Povijest matematike

pismeni ispit, 2. srpnja 2020.

F. M. Brueckler

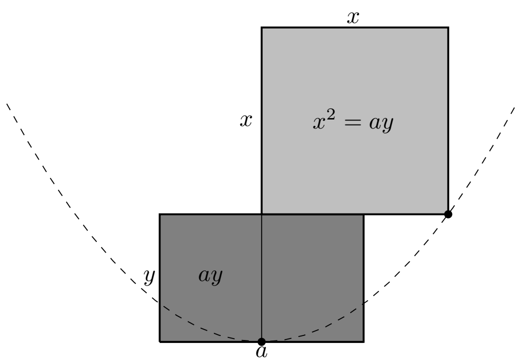
Ime i prezime

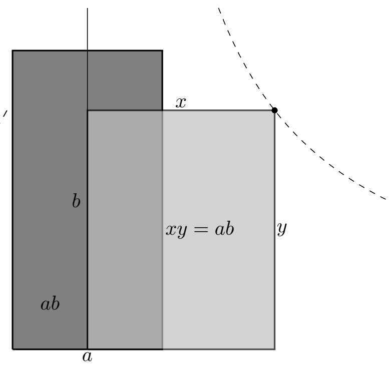
Napomene. Nisu dozvoljena nikakva pomagala osim pribora za pisanje i crtanje te kalkulatora. Sve odgovore unosite na ovaj primjerak kolokvija. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni bodovi pripisuju se s negativnim predznakom.

1. **(5)** Menehmovo rješenje problema duplikacije kocke pomoću konika.

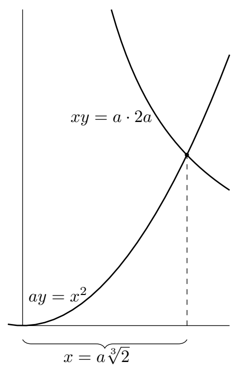
   Prema Hipokratu s Hiosa, rješenje problema duplikacije kocke brida a je dužina duljine x koja zadovoljava $a : x = x : y = y : (2a)$. Takvu dužinu Menehmo konstruira[1] presijecanjem parabole i hiperbole.

   Parabola se bira tako da joj je fokus od direktrise udaljen za $\frac{a}{2}$. Dakle točke parabole koje su na „visini" y možemo dobiti tako da konstruiramo kvadrat površine ay (slika dolje desno). Točke hiperbole Menehmo konstruira tako da za pojedini pomak x (udesno od vertikale) odgovarajuću visinu y tražene točke dobijemo konstrukcijom pravokutnika širine x i površine $2a^2$ (odnosno, općenito ab, no mi ovdje trebamo $b = 2a$), slika dolje lijevo.





   Stoga za točku koja je istovremeno na ove dvije krivulje vrijedi $a : x = x : y$ (jer je na paraboli) i $a : x = y : (2a)$ (jer je na hiperboli), dakle je x točke presjeka opisane parabole i hiperbole tražena duljina.



[1] U predavanjima je opisano samo jedno od rješenja, postojalo je i drugo pomoću presjeka dvije parabole.

2. **(5)** Iskažite Descartesovo pravilo za polinome i iskoristite ga da izvedete što više zaključaka o nultočkama polinoma

$$x^5 - x^4 + 3x^3 + 9x^2 - x + 5$$

Descartesovo pravilo kaže: Broj pozitivnih nultočki polinoma jednak je ili za paran broj manji od broja promjena predznaka njegovih koeficijenata (u standardnom zapisu polinoma po padajućim potencijama).

Predznaci koeficijenata zadanog polinoma su $+-++-+$, dakle imamo 4 promjene predznaka, pa taj polinom ima 4, 2 ili 0 pozitivnih nultočaka.

Ako zamijenimo x s $-x$ dobili smo polinom $-x^5 - x^4 - 3x^3 + 9x^2 + x + 5$ (čije pozitivne nultočke su točno suprotne negativnim nultočkama polaznog polinoma). Tu su predznaci koeficijenata $- - - + ++$, dakle imamo samo jednu promjenu predznaka, odnosno polazni polinom sigurno ima 1 negativnu nultočku.

Budući da se radi o polinomu stupnja 5, koji sigurno ima bar jednu realnu nultočku i ukupno ih nema više od 5, samo temeljem Descartesovog pravila ne možemo zaključiti ništa više (ili ima 1 negativnu i nijednu pozitivnu, ili ima 1 negativnu i 2 pozitivne, ili ima 1 negativnu i 4 pozitivne, sve je moguće).

3. **(5)** Označite sve istinite rečenice.

☐ Nijedna polinomijalna jednadžba stupnja većeg od 4 nema rješenje u radikalima.

☐ Analitička geometrija je nastala u 18. stoljeću.

☒ Torricellijeva truba najstariji je poznat primjer onog što danas zovemo konvergentnim nepravim integralom.

☐ Poincaréova hipoteza još nije dokazana.

☒ Cantor je dokazao da je skup svih algebarskih brojeva prebrojiv.

☒ *Ludus Sancti Petri* (igra svetog Petra) naziv je za jednu od mnogih varijanti Josipovog zadatka.

☐ *Ars Conjectandi* je napisao Johann Bernoulli.

☒ Prethodnik metode najmanjih kvadrata je, među ostalima, i Ruđer Josip Bošković.

☐ *Disquisitiones Aritmeticae* je Eulerovo djelo o teoriji brojeva.

☒ Caspar Wessel je čovjek koji je prvi opisao kompleksnu ravninu.

Povijest matematike

pismeni ispit, 2. srpnja 2020.

F. M. Brueckler

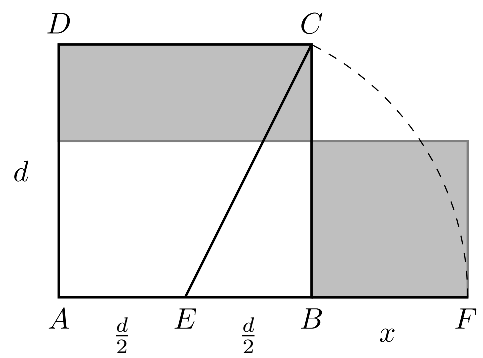
Ime i prezime

Napomene. Nisu dozvoljena nikakva pomagala osim pribora za pisanje i crtanje te kalkulatora. Sve odgovore unosite na ovaj primjerak kolokvija. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni bodovi pripisuju se s negativnim predznakom.

1. **(5)** Definirajte omjer zlatnog reza te dajte jednu konstrukciju dijeljenja dužine duljine 1 u omjeru zlatnog reza. Izvedite odgovarajuću kvadratnu jednadžbu i riješite ju u Al-Hwārizmījevom stilu (koristite modernu simboliku).

   Omjer zlatnog reza je omjer u kojem točka dijeli danu dužinu na dva dijela ako je omjer duljine čitave dužine prema duljini većeg od dijelova jednak omjeru duljine većeg dijela prema duljini manjeg.

   Jedna konstrukcija je pitagorejska. Ako je zadana polazna dužina $\overline{AB}$ duljine d, nad njom konstruiramo kvadrat $ABCD$ i nađemo polovište E od $\overline{AB}$. Ako je F sjecište pravca AB s kružnicom kojoj je središte E, a polumjer $|EC|$, onda je tražena duljina $|BF|$:



   Ako je $d = 1$, opisani razmjer svodi se na $1 : x = x : (1 - x)$, što je ekvivalentno s $1-x=x^2$. Operacijom al-džabr ovo postaje $x^2+x = 1$, tj. jednadžba tipa $x^2+bx = c$ u Al-Hwārizmījevoj klasifikaciji. Nju se rješava svođenjem na potpun kvadrat: Na kvadrat stranice x uz dvije njegove stranice „nalijepimo” pravokutnike stranica x i $\frac{1}{2}$ (pola od b). Tom gnomonu do kvadrata nedostaje $\frac{1}{4}$, dakle je $x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ potpun kvadrat: $(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$. Stoga je $x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$ (smisla ima samo pozitivno rješenje), odnosno $x = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$.

2. **(5)** Napišite jednakost koju nazivamo hipotezom kontinuuma. Jedna strana hipoteze kontinuuma predstavlja kardinalni broj skupa $\mathbb{R}$ – koja je to? Dokažite da je ta strana veća od $\aleph_0$, te objasnite što predstavlja simbol koji se nalazi na drugoj strani hipoteze kontinuuma.

Hipoteza kontinuuma glasi

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Pritom je $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ kardinalni broj od $\mathbb{R}$. Simbol $\aleph_1$ predstavlja najmanji kardinalni broj veći od $\aleph_0$.

Potrebno je dokazati da je $\mathfrak{c} > \aleph_0$, tj. da je skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv (jer $\aleph_0$ predstavlja kardinalni broj svakog prebrojivog beskonačnog skupa). Poznato je da je $\mathbb{R}$ jednakobrojan (ekvipotentan) s $\langle 0,1\rangle$, dakle treba dokazati da $\langle 0,1\rangle$ nije prebrojiv. Pretpostavimo suprotno, tj. $\langle 0,1\rangle \sim \mathbb{N}$. Onda se svi brojevi iz $\langle 0,1\rangle$ mogu nabrojati kao niz, u svom decimalnom zapisu (taj je jedinstven ako zahtijevamo beskonačno mnogo nenul znamenki):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}\underline{7}528752\ldots \\ x_2 &= 0{,}5\underline{0}38567\ldots \\ x_3 &= 0{,}11\underline{9}3453\ldots \\ x_4 &= 0{,}255\underline{3}602\ldots \\ &\ \ \vdots \end{aligned} \tag{1}$$

Definiramo broj $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots \in \langle 0,1\rangle$, tako da je $a_i = 9$ uvijek osim ako je i-ta znamenka od x_i jednaka 9, u kom slučaju uzimamo $a_i = 8$ (gore: $x = 0{,}9989\ldots$). Očito je $x \in \langle 0,1\rangle$, ali nije jednak nijednom od x_i, dakle dobili smo kontradikciju s pretpostavkom da smo sve elemente od $\langle 0,1\rangle$ nabrojali u tom nizu.

3. **(5)** Označite sve istinite rečenice.

☐ Prvo su definirane matrice, a onda determinante.

☐ Saccheri-Khayyamov četverokut ima tri prava kuta.

☐ Funkcije su definirane prije nego derivacije i integrali.

☐ Teoriju grafova na kemiju je primijenio Kirchhoff.

☐ Skup racionalnih brojeva je neprebrojiv.

☒ Među prve ljude u Europi koji su se bavili nekim kombinatornim pitanjima ubraja se Ramon Llull.

☒ Najstariji poznat pokušaj racionalnog pristupa problemu slučajnosti potječe od Girolama Cardana.

☒ Temeljne postavke računa pogrešaka izrekao je Galileo Galilei.

☐ Riemannova hipoteza glasi da ζ-funkcija nema nultočaka osim $\frac{1}{2}$.

☒ Do 19. stoljeća nije bilo poznato postoje li transcendentni brojevi.