

Slika: © FMB 1999 (CC BY-NC-ND)

Periodizacija starogrčke povijesti

- 1 Prijelazno doba između prapovijesnog i antike: Oko 1100.–800. pr. Kr.; nastanak prvih polisa, kolonizacija Male Azije.
- 2 Arhajsko („jonsko“) razdoblje: Od oko 800. pr. Kr. do grčko-perzijskih ratova 490.–480. pr. Kr.; širenje kolonizacije, razvoj alfabeta, počeci znanstvenog razmišljanja, ...
- 3 Klasično („atensko“) razdoblje: Do vladavine Aleksandra Makedonskog (336.–323. pr. Kr.); glavni razvoj u Ateni, razvoj filozofije i znanosti, ...
- 4 Helenizam: Od Aleksandra Makedonskog do pada pod vlast Rimljana 146. g. pr. Kr.; miješanje s drugim, osobito istočnim kulturama
- 5 Postklasični helenizam: do pada Zapadnog Rimskog carstva 476. .A. D.; dominacija Rima

Počeci grčke kulture i znanosti

- gdje je bila **Jonija**?

Počeci grčke kulture i znanosti

- gdje je bila **Jonija**?
- grčki **alfabet** s 24 slova:

Počeci grčke kulture i znanosti

- gdje je bila **Jonija**?
- grčki **alfabet** s 24 slova:
 $A, \alpha; B, \beta; \Gamma, \gamma; \Delta, \delta;$

Počeci grčke kulture i znanosti

- gdje je bila **Jonija**?
- grčki **alfabet** s 24 slova:
 $A, \alpha; B, \beta; \Gamma, \gamma; \Delta, \delta; E, \varepsilon;$

Počeci grčke kulture i znanosti

- gdje je bila **Jonija**?
- grčki **alfabet** s 24 slova:

A, α ; B, β ; Γ , γ ; Δ , δ ; E, ϵ ; Z, ζ ; H, η ; Θ , θ ;

Počeci grčke kulture i znanosti

- gdje je bila **Jonija**?
- grčki **alfabet** s 24 slova:

A, α ; B, β ; Γ , γ ; Δ , δ ; E, ϵ ; Z, ζ ; H, η ; Θ , θ ; I, ι ; K, κ ; Λ , λ ;
M, μ ; N, ν ;

Počeci grčke kulture i znanosti

- gdje je bila **Jonija**?
- grčki **alfabet** s 24 slova:

A, α ; B, β ; Γ , γ ; Δ , δ ; E, ε ; Z, ζ ; H, η ; Θ , θ ; I, ι ; K, κ ; Λ , λ ;
M, μ ; N, ν ; Ξ , ξ ;

Počeci grčke kulture i znanosti

- gdje je bila **Jonija**?
- grčki **alfabet** s 24 slova:

A, α ; B, β ; Γ , γ ; Δ , δ ; E, ε ; Z, ζ ; H, η ; Θ , θ ; I, ι ; K, κ ; Λ , λ ;
 M, μ ; N, ν ; Ξ , ξ ; O, $\omicron$; Π , π ; P, ρ ; Σ , σ ili ς ; T, τ ;

Počeci grčke kulture i znanosti

- gdje je bila **Jonija**?
- grčki **alfabet** s 24 slova:

A, α ; B, β ; Γ , γ ; Δ , δ ; E, ϵ ; Z, ζ ; H, η ; Θ , θ ; I, ι ; K, κ ; Λ , λ ;
 M, μ ; N, ν ; Ξ , ξ ; O, $\omicron$; Π , π ; P, ρ ; Σ , σ ili ς ; T, τ ; Y, υ ; Φ ,
 φ ; X, χ ; Ψ , ψ ; Ω , ω .

Počeci grčke kulture i znanosti

- gdje je bila **Jonija**?
- grčki **alfabet** s 24 slova:
 $A, \alpha; B, \beta; \Gamma, \gamma; \Delta, \delta; E, \varepsilon; Z, \zeta; H, \eta; \Theta, \theta; I, \iota; K, \kappa; \Lambda, \lambda;$
 $M, \mu; N, \nu; \Xi, \xi; O, o; \Pi, \pi; P, \rho; \Sigma, \sigma \text{ ili } \varsigma; T, \tau; Y, \upsilon; \Phi,$
 $\varphi; X, \chi; \Psi, \psi; \Omega, \omega.$
- prijelaz 7./6. st. pr. Kr.: temelji filozofije i znanstvenog načina razmišljanja
- utjecaj Egipta i Babilona
- jonsko razdoblje** starogrčke matematike (ca. 7.–5. st. pr. Kr.):
 nema sačuvanih primarnih izvora
- Što mislite, koji starogrčki matematičari spadaju u ovo razdoblje?

Atički (akrofonski) brojevni sustav

Aditivan; primarna baza 10, sekundarna baza 5:

1	5	10	50	100	500	1000	5000	10.000	50.000
	⊐	Δ	⊐ ^Δ	H	⊐ ^H	X	⊐ ^X	M	⊐ ^M

Koji broj predstavlja brojka

M^HΔΔΔ⊐IIII?

Tales iz Mileta (ca. 624.–527. pr. Kr.)

- Prvi poimence poznat grčki filozof, znanstvenik i inženjer.
- Ne zna se je li išta pisao, a ako i jest, svi njegovi zapisi nestali su prije Aristotelovog doba (sred. 4. st. pr. Kr.).
- Pripisuju mu se prvi matematički dokazi, ali nije sigurno je li išta dokazivao!
- Talesu pripisani teoremi pripisuju mu se temeljem biografije koju je napisao Diogenes Laertius (2./3. st. A.D.) i **Proklovi**h (5. st. A.D.) komentara Euklidovih *Elemenata* (EE).

Tales iz Mileta (ca. 624.–527. pr. Kr.)

- Prvi poimence poznat grčki filozof, znanstvenik i inženjer.
- Ne zna se je li išta pisao, a ako i jest, svi njegovi zapisi nestali su prije Aristotelovog doba (sred. 4. st. pr. Kr.).
- Pripisuju mu se prvi matematički dokazi, ali nije sigurno je li išta dokazivao!
- Talesu pripisani teoremi pripisuju mu se temeljem biografije koju je napisao Diogenes Laertius (2./3. st. A.D.) i **Proklovi** (5. st. A.D.) komentara Euklidovih *Elemenata* (EE).
- Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice, Talesovi teoremi o proporcionalnosti;

Tales iz Mileta (ca. 624.–527. pr. Kr.)

- Prvi poimence poznat grčki filozof, znanstvenik i inženjer.
- Ne zna se je li išta pisao, a ako i jest, svi njegovi zapisi nestali su prije Aristotelovog doba (sred. 4. st. pr. Kr.).
- Pripisuju mu se prvi matematički dokazi, ali nije sigurno je li išta dokazivao!
- Talesu pripisani teoremi pripisuju mu se temeljem biografije koju je napisao Diogenes Laertius (2./3. st. A.D.) i **Proklovi**h (5. st. A.D.) komentara Euklidovih *Elemenata* (EE).
- Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice, Talesovi teoremi o proporcionalnosti; promjer raspolavlja krug, vršni kutovi su jednaki, kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki, KSK-teorem o sukladnosti trokuta — empirijski ili deduktivno?

Pitagora sa Samosa (ca. 570.–490. pr. Kr.)

- Sin trgovca, rođen na otoku Samosu. Na njegovo obrazovanje su bitno utjecali filozofi Ferekid, Tales i Talesov učenik Anaksimandar.
- Oko 535. je otišao u Egipat, gdje je 525. pao u perzijsko zarobljeništvo i odveden u Babilon. Nekoliko godina kasnije vratio se na Samos.

Prema pitagorejskoj filozofiji bit svijeta je u harmoniji (prirodnih) brojeva: *ἀριθμός* je isključivo prirodan broj.¹

¹Jedinica ili monada (*μόνος*) nije broj, nego osnova svih brojeva. Tako u drugoj definiciji EEVII: Broj je skup jedinica.

Prema pitagorejskoj filozofiji bit svijeta je u harmoniji (prirodnih) brojeva: *ἀριθμός* je isključivo prirodan broj.¹

Pitagorejci su prvi koji brojeve gledaju kao samostalne objekte.

Pridavana su im mistična značenja, ali su dokazani i prvi rezultati o njima: teorijska aritmetika.

¹Jedinica ili monada (*μόνος*) nije broj, nego osnova svih brojeva. Tako u drugoj definiciji EEVII: Broj je skup jedinica.

¹Jedinica ili monada (μόνος) nije broj, nego osnova svih brojeva. Tako u drugoj definiciji EEVII: Broj je skup jedinica.

Pitagorejci su prvi koji brojeve gledaju kao samostalne objekte.

Pridavana su im mistična značenja, ali su dokazani i prvi rezultati o njima: teorijska aritmetika. Praktično računanje: logistika.

Quadrivium:

- (teorijska) aritmetika: bavi se onim što se može prebrojati (kvantiteta, brojnost);
- geometrija (*γεωμετρία*): bavi se onim što se može mjeriti (veličinama: duljina, površina, volumen, trajanje, masa);
- glazba (harmonija): primjena aritmetike (aritmetika u vremenu) **Aktivnost (max. 1 student)**
- astronomija: primjena geometrije (raspored veličina u vremenu i prostoru)

¹Jedinica ili monada (μόνος) nije broj, nego osnova svih brojeva. Tako u drugoj definiciji EEVII: Broj je skup jedinica.

Pitagorejska aritmetika

Izvori o pitagorejskoj aritmetici: Proklo, Aristotel i Nikomah iz Geraze; EEVII, EEVIII, EEIX.

Pitagorejska aritmetika

Izvori o pitagorejskoj aritmetici: Proklo, Aristotel i Nikomah iz Geraze; EEVII, EEVIII, EEIX.

Pitagorejske klasifikacije brojeva:

- **parni i neparni brojev:** parni brojevi su oni koji se mogu podijeliti na dva jednaka broja, a neparnima pri dijeljenju popola preostaje jedinica.

Pitagorejska aritmetika

Izvori o pitagorejskoj aritmetici: Proklo, Aristotel i Nikomah iz Geraze; EEVII, EEVIII, EEIX.

Pitagorejske klasifikacije brojeva:

- **parni i neparni brojev:** parni brojevi su oni koji se mogu podijeliti na dva jednaka broja, a neparnima pri dijeljenju popola preostaje jedinica.
- **prosti i složeni brojevi:** EEVII, Def. 11 & 13: **Prost broj** je broj koji se može izmjeriti samo jedinicom. **Složen broj** je onaj koji se može izmjeriti brojem.

Pitagorejska aritmetika

Izvori o pitagorejskoj aritmetici: Proklo, Aristotel i Nikomah iz Geraze; EEVII, EEVIII, EEIX.

Pitagorejske klasifikacije brojeva:

- **parni i neparni brojev:** parni brojevi su oni koji se mogu podijeliti na dva jednaka broja, a neparnima pri dijeljenju popola preostaje jedinica.
- **prosti i složeni brojevi:** EEVII, Def. 11 & 13: **Prost broj** je broj koji se može izmjeriti samo jedinicom. **Složen broj** je onaj koji se može izmjeriti brojem.
- **Savršeni brojevi**, kvadratni i kubni brojevi **Aktivnost (max. 1 student)**

Teorem (EEIX36: Kako biste ga danas izrekli?)

Ako je proizvoljno mnogo brojeva počevši od jedinice razvijeno u dvostrukoj proporciji sve dok im zbroj ne bude prost, te ako taj zbroj pomnožen sa zadnjim daje broj, taj broj je savršen.

Pitagorejske trojke

Teorem (EEX29, lema)

Za svaka dva relativno prosta prirodna broja $m > n$, koji nisu oba neparni, $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ je primitivna pitagorejska trojka^a i obrnuto, za svaku primitivnu pitagorejsku trojku (a, b, c) postoje dva relativno prosta prirodna broja m i n , koji nisu oba neparni, takvi da je $(a, b, c) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$.

^aPitagorejska trojka u kojoj su brojevi relativno prosti.

Kako iz tog zaključujemo da su pitagorejci vjerojatno znali da pitagorejskih trojki ima beskonačno mnogo?

Pitagorejske trojke

Teorem (EEX29, lema)

Za svaka dva relativno prosta prirodna broja $m > n$, koji nisu oba neparni, $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ je primitivna pitagorejska trojka^a i obrnuto, za svaku primitivnu pitagorejsku trojku (a, b, c) postoje dva relativno prosta prirodna broja m i n , koji nisu oba neparni, takvi da je $(a, b, c) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$.

^aPitagorejska trojka u kojoj su brojevi relativno prosti.

Kako iz tog zaključujemo da su pitagorejci vjerojatno znali da pitagorejskih trojki ima beskonačno mnogo?

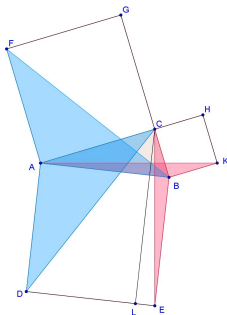
Kroneckerov teorem 1901. — generalizacija na sve pitagorejske trojke

Aktivnost (1 student): Usporedba modernog i Euklidovog dokaza gornjeg teorema

Pitagorejska geometrija

Teorem (EEI47, EEI48)

Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad njegovom najduljom stranicom jednak zbroju kvadrata nad njegovim kraćim stranicama.



Aktivnost (max. 3 studenta): Drugačiji dokazi Pitagorinog poučka koji bi mogli biti pitagorejski s argumentom

Teorem (EEI32)

U svakom trokutu, ako se jedna strana produlji, vanjski kut jednak je zbroju dvaju unutrašnjih nasuprotnih kutova, a zbroj tri unutrašnja kuta u trokutu je dva prava kuta.

Teorem (EEI41)

Ako paralelogram ima istu osnovicu kao trokut i ako se nalaze između istih paralela, onda je paralelogram dvostruki trokut.

Teorem (EEI32)

U svakom trokutu, ako se jedna strana produlji, vanjski kut jednak je zbroju dvaju unutrašnjih nasuprotnih kutova, a zbroj tri unutrašnja kuta u trokutu je dva prava kuta.

Teorem (EEI41)

Ako paralelogram ima istu osnovicu kao trokut i ako se nalaze između istih paralela, onda je paralelogram dvostruki trokut.

Teorem

Postoje samo tri pravilna popločenja ravnine.

Teorem (EEI32)

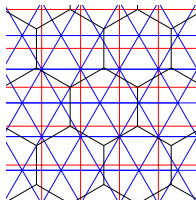
U svakom trokutu, ako se jedna strana produlji, vanjski kut jednak je zbroju dvaju unutrašnjih nasuprotnih kutova, a zbroj tri unutrašnja kuta u trokutu je dva prava kuta.

Teorem (EEI41)

Ako paralelogram ima istu osnovicu kao trokut i ako se nalaze između istih paralela, onda je paralelogram dvostruki trokut.

Teorem

Postoje samo tri pravilna popločenja ravnine.



Nesumjerljivost vs. iracionalnost

Pitagorejci su smatrali da se cijeli svijet može opisati brojevima i njihovim odnosima (omjerima) $\Rightarrow$

Pitagorejska „dogma“

Svake dvije *istovrsne* veličine su **sumjerljive**, tj. za svake dvije istovrsne veličine postoji njima istovrsna veličina kojom se mogu obje izmjeriti.

Nesumjerljivost vs. iracionalnost

Pitagorejci su smatrali da se cijeli svijet može opisati brojevima i njihovim odnosima (omjerima) $\Rightarrow$

Pitagorejska „dogma“

Svake dvije *istovrsne* veličine su **sumjerljive**, tj. za svake dvije istovrsne veličine postoji njima istovrsna veličina kojom se mogu obje izmjeriti.

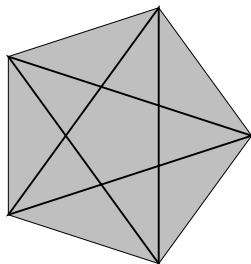
Hipassus iz Metaponta oko 450. g. pr. Kr. (?)) je dokazao:

Teorem

Dijagonala kvadrata nije sumjerljiva njegovoj stranici.

Omjer zlatnog reza

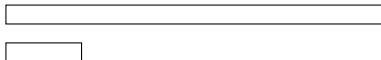
Moguće je i da je otkriće nesumjerljivih veličina vezano za
omjer „zlatnog reza”: Omjer dviju duljina u kojem se njihov zbroj
prema duljoj odnosi kao dulja prema kraćoj.



Koje su bitne razlike prema modernom iskazu „ $\sqrt{2}$ i $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ su iracionalni brojevi”? Kako to sigurno nisu dokazali?

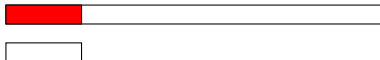
Euklidov algoritam

Od davnina je bilo jasno kako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge:



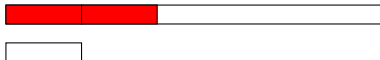
Euklidov algoritam

Od davnina je bilo jasno kako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge:



Euklidov algoritam

Od davnina je bilo jasno kako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge:



Euklidov algoritam

Od davnina je bilo jasno kako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge:



Euklidov algoritam

Od davnina je bilo jasno kako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge:



Euklidov algoritam

Od davnina je bilo jasno kako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge:



Pitagorejci (a možda čak i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom”:

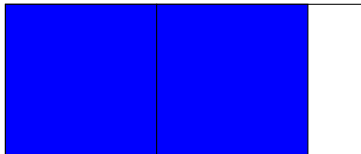


Euklidov algoritam

Od davnina je bilo jasno kako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge:



Pitagorejci (a možda čak i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom“:

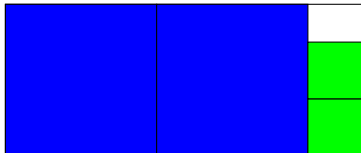


Euklidov algoritam

Od davnina je bilo jasno kako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge:



Pitagorejci (a možda čak i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom”:

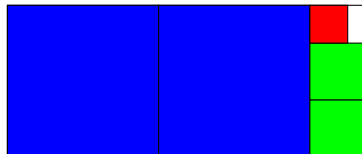


Euklidov algoritam

Od davnina je bilo jasno kako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge:



Pitagorejci (a možda čak i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom”:

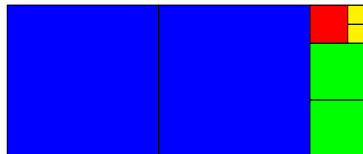


Euklidov algoritam

Od davnina je bilo jasno kako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge:



Pitagorejci (a možda čak i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom“:



Iracionalnost omjera zlatnog reza



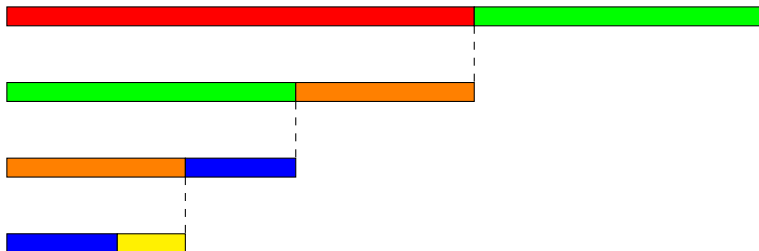
Iracionalnost omjera zlatnog reza



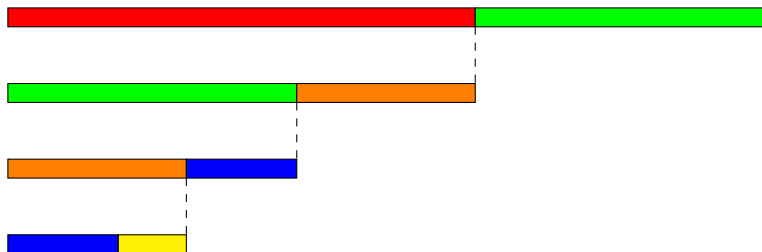
Iracionalnost omjera zlatnog reza



Iracionalnost omjera zlatnog reza



Iracionalnost omjera zlatnog reza



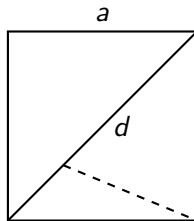
Budući da je u svakom koraku omjer dulje prema kraćoj duljini isti, postupak se nastavlja u beskonačnost — ne postoji zajednička mjera crvene i zelene dužine, kojima su duljine u omjeru zlatnog reza. Dakle, **postoje nesumjerljive veličine.**

EEX2

Nesumjerljivost dijagonale i stranice kvadrata

Aktivnost (max. 1 student): Na način za koji smatrate da bi mogao biti pitagorejski, dokažite da „ $\sqrt{3}$ nije racionalan“

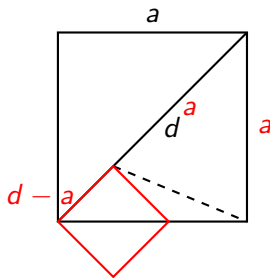
Nesumjerljivost dijagonale i stranice kvadrata



Stranica crvenog kvadrata ima duljinu $d - a$, a njegova dijagonala je $a - (d - a) = 2a - d$, dakle je u svakom sljedećem koraku $a_{n+1} = d_n - a_n$ i $d_{n+1} = 2a_n - d_n$. Ako bi a i d bile sumjerljive sa zajedničkom mjerom m , onda bi u svakom koraku a_n i d_n bile sumjerljive, istovremeno postajući proizvoljno male (dakle, u nekom trenu i manje od m).

Aktivnost (max. 1 student): Na način za koji smatrate da bi mogao biti pitagorejski, dokažite da $\sqrt{3}$ nije racionalan.

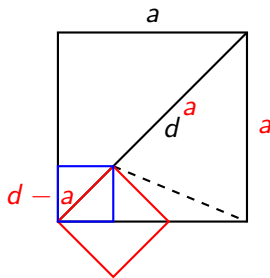
Nesumjerljivost dijagonale i stranice kvadrata



Stranica crvenog kvadrata ima duljinu $d - a$, a njegova dijagonala je $a - (d - a) = 2a - d$, dakle je u svakom sljedećem koraku $a_{n+1} = d_n - a_n$ i $d_{n+1} = 2a_n - d_n$. Ako bi a i d bile sumjerljive sa zajedničkom mjerom m , onda bi u svakom koraku a_n i d_n bile sumjerljive, istovremeno postajući proizvoljno male (dakle, u nekom trenu i manje od m).

Aktivnost (max. 1 student): Na način za koji smatrate da bi mogao biti pitagorejski, dokažite da $\sqrt{3}$ nije racionalan.

Nesumjerljivost dijagonale i stranice kvadrata



Stranica crvenog kvadrata ima duljinu $d - a$, a njegova dijagonala je $a - (d - a) = 2a - d$, dakle je u svakom sljedećem koraku $a_{n+1} = d_n - a_n$ i $d_{n+1} = 2a_n - d_n$. Ako bi a i d bile sumjerljive sa zajedničkom mjerom m , onda bi u svakom koraku a_n i d_n bile sumjerljive, istovremeno postajući proizvoljno male (dakle, u nekom trenu i manje od m).

Aktivnost (max. 1 student): Na način za koji smatrate da bi mogao biti pitagorejski, dokažite da $\sqrt{3}$ nije racionalan

Grčki alfabetski brojevni sustav

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	A' α'	B' β'	Γ' γ'	Δ' δ'	E' ε'	Γ' ς'	Z' ζ'	H' η'	Θ' ϑ'
10	I' ι'	K' κ'	Λ' λ'	M' μ'	N' ν'	Ξ' ξ'	O' $\omicron'$	Π' π'	Ψ' φ'
10^2	P' ρ'	Σ' σ'	T' τ'	Υ' υ'	Φ' ϕ'	X' χ'	Ψ' ψ'	Ω' ω'	Λ' λ'
10^3	A α	B β	Γ γ	Δ δ	E ε	Γ ς	Z ζ	H η	Θ ϑ
10^4	$\overset{\alpha}{\text{M}}$	$\overset{\beta}{\text{M}}$	$\overset{\gamma}{\text{M}}$	$\overset{\delta}{\text{M}}$	$\overset{\varepsilon}{\text{M}}$	$\overset{\varsigma}{\text{M}}$	$\overset{\zeta}{\text{M}}$	$\overset{\eta}{\text{M}}$	$\overset{\vartheta}{\text{M}}$

3 arhaična slova *vau* (*digama*) za 6, *kopa* za 90 i *san* (*sampi*) za 900

- slično: Feničani, Židovi, u srednjem vijeku Arapi (*abdžad*), Hrvati (glagoljske brojke), ...
- kraj brojke: apostrof (ili cijela brojka natcrtana)
- 10^3 (od 5. st. pr. Kr.): kao jedinice, ali s crticom dolje lijevo; npr. 2022 = $_{\beta}\kappa\beta'$
- 10^4 (od 3. st. pr. Kr.) M (od *MYPIOI*, mirijada), kasnije dvije točke iznad znamenke: $\overset{\alpha}{M}$ ili $\ddot{\alpha}$ je 10.000)

- U atenskom razdoblju starogrčka matematika u potpunosti poprima formu geometrijske algebre, a pojavljuju se i temelji infinitezimalnog načina razmišljanja te matematičke logike.

Začeci infinitezimalnog računa

Zenon iz Eleje (ca. 490–430 v. Chr.) — Aristotel mu pripisuje četiri paradoksa kretanja, u kojima iz beskonačne djeljivosti prostora odnosno vremena dobiva paradoksalni rezultat nemogućnosti kretanja.

- **Dihotomija**: Kretanje je nemoguće jer se svaku udaljenost prvo treba prijeći do pola, a nakon toga pola ostatka i t.d. Ma koliko prijeđemo, uvijek će ostati razlika do cilja.
- *Ahil i kornjača*: Dok Ahil dođe do prvotne pozicije kornjače, ona se pomakla. Dok dođe do te pozicije, ona je opet malo odmakla, i t.d. Dakle, Ahil neće nikad stići kornjaču.

Kako danas razrješavamo ove paradokse?

Začeci infinitezimalnog računa

Zenon iz Eleje (ca. 490–430 v. Chr.) — Aristotel mu pripisuje četiri paradoksa kretanja, u kojima iz beskonačne djeljivosti prostora odnosno vremena dobiva paradoksalni rezultat nemogućnosti kretanja.

- **Dihotomija**: Kretanje je nemoguće jer se svaku udaljenost prvo treba prijeći do pola, a nakon toga pola ostatka i t.d. Ma koliko prijeđemo, uvijek će ostati razlika do cilja.
- **Ahil i kornjača**: Dok Ahil dođe do prvotne pozicije kornjače, ona se pomakla. Dok dođe do te pozicije, ona je opet malo odmakla, i t.d. Dakle, Ahil neće nikad stići kornjaču.

Kako danas razrješavamo ove paradokse? **Aktivnost (max. 2 studenta)**

Atomistički filozof **Demokrit iz Abdere** (ca. 460–370 v. Chr.) – ideja podjele stošca na beskonačno tanke diskove paralelne bazi – dilema: Ako gledamo jedan takav disk, jesu li njegovi krugovi jednaki ili ne? Ako jesu, stožac je valjak, ako nisu, stožac je grbav.

Geometrijska algebra

U atensko je doba matematika poprimila formu koju danas nazivamo **geometrijska algebra**.

- kvadrat – nije broj odnosno potencija, nego geometrijski lik i njegova mjera (površina);
- dvije figure su jednake ako su jednake po mjeri;

Geometrijska algebra

U atensko je doba matematika poprimila formu koju danas nazivamo **geometrijska algebra**.

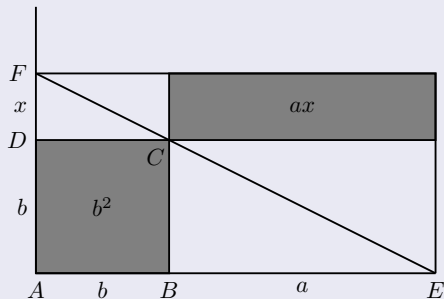
- kvadrat – nije broj odnosno potencija, nego geometrijski lik i njegova mjera (površina);
- dvije figure su jednake ako su jednake po mjeri;
- danas se mnoge od takvih konstrukcija mogu shvatiti kao algebarske formule odnosno rješavanje algebarskih jednadžbi;
- Nije ispravno reći da su stari Grci jednadžbe rješavali geometrijski!!!!

Geometrijska algebra

U atensko je doba matematika poprimila formu koju danas nazivamo **geometrijska algebra**.

- kvadrat – nije broj odnosno potencija, nego geometrijski lik i njegova mjera (površina);
- dvije figure su jednake ako su jednake po mjeri;
- danas se mnoge od takvih konstrukcija mogu shvatiti kao algebarske formule odnosno rješavanje algebarskih jednadžbi;
- Nije ispravno reći da su stari Grci jednadžbe rješavali geometrijski!!!!
- 5. st. pr. Kr.: sve geometrijske konstrukcije se smiju provoditi isključivo ravnalom i šestarom — za jednakost (brojeva, duljina, površina, volumena) se dakle tražilo i više od puke jednakosti mjere: morala se moći dokazati u konačno mnogo konstrukcijskih koraka ravnalom i šestarom. Zašto baš ravnalo i šestar?

Primjer



Tri klasična problema

Ravnom i šestarom možemo: prepoloviti kut, podijeliti dužinu na proizvoljan broj jednakih dijelova, udvostručiti kvadrat, ...

Početak atenskog razdoblja grčke matematike, dakle u 5. st. pr. Kr., pojavila su se tri klasična problema:

- 1 Problem udvostručenja kocke: Za danu kocku treba ravnom i šestarom konstruirati brid kocke dvostrukog volumena.
- 2 Problem trisekcije kuta: Dani kut treba ravnom i šestarom podijeliti na trećine.
- 3 Problem kvadrature kruga: Ravnom i šestarom treba konstruirati stranicu kvadrata iste površine kao dani krug.

Problem udvostručenja kocke

Moderna formulacija: Iz $a > 0$ treba ravnalom i šestarom konstruirati x takav da je

$$x^3 = 2a^3.$$

Dvije poznate legende o njegovoj pojavi:

- Teon iz Smirne citira Eratostena: Delijski problem Apolonova oltara
- Eutocius u komentaru Arhimedova teksta *O kugli i valjku*: kretski kralj Minos htio je udvostručiti grob pjesnika Glaukusa

Problem trisekcije kuta

Nema nikakvih, čak niti legendarnih, podataka o nastanku ovog problema. Bio je manje popularan, vjerojatno jer je za neke kutove rješiv. Očito ga je dovoljno razmatrati samo za šiljaste kutove.

Problem trisekcije kuta

Nema nikakvih, čak niti legendarnih, podataka o nastanku ovog problema. Bio je manje popularan, vjerojatno jer je za neke kutove rješiv. Očito ga je dovoljno razmatrati samo za šiljaste kutove. Kut se može konstruirati ako mu se može konstruirati kosinus.

Problem trisekcije kuta

Nema nikakvih, čak niti legendarnih, podataka o nastanku ovog problema. Bio je manje popularan, vjerojatno jer je za neke kutove rješiv. Očito ga je dovoljno razmatrati samo za šiljaste kutove. Kut se može konstruirati ako mu se može konstruirati kosinus. Ako je zadan α , iz $\cos(3\phi) = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$ uz supstitucije $3\phi = \alpha$ i $x = \cos\phi$ tražimo konstrukciju rješenja kubne jednadžbe

$$4x^3 - 3x = \cos\alpha.$$

Aktivnost (max. 2 studenta): Konstrukcija duplikacije kvadrata i bisekcije kuta; konstrukcija paralele i okomice

Problem kvadrature kruga



- **Anaksagora iz Klazomena** (ca. 499.–428. pr. Kr.)
- **Antifont** (sredina 5. st. pr. Kr.) – vjerojatno prvi predložio upisivanje pravilnih mnogokuta u krug, počevši od kvadrata, preko osmerokuta redom uz udvostručavanje broja stranica; smatrao je da će se ostatak do površine iscrpsti kad dođemo do dovoljno velikog broja stranica; u čemu je greška?
- Aristofan: *Ptice* (414. pr. Kr.)

Hipokrat s Hiosa (ca. 470. – 410. pr. Kr.)

- navodno: trgovac brodovima iz Jonije, izgubio imovinu (gusari? nepošteni carinici?) te je čekajući odštetu, otprilike 450.–430. pr. Kr. boravio u Ateni i učio filozofiju i matematiku
- najznačajniji matematičar u 5. st. pr. Kr.
- dao je prve značajne doprinose rješavanju sva tri klasična problema
- napisao je danas izgubljeno djelo *Elementi geometrije* – vjerojatno osnova za prve četiri knjige *Euklidovih Elemenata*
- znao, vjerojatno i dokazao: površine krugova odnose se kao kvadrati njihovih polumjera (najstariji sačuvani dokaz: EEXII2 pomoću metode ekshauštije)
- smatra se da je uveo slova kao oznake u dijagramima
- prva osoba koja je točno odredila kvadraturu nekog lika obrubljenog krivuljama

Hipokrat i kvadratura kruga: Hipokratovi mjeseci

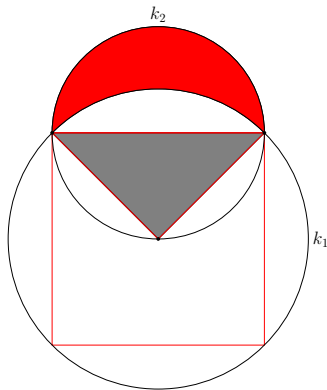
Pri pokušaju rješavanja problema kvadrature kruga otkrio je da se određeni mjesecoliki likovi omeđeni dvjema kružnicama mogu kvadrirati ravnalom i šestarom. Ti se likovi danas nazivaju

Hipokratovi mjeseci.

Otkrio je, do na sličnost, tri tipa takvih mjeseca. Danas je poznato da ih ima pet. Preostala dva su otkrivena u 18. st., a u 20. st. je dokazano da nema drugih.

Aktivnost (po 1 student): Drugi Hipokratov mjesec; dokaz da ih je pet

Prvi Hipokratov mjesec

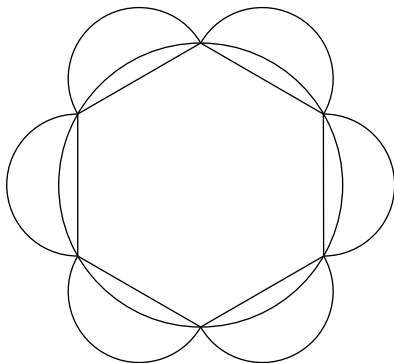


Kvadrat nad hipotenuzom (tj. promjerom od k_2) je prema Pitagorinom poučku dvostruki kvadrat nad polumjerom od k_1 , dakle je kvadrat nad promjerom od k_1 dvostruki kvadrat nad promjerom od k_2 .

Budući da se površine krugova odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima, polukrug nad hipotenuzom ima površinu kao $1/4$ kruga opisanog trokutu.

Površina mjeseca je zbroj površina trokuta i polukruga nad hipotenuzom umanjen za četvrtinu površine trokutu opisanog kruga, dakle prvi Hipokratov mjesec ima istu površinu kao trokut kojim je određen.

Prema mnogim izvorima, Hipokrat je bio svijestan da ovime nije riješio kvadraturu kruga. Drugi navode sljedeće krivo zaključivanje:



Polumjer kružnice jednako je dug kao stranice pravilnog šesterokuta $\Rightarrow$ površine malih i velikih krugova se odnose 4 : 1.

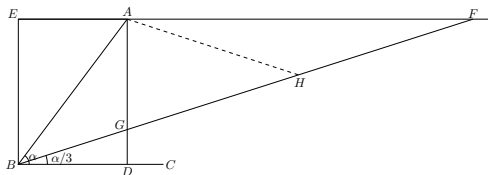
$$\begin{aligned}
 & \text{flower} = \text{hexagon} + 6 \cdot \text{crescent} = \text{circle} + 6 \cdot \text{crescent}, \\
 4 \cdot \text{small circle} = \text{big circle} &= \text{hexagon} + 6 \cdot \text{crescent} - 6 \cdot \text{crescent} = \text{hexagon} + 3 \cdot \text{small circle} - 6 \cdot \text{crescent}, \\
 & \text{small circle} = \text{hexagon} - 6 \cdot \text{crescent}.
 \end{aligned}$$

Kad bi se ovi mjeseci mogli kvadrirati, mogao bi se kvadrirati i (mali) krug!

Hipokrat s Hiosa i trisekcija kuta

„Mehanička” trisekcija kuta:

Zadan: $\alpha = \angle ABC$.



- 1 Okomica iz A na $BC \rightsquigarrow D$;
- 2 E – četvrti vrh pravokutnika $ADBE$
- 3 na produljenju AE nađi F
t.d. $|FG| = 2|AB|$
gdje je
 $G = BF \cap AD$ (ovaj korak nije izvediv RŠ!!!)
- 4 $\Rightarrow 3\angle FBC = \alpha$

Hipokrat s Hiosa i duplikacija kocke

Srednje geometrijske proporcionalne

Srednje geometrijske proporcionalne između istovrsnih veličina a i b su njima istovrsne veličine x i y takve da je

$$a : x = x : y = y : b.$$

Hipokrat je uočio da se kocka brida a može udvostručiti ako se mogu konstruirati srednje geometrijske proporcionalne između a i $2a$:

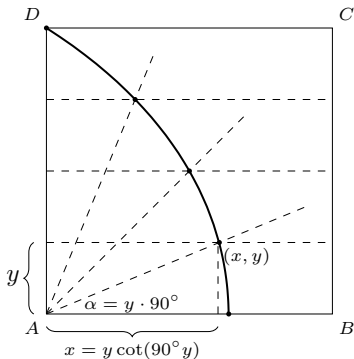
$$a : x = x : y = y : (2a) \Rightarrow x^3 = 2a^3$$

Nakon Hipokrata svi pokušaji rješenja ovog problema usmjereni su na određivanje srednjih geometrijskih proporcionala između a i $2a$.

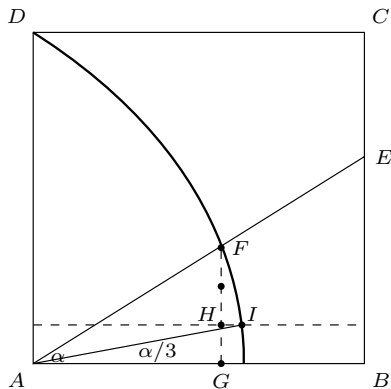
Hipija iz Elide (ca. 460.–400. pr. Kr.)

Hipija je bio političar i filozof sofist, zarađivao je putujući i držeći predavanja iz poezije, gramatike, povijesti, politike, arheologije, matematike i astronomije. Platon ga kasnije opisuje kao umišljenog i arogantnog čovjeka širokog, ali površnog znanja. Pripisuje mu se otkriće krivulje **kvadratise/trisekriste**, koja se može iskoristiti za kvadraturu kruga i trisekciju kuta.

Aktivnost (po 1 student): Kako pomoću kvadratise kvadrirati krug i dokaz da se radi o dijelu grafa transformiranog kotangensa



Trisekcija kuta pomoću kvadratisa



Zadan: $\alpha = \angle BAE$

Neka je F presjek kvadratisa i AE .

Ako iz F povučemo okomicu na AB , dobijemo G .

$\overline{FG}$ podijelimo na tri jednaka dijela:

$$|FH| : |HG| = 2 : 1.$$

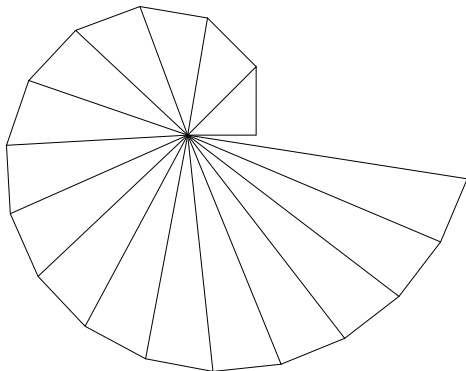
Kroz H povučemo paralelu s AB i odredimo njeno sjecište I s kvadratisom. Onda je $\angle IAB = \alpha/3$.

Teodor iz Kirene (ca. 465.–398. pr. Kr.)

Platonov dijalog *Teetet*: dokazao je nesumjerljivost stranice jediničnog kvadrata i stranice kvadrata površina 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17.

Teodor iz Kirene (ca. 465.–398. pr. Kr.)

Platonov dijalog *Teetet*: dokazao je nesumjerljivost stranice jediničnog kvadrata i stranice kvadrata površina 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17.



Teodor iz Kirene (ca. 465.–398. pr. Kr.)

Platonov dijalog *Teetet*: dokazao je nesumjerljivost stranice jediničnog kvadrata i stranice kvadrata površina 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17.

