

Povijest matematike

riješen pismeni ispit (9. rujna 2026.)

F. M. Brückler

1. (5) U svakom od sljedećih pet pitanja 0–4 ponuđena odgovora su točna. Označite sve točne odgovore. Na pojedinom pitanju ostvarujete 1 bod samo ako ste označili sve točne odgovore i nijedan krivi. Ako je samo jedna (ne)oznaka kriva, ostvarujete $\frac{1}{2}$ boda, ako su točno dvije (ne)oznake krive, ostvarujete 0 bodova, a inače ostvarujete $-\frac{1}{4}$ boda na pojedinom pitanju.
- (a) C. F. Gauß i A.-M. Legendre su se sukobili oko ...
- ☐ osnovnog teorema algebre. ☒ metode najmanjih kvadrata.
☐ osnovnog teorema aritmetike. ☐ definicije funkcije.
- (b) Klaudije Ptolemej je ...
- ☒ pokušao dokazati postulat o paralelama.
☐ svoje glavno djelo napisao na arapskom jeziku.
☐ omjer opsega i promjera kruga procijenio s $3\frac{1}{8}$.
☐ računao koristeći dekadski pozicijski sustav.
- (c) Koji od sljedećih antičkih grčkih matematičara su djelovali prije Euklida?
- ☐ Apolonije iz Perge ☒ Eudoks s Knida ☒ Hipokrat s Hiosa ☒ Teetet Atenski
- (d) Označite sve suvremenike M. Mersennea!
- ☐ L. Euler ☐ G. de l'Hôpital ☒ R. Descartes ☐ Jacob Bernoulli
- (e) Papa Silvestar II. je ...
- ☒ izvornim imenom bio Gerbert. ☐ preveo Al-Hvarizmijevu *Aritmetiku*.
☒ opisao novu vrstu abakusa. ☐ napisao zbirku zadataka iz zabavne matematike.
2. (5) Spojite vremenska razdoblja iz prvog stupca s brojevnim sustavima iz drugog stupca koji su korišteni u tim razdobljima. Svaka točna spojnica nosi 1 bod, svaka kriva -1 , a svaka nedostajuća 0 bodova.
- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 3. i 2. tisućljeće pr. Kr. | hijeroglifski brojevni sustav |
| 4. st. pr. Kr.–16. st. n. e. | štapićaste brojke |
| 7.–11. st. | nagari brojevni sustav |
| 7.–4. st. pr. Kr. | atički brojevni sustav |
| 8.–15. st. | gobar brojevni sustav |
3. (5) U sljedećim pitanjima označite točne završetke rečenica. U svakom pitanju jedan od dva ponuđena odgovora je ispravan. Točno označen odgovor nosi $+1$ bod, krivo odabran -1 bod, a ako za neko pitanje ne označite nijedan odgovor na tom pitanju ostvarujete 0 bodova.

- (a) $y = \sqrt{3x - 5}$ bi na isti način kao i mi danas interpretirao ...
☒ I. Newton. ☐ F. Viète.
- (b) Kineski teorem o ostacima se prvi put pojavljuje kod ...
☐ Liu Huija. ☒ Sun Džija.
- (c) Simbol $\sqrt{\quad}$ se prvi put pojavljuje u knjizi ...
☒ C. Rudolffa. ☐ J. Widmanna.
- (d) *Sunya* je sanskrtski izraz za ...
☒ nulu. ☐ polutetivu.
- (e) Točan postupak za izračunavanje volumena krnje kvadratne piramide nalazimo u ...
☐ Rhindovom papirusu. ☒ Moskovskom papirusu.
4. (20) Nadopunite sljedeće rečenice. Svaka točno nadopunjena rečenica nosi 2 boda. Ako se traži ime europskog matematičara nakon antike, za puna 2 boda trebate navesti bar inicijal prvog imena i pravilno napisati prezime; za matematičare iz jezičnih područja koja ne koriste latinicu priznaju se hrvatske i engleske transkripcije imena.
- (a) Koeficijent smjera tangente na krivulju u nekoj njenoj točki je kod I. Newtona $\frac{y}{x}$, a kod G. W. Leibniza $\frac{dy}{dx}$ (unijeti simboličke zapise).
- (b) L. A. J. Quetelet je poznat po tome da je dao moderno značenje izrazu statistika.
- (c) Logaritam kao inverz eksponencijalne funkcije prvi je razmatrao L. Euler.
- (d) Matematičari koji su prvi uočili da kvadratne odnosno kubne jednadžbe mogu imati više od jednog rješenja su Al-Hvarizmi i Omar Hajjam.
- (e) Mersenneovi brojevi su prosti brojevi oblika $2^n - 1$, dok su Fermatovi brojevi prosti brojevi oblika $2^{2^n} + 1$.
- (f) Naziv elipsa potječe od toga što je Apolonije iz Perge pokazao da za nju određeni s konikama povezani kvadrat ima manju površinu nego jedan s njima povezani pravokutnik.
- (g) Prema Jacob Bernoullijevom zakonu slabih brojeva, za velik broj nezavisnih izvođenja Bernoullijevog pokusa relativna frekvencija uspjeha se približava teorijskoj vjerojatnosti.
- (h) Prve rezultate o neeuklidskim geometrijama objavili su, bez dokaza egzistencije takvih geometrija, J. Bolyai i N. I. Lobačevski.
- (i) Prvi indijski matematičar koji je napisao samo matematici posvećen tekst je Mahavira.
- (j) Prvi matematičar koji trigonometriju gleda kao matematičku disciplinu, a ne samo kao sredstvo za astronomske proračune bio je Nasir al-Tusi.
5. (10) Na sljedeća pitanja odgovorite s maksimalno tri riječi, simbola ili brojke. Svaki točan odgovor nosi 2 boda. Ako se traži ime europskog matematičara nakon antike, za puna 2 boda trebate navesti bar inicijal prvog imena i pravilno napisati prezime; za matematičare iz jezičnih područja koja ne koriste latinicu priznaju se hrvatske i engleske transkripcije imena.

- (a) Koji je arapski ekvivalent starogčkog *mouseiona*? Kuća mudrosti
- (b) Navedite dva matematička simbola koja i danas koristimo, a koje je prvi koristio Leonhard Euler..... dva od: e , $f(x)$, i , π
- (c) Po kome ime nosi paradoks da $\{x : x \notin x\}$ nije skup? B. Russell
- (d) Tko je prvi objasnio pravila linearne perspektive? L. Alberti
- (e) U kojoj knjizi *Elemenata* nalazimo konstrukcije tangenti na kružnice? trećoj

6. (10) Koristeći babilonsko-Heronovu, starokinesku i(li) starodindijsku metodu iz rukopisa Bakhshali (odaberite dvije od te tri metode) na dvije decimale točno izračunajte $\sqrt{5}$.

Za sve tri metode dobro je uočiti da je $2 < \sqrt{5} < 3$, odnosno da $\sqrt{5}$ na dvije decimale ima oblik 2,ab.

Babilonsko-Heronova metoda: Uzmimo početnu aproksimaciju, primjerice, 2. Sljedeća, bolja, aproksimacija je $\frac{1}{2} \left(2 + \frac{5}{2} \right) = \frac{9}{4} = 2,25$. Iz nje dobivamo još bolju aproksimaciju $\frac{1}{2} \left(2,25 + \frac{5}{2,25} \right) = \frac{9}{4} = 2,236\bar{1}$, a iz nje $\frac{1}{2} \left(2,236\bar{1} + \frac{5}{2,236\bar{1}} \right) = \frac{9}{4} = 2,2360\dots$. Budući da su se ponovile prve tri decimale, stajemo i tražena aproksimacija je 2,23.

Starokineska metoda: $\sqrt{5} = 2 + \frac{a}{10} + \frac{b}{100}$, odnosno ekvivalentno tražimo $\lfloor \sqrt{50000} \rfloor = 200 + 10a + b$ (može se računati i s prvim oblikom, ali ovako izbjegnemo razlomke). Kvadrirajući daje $50000 = 40000 + 4000a + 100a^2 + 400b + 20ab + b^2$, tj. $10000 = 4000a + 100a^2 + (400b + 20ab + b^2)$ pa isprobavanje redom $a = 0, 1, 2, 3$ daje $a = 2$. Dakle, $10000 = 8400 + 440b + b^2$, tj. $1600 = 440b + b^2$ pa isprobavanje $b = 0, 1, 2, 3$ daje $b = 3$: $\sqrt{5} \approx 2,23$.

Metoda iz rukopisa Bakhshali: Uzmimo početnu aproksimaciju $x = 2$, ovdje ona mora biti manja od traženog korijenja. Izračunamo pomoćnu vrijednost $b = 5 - 2^2 = 1$ pa iz nje dobijemo sljedeću, bolju, aproksimaciju $2 + \frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2\left(2 + \frac{1}{4}\right)} = 2,2\dots$ (u svakom koraku uzimamo samo jednu decimalu više). Kontroliramo je li $2,2^2 < 5$, je. Opet računamo pomoćnu vrijednost $b = 5 - 2,2^2 = 0,16$ pa iz nje dobijemo sljedeću, bolju, aproksimaciju $2,2 + \frac{0,16}{4,4} - \frac{\left(\frac{0,16}{4,4}\right)^2}{2\left(2,2 + \frac{0,16}{4,4}\right)} = 2,23\dots$ (u svakom koraku uzimamo samo jednu decimalu više). Kontroliramo je li $2,23^2 < 5$, je, pa je 2,23 aproksimacija točna na dvije decimale.

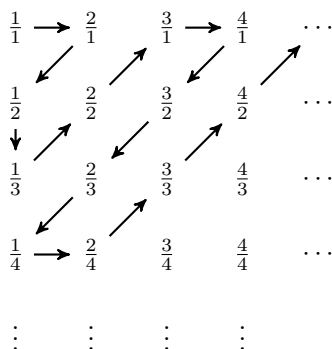
7. (10)
8. (10) Koristeći de Fermatovu metodu odredite tangentu na graf funkcije $f(x) = x^3 + x - 10$ u točki koja ima za 1 veću apscisu od njene realne nultočke. Nultočku nađite Cardanovom metodom, nakon što prvo Descartesovim pravilom pokažete da postoji samo jedna nultočka i odredite joj predznak.

Descartesovo pravilo primijenjeno na $x^3 + x - 10 = 0$ povlači da ta jednadžba ima jedno pozitivno rješenje. Nula joj očito nije nultočka, a primjena na $(-x)^3 + (-x) - 10 = -x^3 - x - 10$ povlači da nema negativnih nultočaka. Dakle, postoji samo jedna i to pozitivna realna nultočka funkcije f .

Tangenta ima jednadžbu $y = kx + \ell$, točka je $A = (3, 20)$, pa nam zapravo treba k jer onda imamo tangentu $y + 20 = k(x - 3)$. Neka je O sjecište tražene tangente s osi apscisa i $X = (3, 0)$, pa je $k = \frac{20}{|OX|}$. Neka je B točka na krivulji s apscisom $3 + E$, gdje je E mali prirast, dakle je $B = (3 + E, (3 + E)^3 + 3 + E - 10) = (3 + E, E^3 + 9E^2 + 28E + 20)$. Trokuti $\triangle OXA$ i $\triangle OYB$ su, približno, slični:

Dakle, tangenta je $y - 20 = 28(x - 3)$, tj. $y = 28x - 64$.

- Prebrojivost $\mathbb{Q}$ dokazujemo tako da prvo dokažemo da $\mathbb{Q}^+$ prebrojiv. Koristeći, primjerice, dijagram



(b) „Dragi _____¹ ... (pismo obožavatelja iz budućnosti)”

4