pismeni ispit (3. srpnja 2026.)

F. M. Brückler

1. (5) U svakom od sljedećih pet pitanja 0–4 ponuđena odgovora su točna. Označite sve točne odgovore. Na pojedinom pitanju ostvarujete 1 bod samo ako ste označili sve točne odgovore i nijedan krivi. Ako je samo jedna (ne)oznaka kriva, ostvarujete $\frac{1}{2}$ boda, ako su točno dvije (ne)oznake krive, ostvarujete 0 bodova, a inače ostvarujete $-\frac{1}{4}$ boda na pojedinom pitanju.

(a) Koje od sljedećih povijesnih brojki predstavljaju isti broj kao moderna brojka 321?

୨୨୨୩୩୩

卐 卐 卐

HHH Δ Δ I

$\tau\kappa\alpha'$

(b) Koje od sljedećih rezultata su s visokom sigurnošću znali dokazati pitagorejci?

Zbroj kutova u trokutu je 180° .

Postoji 5 pravilnih poliedara.

$\sqrt{2}$ je iracionalan broj.

Opseg kruga je proporcionalan promjeru.

(c) Koji renesansni matematičari su bili optuživani da su nekromanti?

G. Cardano

J. Napier

M. Stifel

F. Viète

(d) Koji od sljedećih skupova su prebrojivi?

\mathbb{C}

\mathbb{N}_0

\mathbb{Q}^+

skup \mathbb{P} svih prostih brojeva

(e) Što od sljedećeg je dokazano iza 1950. godine?

Gödelov teorem nepotpunosti

Keplerova hipoteza

Riemannova hipoteza

veliki Fermatov teorem

2. (5) Spojite naslove znamenitih djela iz vjerojatnosti iz prvog stupca s matematičarem iz desnog stupca koji je autor pojedinog djela. Svaka točna spojnica nosi 1 bod, svaka kriva -1 , a svaka nedostajuća 0 bodova.

Ars conjectandi: Jacob Bernoulli

De ratiociniis in ludo aleae: Christiaan Huygens

Doctrine of chances: Abraham de Moivre

Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et matière civile: Siméon-Denis Poisson

Théorie analytique des probabilités: Pierre-Simon Laplace

3. (5) U sljedećim pitanjima označite točan odgovor. U svakom pitanju jedan od dva ponuđena odgovora je ispravan. Točno označen odgovor nosi $+1$ bod, krivo odabran -1 bod, a ako za neko pitanje ne označite nijedan odgovor na tom pitanju ostvarujete 0 bodova.

(a) Koja je po redu prva propozicija u *Elementima* čiji dokaz ovisi o postulatu o paralelama?

19

29

- (b) Koji od sljedeća dva matematičara je rođen ranije?
 Arhimed iz Sirakuze Liu Hui
- (c) Prva definicija broja nula potječe ...
 od Brahmagupte iz rukopisa Bakhshali
- (d) S kojim matematičarem se C. F. Gauß sukobio oko prvenstva u nekim matematičkim rezultatima?
 J.-L. Lagrange A.-M. Legendre
- (e) Tko je uveo simbol ∞ ?
 I. Barrow J. Wallis

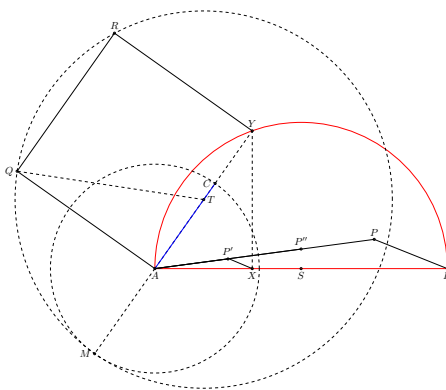
4. (20) Nadopunite sljedeće rečenice. Svaka točno nadopunjena rečenica nosi 2 boda. Ako se traži ime europskog matematičara nakon antike, za puna 2 boda trebate navesti bar inicijal prvog imena i pravilno napisati prezime; za matematičare iz jezičnih područja koja ne koriste latinicu priznaju se hrvatske i engleske transkripcije imena.

- (a) Ako koristeći metodu iz rukopisa Bakhshali krenemo računati $\sqrt{3}$ od početne aproksimacije 1, u prvom koraku dobit ćemo aproksimaciju 1,7.
- (b) Autor prvog po redu objavljenog djela o teoriji vjerojatnosti je Christiaan Huygens u 17. stoljeću.
- (c) A. M. S. Boethius je poznat po tome što je uveo zajednički naziv quadrivium za matematičke grane kojima su se ranije bavili pitagorejci.
- (d) R. Descartes je osnovne principe analitičke geometrije opisao kroz analizu Papusovog problema.
- (e) O. Hajjam je kubne jednadžbe klasificirao na ukupno 19 tipova, od čega je njih 13 rješavao presjecima konika.
- (f) Hipoteza kontinuuma se može zapisati formulom $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.
- (g) Introductio in analysin infinitorum je jedno od najvažnijih djela matematičara Leonharda Eulera, objavljeno sredinom 18. stoljeća.
- (h) Kod I. Newtona koeficijent smjera na tangentu je $\frac{y}{x}$, a kod G. W. Leibniza $\frac{dy}{dx}$ (koristiti formule i notaciju u njihovim stilovima).
- (i) Osnovni teorem algebre prvi su dokazali Carl Friedrich Gauß i Jean-Robert Argand.
- (j) Starokineska metoda fang cheng je rani oblik današnje Gaußove metode eliminacija.

5. (10) Na sljedeća pitanja odgovorite s maksimalno dvije riječi, simbola ili brojke. Svaki točan odgovor nosi 2 boda. Ako se traži ime europskog matematičara nakon antike, za puna 2 boda trebate navesti bar inicijal prvog imena (ne broji se kao riječ) i pravilno napisati prezime; za matematičare iz jezičnih područja koja ne koriste latinicu priznaju se hrvatske i engleske transkripcije imena.

- (a) 60° je tetiva kojeg kuta? 60°
 (b) Koji je naslov najvažnijeg Fibonaccijevog djela? *Liber abaci*
 (c) Koji od važnih školskih matematičkih pojmova je uveo W. R. Hamilton? *vektor*
 (d) Koliko bridova ima krnji ikozaedar, koji je omeđen s 12 pravilnih peterokuta i 20 pravilnih šesterokuta, a ima 60 vrhova? 90
 (e) Kome se pripisuje razdvajanje algebre od geometrije? *Al-Karadžiju*

6. (10) Opišite Euklidovu konstrukciju brida pravilnog dodekaedra upisanog u sferu (uključivo svih potrebnih međukoraka). Temeljem te konstrukcije izračunajte duljinu tog brida ako je promjer sfere 6 cm.



Ako je \overline{AB} promjer sfere sa središtem S , brid \overline{AD} pravilnog dodekaedra dobijemo tako da odredimo točku X na \overline{AB} takvu da je $|AX| = \frac{1}{3}|AB|$. Nju dobivamo tako da iz A pod bilo kojim nenul kutom nanesimo polupravac i na njega triput nanesimo bilo koju nenul duljinu (točke P' , P'' i P); točku P spojimo s B i kroz P' povučemo paralelu s PB — ona siječe AB u traženoj točki X . Sad u X povučemo okomicu na AB koja polukružnicu nad \overline{AB} siječe u točki Y . Naposljetku dužinu \overline{AY} podijelimo točkom u omjeru zlatnog reza: Nad \overline{AY} konstruiramo kvadrat $AYRQ$; odredimo polovište T dužine \overline{AY} pa sjecište M kružnice sa središtem u T polumjera $|TQ|$ s pravcem AY . Nanesimo $|AM|$ na \overline{Y} da dobijemo C . Dužina \overline{AC} je traženi brid pravilnog dodekaedra.

Račun: $|AB| = 6$ cm, $|AX| = \frac{1}{3}|AB| = 2$ cm, dakle je $|SX| = 1$ cm. Trokut $\triangle SXY$ je pravokutan s hipotenuzom $r = 3$ cm pa je $|XY| = \sqrt{3^2 - 1^2}$ cm = $2\sqrt{2}$ cm. Trokut $\triangle AXY$ je pravokutan pa je $|AY| = \sqrt{2^2 + 8}$ cm = $2\sqrt{3}$ cm te je $|AT| = \sqrt{3}$ cm. Trokut $\triangle ATQ$ je pravokutan i $AYRQ$ je kvadrat pa je $|TM| = |TQ| = \sqrt{3 + 12}$ cm = $\sqrt{15}$ cm. Stoga je $|AC| = |AM| = |TM| - |TA| = (\sqrt{15} - \sqrt{3})$ cm.

7. (10) U Omar Hajjamovoj *Algebri* nalazimo zadatak: „Nađi pravokutni trokut za koji je hipotenuza jednaka zbroju jedne katete s visinom na hipotenuzu“. Postavite odgovarajuću kubnu jednadžbu. Ako znate da je taj tip jednadžbe Hajjam rješavao presjekom istostrane hiperbole i kružnice, odredite moderne jednadžbe tih dviju krivulja (*hint*: hiperbolu odaberite tako da su joj koordinatne osi asimptote). Nije potrebno izračunavati rješenje!

Neka su a , b i c na uobičajeni način označene stranice pravokutnog trokuta. Pitagorin poučak daje $a^2 + b^2 = c^2$. Visina na hipotenuzu iznosi $\frac{ab}{c}$ pa uvjeti zadatka daju $c = a + \frac{ab}{c}$, odnosno $c^2 = ac + ab$. Stoga je $a^2 + b^2 = ac + ab$. Dijeljenjem s c^2 dobijemo $(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$. Ako stavimo $x = \frac{a}{c}$, onda je $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} = \sqrt{1 - x^2}$ pa imamo $x^2 + 1 - x^2 = x + x \cdot \sqrt{1 - x^2}$, odnosno $1 - x = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$. Kvadriranje daje $1 - 2x + x^2 = x^2 - x^4$, tj. $x^4 - 2x + 1 = 0$. Jedno rješenje je očito 1, ali to bi značilo $a = c$, dakle možemo podijeliti jednadžbu s $x - 1$ i ostaje:

$$x^3 + x^2 + x = 1.$$

Trebamo hiperbolu i polukružnicu takve da je traženi x apscisa njihovog sjecišta. Istostrana hiperbola kojoj su koordinante osi asimptote ima jednadžbu oblika $xy = s$. Kružnica ima jednadžbu oblika $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$. Supstitucija $y = \frac{s}{x}$ u jednadžbu kružnice daje $(x - p)^2 + (\frac{s}{x} - q)^2 = r^2$, tj. $x^2 - 2px + p^2 + \frac{s^2}{x^2} - 2\frac{sq}{x} + q^2 = r^2$. Množenje s x^2 daje $x^4 - 2px^3 + (p^2 + q^2 - r^2)x^2 - 2sqx + s^2 = 0$. Očito tražimo p , q , r i s tako da to bude $x^4 - 2x + 1 = 0$. Prvo vidimo da je $s = 1$ (ili -1) i $p = 0$. Ostaje $x^4 + (q^2 - r^2)x^2 - 2qx + 1 = 0$. Sad vidimo da je $-2q = -2$ pa je $q = 1$ te ostaje $x^4 + (1 - r^2)x^2 - 2x + 1 = 0$. Sad trebamo $1 - r^2 = 0$, dakle $r = 1$. Dakle, tražena hiperbola je $xy = 1$, a tražena kružnica $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ i tražimo njihovo sjecište u prvom kvadrantu različito od $(1, 1)$.

8. (10) Eulerov izvod reda za broj e . Euler ga je iskoristio za dobivanje iznosa e na 23 decimale; koju parcijalnu sumu tog reda treba uzeti za dobiti iznos e na jednu decimalu točno!

Euler razmatra a^ω za $a > 1$. Za ω blizu 0 on zaključuje, zasigurno promatranjem tangente u $\omega = 0$, da je $a^\omega \approx 1 + k\omega$ za neki k (Euler je pisao = na mjestu \approx). Stoga je $a^{j\omega} \approx (1 + k\omega)^j$. Desna strana može se razviti u binomni red $(1 + t)^j = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{j}{n} t^n$ pa dobijemo

$$a^{j\omega} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot \dots \cdot (j-n+1)}{n!} (k\omega)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot \dots \cdot (j-n+1)}{n! j^n} j^n k^n \omega^n.$$

Supstitucija $x = j\omega$ daje

$$a^x \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot \dots \cdot (j-n+1)}{j^n} \cdot \frac{k^n}{n!} \cdot x^n.$$

Ako je j „beskonačno velik“, onda je $\frac{j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot \dots \cdot (j-n+1)}{j^n} \approx 1$, a svaki $x = j\omega$ se može shvatiti kao umnožak beskonačno velikog j s ω blizu 0 pa preostaje

$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \cdot x^n.$$

Euler definira da je e jednak broju a kad je $k = 1$, te uz $x = 1$ preostaje:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Nulta parcijalna suma je 1, prva $1+1=2$, druga je $2+\frac{1}{2}=2,5$, treća je $2,5+\frac{1}{6}=\frac{8}{3}=2,6\dots$, a četvrta je $\frac{8}{3}+\frac{1}{24}=\frac{65}{24}=2,7\dots$, dakle za točnost na jednu decimalu treba 4. parcijalna suma.

9. (25) Napišite kratki sastavak (1–2 stranice) na jednu od sljedeće dvije teme:

(a) „Kratka povijest neeuklidskih geometrija“.

(b) „Putovanje kroz vrijeme: Što bi Descartes i Euklid skupa napravili da je Descartes mogao otputovati u Euklidovo doba?“