

Povijest matematike

riješen pismeni ispit (26. kolovoza 2026.)

F. M. Brückler

1. (5) U svakom od sljedećih pet pitanja 0–4 ponuđena odgovora su točna. Označite sve točne odgovore. Na pojedinom pitanju ostvarujete 1 bod samo ako ste označili sve točne odgovore i nijedan krivi. Ako je samo jedna (ne)oznaka kriva, ostvarujete $\frac{1}{2}$ boda, ako su točno dvije (ne)oznake krive, ostvarujete 0 bodova, a inače ostvarujete $-\frac{1}{4}$ boda na pojedinom pitanju.

(a) Koji od sljedećih antičkih grčkih matematičara su se bavili problemem duplikacije kocke?

☐ Antifont. ☒ Arhita iz Tarenta. ☒ Eratosten iz Kirene. ☒ Menehmo.

(b) Keplerov rompski dodekaedar je primjer ...

☐ Arhimedovog tijela. ☐ kosog tijela. ☐ Platonovog tijela. ☐ zvjezdastog tijela.

(c) Koje od sljedećih aproksimacija za π odgovaraju rezultatima o krugovima koji su bili poznati već prije nove ere?

☒ $\frac{25}{8}$ ☐ $\frac{22}{7}$ ☒ 3 ☐ $\sqrt{10}$

(d) Leonardo iz Pise je napisao ...

☒ *Flos*. ☒ *Liber abaci*. ☒ *Liber quadratorum*. ☒ *Practica geometriae*.

(e) Važna imena u povijesti normalne razdiobe su ...

☒ F. Galton ☐ J. C. Maxwell ☒ K. Pearson ☒ A. Quetelet

2. (5) Spojite stoljeća iz prvog stupca s francuskim matematičarima iz drugog stupca koji su (barem u većem dijelu života) djelovali u tim stoljećima. Svaka točna spojnica nosi 1 bod, svaka kriva -1 , a svaka nedostajuća 0 bodova.

15. stoljeće: Nicolas Chuquet

16. stoljeće: François Viète

17. stoljeće: Blaise Pascal

18. stoljeće: Jean Le Rond d'Alembert

19. stoljeće: Joseph Liouville

3. (5) U sljedećim pitanjima označite točne završetke rečenica. U svakom pitanju jedan od dva ponuđena odgovora je ispravan. Točno označen odgovor nosi $+1$ bod, krivo odabran -1 bod, a ako za neko pitanje ne označite nijedan odgovor na tom pitanju ostvarujete 0 bodova.

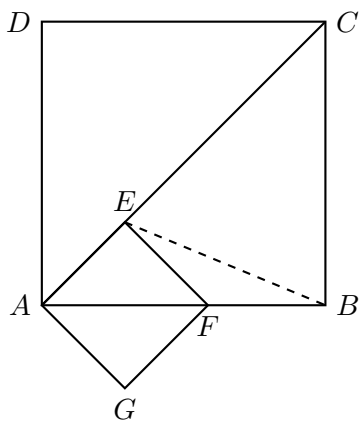
(a) Rhindov i Moskovski papirus pisani su ...

☐ hijeroglifskim pismom. ☒ hijeratskim pismom.

(b) Srednje geometrijske proporcionalne između 1 i 343 su ...

☒ 7 i 49. ☐ 115 i 230.

- (c) Prvi tip Hipokratovih mjeseca generalizirao je ...
☐ Al-Batani (Albategnius). ☒ Al-Hajtam (Alhazen).
- (d) R. Descartes je osnovne principe svoje analitičke geometrije opisao na primjeru
☐ Apolonijevog problema. ☒ Pappusovog problema.
- (e) Formulu ekvivalentnu Eulerovoj formuli $e^{it} = \cos t + i \sin t$ poznao je već nešto ranije i ...
☒ R. Cotes. ☐ A. De Moivre.
4. (20) Nadopunite sljedeće rečenice. Svaka točno nadopunjena rečenica nosi 2 boda. Ako se traži ime europskog matematičara nakon antike, za puna 2 boda trebate navesti bar inicijal prvog imena i pravilno napisati prezime; za matematičare iz jezičnih područja koja ne koriste latinicu priznaju se hrvatske i engleske transkripcije imena.
- (a) Razlomak $\frac{1}{40}$ zapisan na babilonski način je $\overline{1} \lll$.
- (b) Prva osoba koja se bavila sa sva tri klasična problema bio je Hipokrat s Hiosa.
- (c) Opis kvadrature proizvoljnog mnogokuta nalazimo u drugoj knjizi Euklidovih *Elementata*.
- (d) Starokineska metoda *tjen juan* ekvivalentna je modernom(j) Hornerovom algoritmu.
- (e) Abu Al-Wafa Buzđani je jedini srednjevjekovni arapski matematičar kod kojeg možemo naći negativne brojeve.
- (f) N. D'Oresmeu se pripisuje prvi dokaz divergencije harmonijskog reda.
- (g) Zapis $1.m.R.q. [2.p.\frac{3}{4}]$ kod Rafaela Bombellija bi predstavljao ono što danas zapisujemo kao $1 - \sqrt{2 + 4x^3}$.
- (h) Torricellijeva truba je primjer konvergentnog nepravog integrala (ili: neograničenog tijela konačnog volumena).
- (i) Četverokut s dvije jednako duge stranice okomite na treću u pokušaju dokaza da je postulat o paralelama teorem je koristio talijanski matematičar G. Saccheri.
- (j) Dedekindovim rezom $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^3 > 3\}$ definiran je broj $\sqrt[3]{3}$.
5. (10) Na sljedeća pitanja odgovorite s maksimalno tri riječi, simbola ili brojke. Svaki točan odgovor nosi 2 boda. Ako se traži ime europskog matematičara nakon antike, za puna 2 boda trebate navesti bar inicijal prvog imena i pravilno napisati prezime; za matematičare iz jezičnih područja koja ne koriste latinicu priznaju se hrvatske i engleske transkripcije imena.
- (a) Kako se 801 zapisivao u grčkom alfabetskom sustavu? $\omega\alpha'$
- (b) Koju riječ je al-Hvarizmi koristio za nepoznanicu? *šaj*
- (c) Tko je utemeljio projektivnu geometriju? *G. Desargues*
- (d) Za koji grad je vezano Eulerovo utemeljenje topologije? *Königsberg*
- (e) Kako se označava najmanji kardinalni broj veći od $\aleph_0$? $\aleph_1$



Slika 1: Nesumjerljivost dijagonale i stranice kvadrata.

6. (10) Opišite pretpostavljeni pitagorejski dokaz nesumjerljivosti dijagonale i stranice kvadrata temeljen na Euklidovom algoritmu.

Nesumjerljive veličine prepoznavamo po tome što u Euklidovom algoritmu postupak ne staje. U kvadrat $ABCD$ ucrtamo dijagonalu $\overline{AC}$. Pretpostavimo da su stranica i dijagonala tog kvadrata sumjerljive. Na dijagonalu od jednog vrha, recimo od C , nanesimo duljinu stranice, čime dobijemo točku E . Trokut EBC je očito jednakokračan. Konstruiramo kvadrat $AEFG$. Očito je F na stranici $\overline{AB}$ i očito je duljina stranice kvadrata $AEFG$ jednaka razlici duljina dijagonale i stranice kvadrata $ABCD$. Zbog jednakosti kutova s okomitim krakima je i $\triangle EFB$ jednakokračan, tj. $|BF| = |EF| = |AE| = |AC| - |AB|$. Stoga je dijagonala kvadrata $AEFG$ duljine $|AB| - |BF| = |AB| - (|AC| - |AB|) = 2|AB| - |AC|$. Ovaj postupak možemo očito ponoviti s kvadratom $AEFG$ da dobijemo novi manji kvadrat, pa na njega i tako unedogled. Pritom je prema pokazanom u svakom sljedećem koraku duljina stranice novog kvadrata jednaka razlici duljina dijagonale i stranice prethodnog, a duljina dijagonale novog kvadrata jednaka razlici duljina dvostruke stranice i jedne dijagonale prethodnog. Stoga ako su stranica i dijagonala polaznog kvadrata sumjerljive, sa zajedničkom mjerom m , onda su takve i stranica i dijagonala kvadrata u svakom koraku. No, one postaju proizvoljno male, specijalno, u nekom trenu manje od m , što je nemoguće.

7. (10) Iskažite Napierovu definiciju logaritma i dokažite da za Napierov logaritam NapLog vrijedi $\text{NapLog}(10^7 x y) = \text{NapLog}(10^7 x) + \text{NapLog}(10^7 y)$ za sve $x, y > 0$.

Napierov logaritam udaljenosti koja je u nekom trenutku preostala jednoj čestici G do cilja defiran je kao udaljenost koju je do istog trenutka prešla druga čestica A od početka. Pritom se pretpostavlja da se obje čestice gibaju pravocrtno i kreću u istom trenutku, pri čemu se A giba konstantnom brzinom 10^7 , a za G su početna udaljenost do cilja i početna brzina obje 10^7 , a u svakom trenutku joj je brzina razmjerna udaljenosti do cilja.

Znamo da je

$$\text{NapLog } x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}$$

pa imamo:

$$\begin{aligned}\text{NapLog}(10^7 xy) &= 10^7 \ln \frac{10^7}{10^7 xy} = 10^7 \ln \frac{1}{xy} = 10^7 \ln \frac{1}{x} + 10^7 \ln \frac{1}{y} = \\ &= 10^7 \ln \frac{10^7}{10^7 xy} = 10^7 \ln \frac{10^7}{x} + 10^7 \ln \frac{10^7}{10^7 y} = \text{NapLog}(10^7 x) + \text{NapLog}(10^7 y).\end{aligned}$$

8. (10) Problem kockarove propasti i de Moivreovo rješenje tog problema.

Problem kockareve propasti glasi: Dva kockara igraju igru u kojoj u svakom krugu ulažu isti iznos, a u svakom krugu je vjerojatnost pobjede prvog igrača p . Ako znamo koliko je tko imao novca na početku, koja je vjerojatnost da će, recimo, drugi igrač ostati bez novca (propasti)?

De Moivre je zamislio da igrači imaju novce složene u tornjeve i da po jedan novčić predstavlja po jedan ulog. Ovisno o tome tko u pojedinom krugu pobijedi, najgornji novčić prvoga se prebacuje drugom ili obrnuto. Prvi igrač na početku ima a novčića, a drugi igrač njih b . Zatim je de Moivre novčićima dodijelio „nominalne vrijednosti”: Najdonji novčić prvog igrača ima nominalnu vrijednost $x = \frac{q}{p}$ ($q = 1 - p$), sljedeći na njemu x^2 i t.d. do najgornjeg novčića nominalne vrijednosti x^a . Dalje najgornji novčić drugog igrača ima nominalnu vrijednost x^{a+1} , novčić ispod njega x^{a+2} i t.d. do najdonjeg novčića drugog igrača koji ima nominalnu vrijednost x^{a+b} . Budući da se u svakom krugu ulažu najgornji novčići, nominalni ulog drugog je u svakom krugu x puta veći od uloga prvog. Stoga je očekivana nominalna vrijednost dobitka prvog igrača u svakom krugu

$$p x^{i+1} - q x^i = 0,$$

gdje je i broj novčića koje je na početku tog kruga još imao prvi igrač. Budući da je očekivanje u svakom krugu nula, ono je nula i na razini čitave igre. Specijalno, umnožak vjerojatnosti P_A da prvi osvoji sve novce od drugog (da drugi propadne) i njegovog nominalnog dobitka u tom slučaju jednaka je umnošku vjerojatnosti P_B da drugi osvoji sve novce od prvog (da prvi propadne) i njegovog nominalnog dobitka u tom slučaju:

$$P_A \cdot (x^{a+1} + x^{a+2} + \dots + x^{a+b}) = P_B \cdot (x + x^2 + \dots + x^a),$$

odnosno, koristeći $P_A + P_B = 1$ i formulu za sumu geometrijskog niza, dobijemo (izuzev za slučaj $p = q = \frac{1}{2}$) da je vjerojatnost propasti drugog igrača:

$$P_A = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

9. (25) Napišite kratki sastavak (1–2 stranice) na jednu od sljedeće dvije teme:

- (a) „Kratka povijest rješenja algebarskih jednadžbi u radikalima“.
- (b) „I stranputice mogu voditi dalje: Priča o jednom primjeru kojemu se isprva krivo pristupilo, a kasnije je doveo do značajnih matematičkih otkrića“